Y. ROCARD

ELEKTRIZITÄT



VEB DEUTSCHER VERLAG DER WISSENSCHAFTEN

Y. ROCARD

ELEKTRIZITÄT



VEB DEUTSCHER VERLAG DER WISSENSCHAFTEN

HOCHSCHULBÜCHER FÜR PHYSIK

HERAUSGEGEBEN VON FRANZ X. EDER UND ROBERT ROMPE

BAND 10

ELEKTRIZITÄT

VON

YVES ROCARD

PROFESSOR AN DER FACULTÉ DES SCIENCES
DE L'UNIVERSITÉ DE PARIS



VEB DEUTSCHER VERLAG DER WISSENSCHAFTEN

BERLIN 1958

Y. ROCARD · ÉLECTRICITÉ
PARIS
1951 MASSON ET CIE, ÉDITEURS

DIE ÜBERSETZUNG BESORGTE NACH DER AUFLAGE VON 1956
K. SPIEGELBERG

VERANTWORTLICHER VERLAGSREDAKTEUR: I. SCHOLZ

PRINTED IN GERMANY
LIZENZ-NR. 206 · 435/29/58
GESAMTHERSTELLUNG: VEB OFFIZIN ANDERSEN NEXÖ IN LEIPZIG III-18-38

INHALTSVERZEICHNIS

ELEKTROSTATIK

I. Kapitel

II. Kapitel

III. Kapitel

IV. Kapitel

V. Kapitel

VI. Kapitel

VII. Kapitel

VIII. Kapitel

MAGNETISMUS

I. Kapitel

II. Kapitel

III. Kapitel

IV. Kapitel

VI. Kapitel

AUSBREITUNG. STRAHLUNG

I. Kapitel

II. Kapitel

III. Kapitel

IV. Kapitel

DAS FREIE ELEKTRON

I. Kapitel

II. Kapitel

III. Kapitel

I. ELEKTROSTATIK

I. KAPITEL

Reibungselektrizität. COULOMBsches Gesetz. Elektrisches Feld

Betrachten wir kurz die dem Leser bereits bekannten Tatsachen:

Reibungselektrizität

Werden ein Hartgummistab mit einem Katzenfell oder ein Glasstab mit einem Wolltuch gerieben, so erhalten sie die Eigenschaft, leichte Körper anziehen zu können, z. B. kleine Papierschnitzel oder kleine Holundermarkkügelchen, die beim Experiment im allgemeinen mit Graphit überzogen und an einem Stativ aufgehängt werden. Sie bilden dann ein „*elektrisches Pendel*". Diese seltsame Erscheinung ist seit langem bekannt und wurde von THALES VON MILET an Bernstein entdeckt. Nichtsdestoweniger wurden unsere Kenntnisse auf diesem Gebiet erst im 17. Jahrhundert erweitert.

Man bemerkte damals, daß die gleichen Effekte an einer ganzen Reihe von verschiedenen Substanzen beim Reiben auftreten (Glas, Schwefel, Harz usw.). Man nennt Körper, die die Eigenschaft leichte Körper anzuziehen erworben haben, *elektrisch geladen*, oder man sagt auch, daß sie *elektrisiert* seien. Weiter unten werden wir eine Unterscheidung zwischen *elektrischen Leitern* und *Isolatoren* einführen.

Hier weisen wir nur kurz darauf hin, daß die Versuche, Reibungselektrizität zu erzeugen, einzig bei Isolatoren oder bei Leitern, die isoliert sind, Erfolg haben. Daneben gibt es noch eine Reihe anderer Möglichkeiten, um in einem Körper Elektrizität zu erzeugen.

Wir können z. B. einen Glasstab A mit einem Glasstab B, der vorher mit einem Tuch gerieben wurde, verbinden. Der Stab A besitzt jetzt die Eigenschaft, die kleinen Papierstückchen genauso anzuziehen wie der Stab B. Er ist also durch den *Kontakt* elektrisiert worden.

Wir elektrisieren die Kugel eines elektrischen Pendels durch Berührung mit einem Glasstab, der mit einem Tuch gerieben wurde, und stellen fest, daß die Kugel hinterher von dem Glasstab abgestoßen wird, daß sie jedoch im Gegensatz dazu von einem Hartgummistab, der mit einem Katzenfell gerieben wurde, angezogen wird. Die Elektrizitäten, die von dem Glasstab und von dem Hartgummistab getragen werden, sind also verschiedener Art. Die Erfahrung zeigt, daß alle elektrisch geladenen Körper sich einem elektrischen Pendel gegenüber entweder wie ein mit einem Tuch geriebener Glasstab oder wie ein mit einem Katzenfell geriebener Hartgummistab verhalten.

Es gibt also zwei und *nur* zwei Arten der Elektrizität, und wir können folgendes qualitative Gesetz aufstellen: *Zwei gleichartige Elektrizitäten stoßen einander ab, zwei verschiedene ziehen sich gegenseitig an.*

Wir können dies durch die folgenden Experimente beweisen:

1. In einem Glasbehälter C sind zwei Metallplatten, L_1 und L_2, horizontal angeordnet (Abb. 1). Die obere Platte L_2 ist mit einem Pol einer WIMSHURST-Maschine verbunden, deren Beschreibung weiter unten erfolgt.

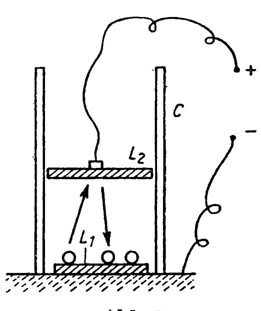


Abb. 1

Auf die Metallplatte, die an Masse liegt, d.h., die in elektrischem Kontakt mit der Erde ist, wird nun eine Anzahl kleiner Holundermarkkügelchen gelegt. Wenn der Generator in Betrieb gesetzt wird, stellen wir fest, daß die kleinen Holundermarkkügelchen zuerst von der Platte L_2 angezogen und dann plötzlich heftig abgestoßen werden. Sie kehren wieder zu der Platte L_1 zurück, verlieren jetzt ihre Ladung, da ja L_1 geerdet ist, und werden von neuem von L_2 angezogen. Dieser Kreislauf wiederholt sich; man beobachtet eine schnelle Auf- und Abbewegung der Holundermarkkügelchen.

2. Wir verbinden jetzt den Pol des Generators mit einer Messingkugel, die auf einem isolierten Ständer ruht und an der schmale Seidenbänder befestigt sind. Wenn wir den Generator in Gang setzen, stellen wir fest, daß die Seidenbänder, die alle mit der gleichen Elektrizität geladen sind, sich gegenseitig abstoßen. Die Kugel erhält dann das Aussehen eines stachligen Igels.

Nach Übereinkunft nennt man *positive Elektrizität* (oder Glaselektrizität) die Elektrizität, die auf einem mit einem Tuch geriebenen Glasstab auftritt und *negative Elektrizität* (oder Harzelektrizität) die Elektrizität des mit einem Katzenfell geriebenen Hartgummistabes.

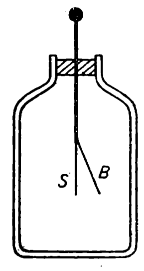


Abb. 2

Die Erfahrung zeigt, daß die Anziehung oder die Abstoßung, die von einem geladenen Körper auf einen anderen elektrischen Körper ausgeübt wird, abnimmt, wenn ihre Entfernung wächst. Weiter zeigt sich, daß diese Wirkung von dem Elektrisierungszustand der beiden Körper bei einer bestimmten Entfernung abhängt.

Betrachten wir zwei sehr kleine elektrisierte Körper A und B (deren Massen punktförmig sind), die auf einen dritten elektrischen Körper C wirken, der ebenfalls sehr klein ist und in der gleichen Entfernung liegt. Diese Entfernung sei sehr groß gegenüber den Dimensionen von A, B und C, den elektrischen Ladungen A und B und den Anziehungs- oder Abstoßungskräften k und k'. Welches auch das Vorzeichen der Elektrizität von A und B sei, die Erfahrung zeigt, daß dieses Verhältnis unabhängig von C ist und nur von dem Elektrisierungszustand von A und B abhängt. Man sagt, daß die Körper A und B die elektrischen Ladungen e und e' besitzen, die im gleichen Verhältnis wie die Kräfte f und f' zueinander stehen.

Der Vergleich der elektrischen Ladungen kann im allgemeinen mit einem *Goldblattelektrometer* durchgeführt werden. Dieser Apparat besteht aus einem vertikalen metallischen Stab S, der durch einen isolierenden Stopfen in das Innere eines Gehäuses führt, wovon zwei gegenüberliegende Seiten durchsichtig sind und Beobachtungen und Projektion erlauben. An diesem Stab befindet sich außerhalb des Gefäßes eine Messingkugel und innerhalb des Gefäßes ein leichtes metallisches Blättchen B (Gold oder Aluminium). Wenn man die Messingkugel elektrisiert, laden sich sowohl der Stab S als auch das Blättchen B mit Elektrizität gleichen Vorzeichens auf. Das metallische Blättchen spreizt sich von dem Stab ab (Abb. 2). Eine entsprechende Eichung der Apparatur erlaubt so die Messung elektrischer Ladungen.

COULOMBsches Gesetz

Die quantitative Untersuchung der Anziehungs- und Abstoßungsphänomene zwischen elektrischen Punktladungen hat auf folgendes Gesetz geführt:

Gesetz von COULOMB (1780): *Zwei elektrische Punktladungen üben aufeinander eine Kraft aus, die entlang ihrer Verbindungslinie gerichtet und deren Größe dem Quadrat ihrer Entfernung umgekehrt proportional und ihren Ladungen direkt proportional ist.* Anziehung tritt ein bei Ladungen verschiedenen Vorzeichens, Abstoßung bei Ladungen gleichen Vorzeichens:

$$K = \frac{1}{\varepsilon_0} \frac{e \cdot e'}{r^2}.$$

Dabei stellt $\frac{1}{\varepsilon_0}$ einen Proportionalitätskoeffizienten dar, e und e' sind die beiden elektrischen Ladungen im Abstand r.

Das COULOMBsche Gesetz könnte als beschränkt gültiges Gesetz angesehen werden, da punktförmige elektrische Ladungen eine Abstraktion darstellen. Es ist direkt durch das Experiment tatsächlich schwierig verifizierbar, läßt sich jedoch sehr leicht aus den Konsequenzen, auf die man geführt wird und die wir im folgenden betrachten wollen, ableiten. COULOMB hatte es auf direktem Wege mit Hilfe der von ihm für diese Gelegenheit eingeführten Torsionswaage erhalten.

(Die Torsionswaage wird in den Grundvorlesungen behandelt, und wir werden sie bei der Betrachtung des Magnetismus wiederfinden).

Potential

Eine elektrische Ladung kann von zwei verschiedenen Gesichtspunkten betrachtet werden: Einmal kann sie auf andere elektrische Ladungen wirken (sie ist aktiv), und zum zweiten kann sie den von anderen Ladungen ausgeübten Wirkungen unterliegen (sie ist passiv).

Als *elektrisches Feld* bezeichnet man den ganzen Bereich des Raums, in dem eine elektrische Ladung in jedem Punkt einer Kraft unterworfen ist, wobei diese Ladung als passiv angesehen wird.

Das elektrische Feld ist an jedem Punkt durch einen Vektor, den Feldvektor $\mathfrak{E}$, charakterisiert. Sein Ursprung ist der Punkt; seine Richtung ist die der Kraft, die auf eine beliebige in diesem Punkt angebrachte elektrische Ladung wirkt; sein

Sinn ist der der Kraft, die auf eine positive Ladung in diesem Punkt wirkt, und seine Größe ist gleich der Kraft, die auf die elektrische Einheitsladung wirkt.

Das durch eine Punktladung e erzeugte Feld besitzt in einem Punkt in der Entfernung r die Feldstärke

$$E = \frac{1}{\varepsilon_0} \frac{e}{r^2}.$$

Eine elektrische Ladung e, die an dem Punkt angebracht ist, für den der Feldvektor gleich $\mathfrak{E}$ ist, unterliegt einer Kraft

$$\mathfrak{K} = e\mathfrak{E}.$$

Berechnen wir jetzt die Arbeit der elektrischen Kräfte, die bei der Verschiebung einer Einheitsladung in einem COULOMBfeld, d.h. in einem durch eine Punktladung e erzeugten Feld, geleistet wird.

Die Arbeit dA für eine unendlich kleine Verschiebung der Einheitsladung ist gleich dem Produkt aus Feldstärke und Verschiebungskomponente in Feldrichtung. Wenn r der Abstand zwischen der betrachteten Ladung und der Ladung im Punkt O, die das Feld aufbaut, ist, dann hat diese Projektion bis auf kleine Größen höherer Ordnung die Größe dr. Folglich ist

$$dA = E\,dr.$$

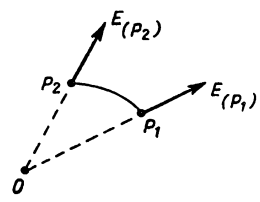


Abb. 3

Die tatsächliche Arbeit der elektrischen Kräfte bei der Verschiebung der Einheitsladung vom Punkt P_1 zum Punkt P_2, die in den Entfernungen r_1 und r_2 von O liegen, ist demnach (Abb. 3)

$$A = \int_{r_1}^{r_2} E\,dr = \int_{r_1}^{r_2} \frac{e\,dr}{\varepsilon_0 r^2} = \frac{e}{\varepsilon_0}\left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2}\right).$$

Mit diesen Vereinbarungen über die Vorzeichen stellt A die Arbeit dar, die man bei der Verschiebung von r_1 nach r_2 erhält, wenn man vom der elektrischen Kraft ausgeht.

Das elektrische Feld wird von einem Potential abgeleitet:

$$V = \frac{e}{\varepsilon_0 r} + \text{const},$$

und wir können schreiben

$$A = V_1 - V_2 \text{ oder } A = -(V_2 - V_1).$$

Dabei sind V_2 und V_1 die Potentiale in den Punkten P_2 und P_1. Diese Arbeit hängt nur von den Punkten P_1 und P_2 und nicht vom Weg P_1 nach P_2 ab.

So betrachtet, ist das elektrische Feld dem Schwerefeld analog. Um ein materielles Teilchen mit der Masse m von einer Höhe z_1 auf eine Höhe z_2 zu heben, muß gegen die Kräfte des Schwerefeldes eine Arbeit

$$A = mg(z_2 - z_1) = \int_{z_1}^{z_2} mg\,dz$$

geleistet werden. Das Potential ist also, wenn wir z nach oben positiv und entsprechend g als negativ annehmen, von der Form

$$V = -mgz.$$

Die Äquipotentialflächen, d. h. die Flächen, auf denen das Potential in jedem Punkt den gleichen Wert hat, stehen senkrecht auf der Richtung der Kraft. Das Potential wächst mit ansteigendem z, so daß die Kraft im Sinne abnehmender z gerichtet ist. Wir können in *Größe* und *Vorzeichen* die Beziehung zwischen der Schwerkraft und ihrem Potential darstellen durch

$$E = -\frac{dV}{dz}.$$

Kommen wir jetzt auf den allgemeinen Fall eines Feldes zurück, das von einem Potential abgeleitet wird, und betrachten mehrere Äquipotentialflächen. In jedem Punkt auf einer dieser Flächen steht das Feld *senkrecht* zu dieser Fläche, da die Arbeit der elektrischen Kräfte bei der Verschiebung einer elektrischen Ladung auf dieser Fläche Null ist und das Potential in jedem Punkt dieser Fläche den gleichen Wert besitzt. Das Feld besitzt folglich keine Komponenten parallel zur Äquipotentialfläche.

Genau wie das Schwerefeld *ist das elektrische Feld im Sinne abnehmender Potentiale gerichtet.* Wenn wir die Flächennormale positiv gegen die Potentialzunahme annehmen, so erhalten wir

$$\mathfrak{E} = -\frac{\partial V}{\partial \mathfrak{n}}.$$

Man drückt dies auch durch die Beziehung

$$\mathfrak{E} = -\operatorname{grad} V$$

aus, wobei der Gradient einer skalaren Größe V durch den Vektor mit den Komponenten

$$\frac{\partial V}{\partial x}, \quad \frac{\partial V}{\partial y}, \quad \frac{\partial V}{\partial z}$$

gegeben ist.

Die Komponenten des Feldes in Richtung der Koordinatenachsen sind demnach

$$E_x = -\frac{\partial V}{\partial x}; \quad E_y = -\frac{\partial V}{\partial y}; \quad E_z = -\frac{\partial V}{\partial z}.$$

Bei einem elektrischen Feld, das von einer Punktladung im Punkt O erzeugt wird (COULOMB-Feld), sind die Äquipotentialflächen Kugeln um das Zentrum O, da

$$V = \frac{e}{\varepsilon_0 r} + \text{const}.$$

Ist die Ladung e positiv, nimmt das Potential mit wachsendem r ab. Nehmen wir an, daß sich eine positive elektrische Ladung in diesem Feld befinde. Die

Kraft, die auf diese Ladung, gerichtet gegen abnehmende Potentiale, wirkt, ist abstoßend, wie nach dem COULOMBschen Gesetz zu erwarten.

Die Integrationskonstante ist in physikalischer Hinsicht ohne Interesse, da bei der Berechnung der Arbeit nur der Potentialunterschied eine Rolle spielt. Nach Vereinbarung erhält diese Konstante den Wert Null, wenn keine elektrischen Ladungen im Unendlichen existieren.

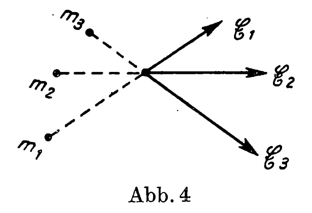


Abb. 4

Das Potential ist also die Arbeit, die notwendig ist, um die Einheitsladung aus dem Unendlichen in den Abstand r von der Ladung im Ursprung zu bringen.

Wird ein Feld durch mehrere Punktladungen gebildet, so ist das Potential in einem Punkt die Summe der Potentiale der einzelnen Ladungen, da die Kraft die geometrische Summe der Einzelkräfte dieser Ladungen ist (Abb. 4):

$$V = \frac{1}{\varepsilon_0}\left(\frac{e_1}{r_1} + \frac{e_2}{r_2} + \frac{e_3}{r_3}\right).$$

Wenn die Ladung, die sich in P befindet, den algebraischen Wert q besitzt, sind alle Kräfte, denen sie unterliegt, diesem q proportional, und die Arbeit der elektrischen Kräfte bei einer Verschiebung dieser Ladung aus einer Lage mit dem Potential V_1 in eine solche mit dem Potential V_2 wird

$$A = q(V_2 - V_1).$$

Wir stellen jetzt folgenden Fundamentalsatz auf:

Das Potential in einem Punkt einer Fläche, auf der eine kontinuierliche Elektrizitätsverteilung herrscht, hat einen endlichen Wert.

Betrachten wir nun ein Flächenelement ds mit einer Ladung de. Der Ausdruck

$$\sigma = \frac{de}{ds}$$

ist die *Flächenladungsdichte*. Bei einer gleichmäßigen Elektrizitätsverteilung hat σ einen konstanten Wert.

Das Potential in einem Punkt P der Fläche hat den Wert $V = \sum \frac{de}{\varepsilon_0 r}$, wobei r die Entfernung zwischen dem Punkt P und einem Punkt der Fläche mit der Ladung de ist. Für Punkte sehr nahe an P nimmt der Ausdruck $\frac{de}{r}$ die unbestimmte Form $\frac{0}{0}$ an, und a priori können wir nicht sagen, was sich für das Potential in P ergeben wird.

Betrachten wir auf der Fläche einen Kreis um das Zentrum P mit dem sehr kleinen Radius R. Die Ladungen außerhalb dieses Kreises ergeben keine Schwierigkeiten. Wir können die Fläche des Kreises aus Elementen mit der Größe $2\pi r dr$ zusammensetzen. Die Ladung, die von jedem dieser Elemente getragen

wird, beträgt $2\,\pi r\sigma dr$, und das Potential, das im Punkt P hervorgerufen wird, hat den Wert

$$dv = \frac{1}{\varepsilon_0}\,\frac{2\pi\sigma\, r\,d\,r}{r} = \frac{1}{\varepsilon_0}\,2\pi\sigma\,d\,r.$$

Das Potential für die gesamte Fläche des Kreises hat demnach den Wert

$$V = \int_0^R \frac{2\pi\sigma}{\varepsilon_0}\,dr = \frac{2\pi\sigma R}{\varepsilon_0}.$$

Das Potential in P ist endlich.

Man kann in gleicher Weise zeigen, daß in jedem Punkt P, der im Innern eines elektrisierten Körpers liegt, das Potential einen endlichen Wert hat. Dazu müßte man eine Kugel mit dem Mittelpunkt P und dem Radius R betrachten. Das Volumenelement würde

$$d\left(\frac{4}{3}\,\pi\,r^3\right) = 4\pi r^2 dr$$

sein.

Wenn wir mit ϱ die Ladungsdichte bezeichnen ($\varrho = \frac{d\,e}{dv}$, wobei de die Ladung des Volumenelements dv ist), folgt für die Ladung jedes Volumenelementes $4\,\pi\,\varrho r^2 dr$. Das von dieser Ladung hervorgerufene Potential in P wird gegeben durch

$$\frac{4\pi\varrho r^2\,d\,r}{\varepsilon_0 r} = \frac{4\pi\varrho\,r\,d\,r}{\varepsilon_0}.$$

Das Potential in P, das von den inneren Ladungen der betrachteten Kugel herrührt, die allein den Ausdruck unendlich machen könnten, hat also den Wert

$$\int_0^R \frac{4\pi\varrho\,r\,d\,r}{\varepsilon_0} = \frac{2\pi\varrho R^2}{\varepsilon_0}.$$

Damit ist gezeigt, daß das Potential in P endlich ist.

GAUSSsches Theorem

Bevor wir jetzt den Fundamentalsatz beweisen, der unter dem Namen GAUSSsches Theorem bekannt ist, definieren wir den ***Fluß eines Vektors durch eine Fläche.***

Betrachten wir einen Punkt auf einer Fläche und das Feld $\mathfrak{E}$ in diesem Punkt (Abb. 5). Wenn man mit E_n die Projektion des Feldvektors auf die Senkrechte zur Fläche bezeichnet, dann nennt man Fluß des Vektors $\mathfrak{E}$ durch das Element der Fläche S um den Punkt den skalaren Ausdruck

$$d\Phi = E_n\,dS.$$

Wir betrachten jetzt die endliche Fläche (S); im allgemeinen teilt diese den gesamten Raum in zwei Bereiche. Wir vereinbaren, die Senkrechte von einer bestimmten Seite der Fläche als positiv zu bezeichnen.

Der Fluß des Feldes $\mathfrak{E}$ durch die Fläche ist die algebraische Summe des Flusses durch die einzelnen Elemente und hat den Wert

$$\Phi = \int_S E_n \, dS.$$

Vektoriell schreibt man auch $\Phi = \int \mathfrak{E} d\mathfrak{S}$. Dabei ist $\mathfrak{E} d\mathfrak{S}$ das skalare Produkt von $\mathfrak{E}$ in Richtung der positiven Normalen mit dem Vektor $d\mathfrak{S}$.

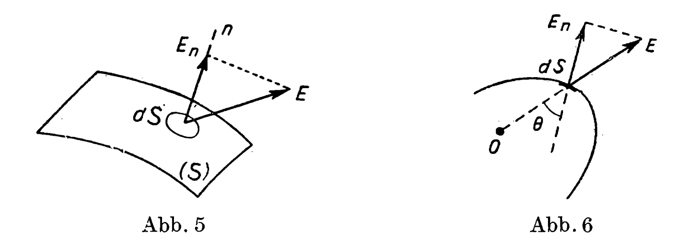


Abb. 5 Abb. 6

Berechnen wir den Fluß eines elektrischen Feldes, das durch eine punktförmige Ladung e im Punkt O aufgebaut wird, durch eine Fläche. Wir bezeichnen mit Θ den Winkel zwischen Feld und Normale (Abb. 6). Dann gilt

$$d\Phi = E_n \, dS = E dS \cos\Theta = E dS_1.$$

Dabei ist dS_1 die Projektion von dS auf die Ebene, die zu $\mathfrak{E}$ senkrecht steht.

Da $E = \dfrac{e}{\varepsilon_0 r^2}$ ist, folgt also $d\Phi = \dfrac{e}{\varepsilon_0} \dfrac{dS_1}{r^2}$, wobei $\dfrac{dS_1}{r^2}$ der Raumwinkel $d\Omega$ ist, unter dem, von O aus betrachtet, das Flächenelement dS erscheint:

$$d\Phi = \frac{e}{\varepsilon_0} d\Omega.$$

Es folgt also für den Fluß durch die Fläche S der Ausdruck

$$\Phi = \frac{e}{\varepsilon_0} \Omega.$$

Dabei ist Ω der Raumwinkel, unter dem man von O die Fläche S sieht und der nicht von der Form der Fläche, sondern einzig und allein von ihrer Umrandung abhängt.

Wir wollen nun eine geschlossene Fläche betrachten. Dabei müssen wir zwei Fälle unterscheiden.

1. Die Fläche schließt die Ladung e, die das Feld aufbaut, nicht ein. Der Fluß durch das Flächenelement dS_1 und der durch dS_2 erscheinen, von O aus gesehen, unter dem gleichen Raumwinkel $d\Omega$, haben also den gleichen absoluten Wert, ihr Vorzeichen ist jedoch verschieden. Wir können nun den Gesamtfluß durch die

Fläche aus Paaren von Flächenelementen zusammengesetzt vorstellen und finden, daß er Null wird.

2. Die Ladung e liegt innerhalb der geschlossenen Fläche. Dann haben die Flüsse durch die Einzelelemente alle gleiches Vorzeichen. Der Gesamtfluß durch die Fläche hat demnach den Wert $\Phi = \frac{4\pi e}{\varepsilon_0}$, da in diesem Fall (Abb. 8)

$$\Omega = 4\pi$$

ist. Wir erhalten sofort eine Verallgemeinerung, wenn das Feld von mehreren Ladungen erzeugt wird, da die Projektion des resultierenden Feldes auf die

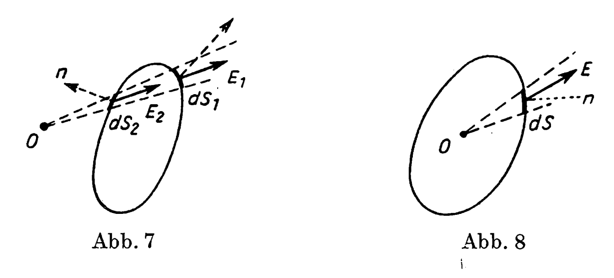


Abb. 7 Abb. 8

Normale die algebraische Summe der Projektionen der Feldkomponenten ist. Wir sehen also, daß der Fluß sich algebraisch addiert, und können formulieren:

Theorem von GAUSS: *Der Fluß eines elektrischen Feldes durch eine geschlossene Fläche, die eine Gesamtladung q umschließt, hat den Wert*

$$\Phi = \frac{4\pi q}{\varepsilon_0}.$$

Anwendungen des GAUSSschen Theorems

Wir wollen zuerst die *Kraftlinien* eines elektrischen Feldes definieren, da uns dieser Begriff im folgenden sehr nützlich sein wird. Wir nennen die Kurve eine *Kraftlinie*, bei der für jeden Punkt des Feldes ihre Tangente mit der Richtung des Feldvektors zusammenfällt. Die Kraftlinien sind also die orthogonalen Trajektorien der Äquipotentialflächen. Wenn E_x, E_y und E_z die Projektionen des Feldvektors auf die Achsen Ox, Oy, Oz sind, dann stellen die Gleichungen der Kraftlinien die Lösungen folgenden Gleichungssystems dar:

$$\frac{dx}{E_x} = \frac{dy}{E_y} = \frac{dz}{E_z}.$$

Nach dieser Feststellung wollen wir einige Konsequenzen des GAUSSschen Theorems betrachten.

Theorem: *Das zu einem System elektrischer Ladungen gehörige Potential kann in keinem Punkt des Raumes einen Extremwert annehmen, außer in den Ladungen selbst.*

Nehmen wir an, P sei ein Punkt eines Raumes, in dem sich keine Ladung befindet, und das Potential habe in P seinen größten Wert V. Dann können wir eine Äquipotentialfläche $V - \varepsilon$ angeben, die P vollständig umschließt, da das Potential von P aus nach allen Richtungen abnimmt. Der durch die Fläche austretende Fluß hat den Wert

$$\Phi = \int E_n \, d\,S = \int E \, d\,S,$$

da der Feldvektor senkrecht auf der Äquipotentialfläche steht. Da die Richtung des Vektors in Richtung der Potentialabnahme verläuft, tritt der Vektor von innen nach außen durch die Fläche. Das Flußelement $E dS$ ist also in jedem Fall positiv, unabhängig davon, welches Flächenelement dS wir betrachten. Folglich ist auch der Gesamtfluß positiv.

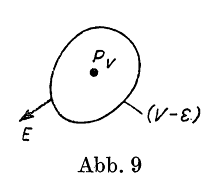


Abb. 9

Nun ist aber nach dem Gaussschen Theorem $\Phi = 0$, denn der Punkt P besitzt keine Ladung. Die aufgestellte Hypothese ist also zum Widerspruch geführt, das Potential hat keinen maximalen Wert in P. Bleiben wir weiter bei dieser Hypothese, daß es sich um ein absolutes und nicht um ein relatives Maximum handele. Wenn wir z. B. beim Studium der Potentialverteilung in einer Ebene ein Maximum finden, brauchen wir nicht zu folgern, daß das Theorem falsch ist. Ein ausführlicheres Studium würde uns zeigen, daß das Potential anwächst, wenn wir auch die Punkte außerhalb der Ebene betrachten.

Die gleiche Überlegung kann auch angestellt werden, wenn ein Potentialminimum in P angenommen wird.

Die Kraftlinien stehen senkrecht auf den Äquipotentialflächen und verlaufen nach dem vorangegangenen Theorem von den positiven Ladungen zu den negativen Ladungen. Tritt ein Überschuß an Ladungen eines Vorzeichens auf, so können bestimmte Kraftlinien bis ins Unendliche verlaufen.

Poissonsche Gleichung

Es sei ein Vektor $\mathfrak{H}$ mit den Komponenten H_x, H_y, H_z gegeben. Wir nennen den skalaren Ausdruck

$$\frac{\partial}{\partial x}(H_x) + \frac{\partial}{\partial y}(H_y) + \frac{\partial}{\partial z}(H_z)$$

die *Divergenz* dieses Vektors und schreiben sie in der Form $\operatorname{div}\mathfrak{H}$. Dieser Ausdruck ist in bezug auf eine Vertauschung der Koordinatenachsen invariant. Wir können ihm also einen physikalischen Sinn zuschreiben.

Betrachten wir ein kleines Parallelepiped mit den Seiten dx, dy, dz in einem elektrischen Feld E und berechnen den aus der Fläche dieses Parallelepipeds austretenden Fluß (Abb. 10).

Der Gesamtfluß des Feldes $\mathfrak{E}$ ist die Summe seiner Projektionen auf die Koordinatenachsen. E_y gibt uns den Fluß durch die senkrecht zu $O\,y$ stehenden Seiten an. Der Fluß durch diese Seiten, der von E_x und E_y herrührt, wird verschwinden.

Um unsere Vorstellung zu präzisieren, nehmen wir an, daß E_y positiv sei, dann ist der in das Parallelepiped eintretende Fluß $E_y\,(x, y, z)\,dxdz$ und der austretende Fluß $E_y\,(x, y + dy, z)\,dxdz$.

Der resultierende Fluß ergibt sich also zu

$$[E(x, y + dy, z) - E(x, y, z)]\, dx dz.$$

Formt man diesen Ausdruck mit Hilfe des Mittelwertsatzes um, so erhält man

$$\left[dy \frac{\partial E_y}{\partial y}\right] dx\, dz = \frac{\partial E_y}{\partial y}\, dx\, dy\, dz.$$

Analog ist der Fluß, der durch die senkrecht zu Ox und Oz stehenden Flächen austritt, durch die Ausdrücke

$$\frac{\partial}{\partial x}(E_x)\, dx\, dy\, dz \quad \text{und} \quad \frac{\partial}{\partial z}(E_z)\, dx\, dy\, dz$$

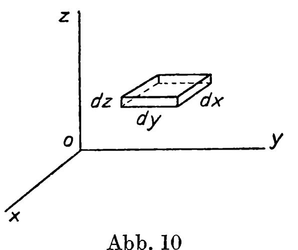


Abb. 10

gegeben. Der Gesamtfluß, der aus dem Parallelepiped austritt, hat also die Form

$$\Phi = \left[\frac{\partial}{\partial x}(E_x) + \frac{\partial}{\partial y}(E_y) + \frac{\partial}{\partial z}(E_z)\right] dx\, dy\, dz = (\operatorname{div} \mathfrak{E})\, dx\, dy\, dz.$$

Versuchen wir, durch Anwendung des GAUSSschen Theorems für diesen Fluß einen anderen Ausdruck zu finden. Wir werden *Ladungsdichte pro Volumeneinheit* das Verhältnis $\varrho = \frac{dq}{dv}$ nennen, wobei dq die von einem Volumenelement dv getragene Ladung ist. In einem Punkt ohne Ladung ist die so definierte Ladungsdichte Null.

Erinnern wir uns jetzt unseres anfänglichen Parallelepipeds. Nach dem GAUSSschen Theorem ist der austretende Fluß gegeben durch

$$\Phi = \frac{4\pi}{\varepsilon_0}\, \varrho\, dv,$$

wobei dv das Volumen, d.h. $dxdydz$ ist.

Wenn wir diese beiden so gefundenen Ausdrücke für den Fluß gleichsetzen, erhalten wir die *POISSONsche Gleichung*

$$\operatorname{div} \mathfrak{E} = \frac{4\pi\varrho}{\varepsilon_0}.$$

Diesen Ausdruck können wir auch in einer anderen Form darstellen. Das elektrische Feld $\mathfrak{E}$ wird von einem Potential V abgeleitet, d. h.

$$E_x = -\frac{\partial V}{\partial x}; \quad E_y = -\frac{\partial V}{\partial y}; \quad E_z = -\frac{\partial V}{\partial z}.$$

Folglich ist

$$\operatorname{div} \mathfrak{E} = -\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 V}{\partial z^2}.$$

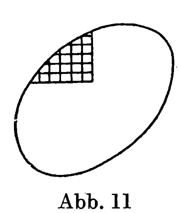
Den Ausdruck $\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2}$ nennt man *LAPLACEschen Operator* in V und stellt ihn durch das Symbol ΔV dar. Wir können folglich die POISSONsche Gleichung in der Form

$$\Delta V + \frac{4\pi\varrho}{\varepsilon_0} = 0$$

ausdrücken.

Anwendung auf eine beliebige geschlossene Fläche

In das durch diese Fläche begrenzte Volumen können wir kleine Parallelepipede einbeschreiben, wie wir eben eines betrachtet haben. Wir berechnen dann den durch die Fläche tretenden Fluß wie oben. Der resultierende Fluß entspricht dann dem, der durch die äußere Grenzfläche der das Volumen bildenden Parallelepipede austritt. Wenn wir eine Fläche betrachten, die zu zwei Parallelepipeden gehört, so sind die positiven Richtungssinne für die beiden Elemente einander entgegengesetzt, wodurch der Fluß durch diese Fläche verschwindet. Nun ist der Fluß durch die Gesamtfläche der gleiche wie der Fluß durch die Begrenzungsfläche des Ensembles der kleinen Parallelepipede, wie aus dem GAUSSschen Theorem hervorgeht. (Tatsächlich gibt es zwischen diesen beiden Flächen keine Ladungen, oder die Ladungen sind unendlich klein und daher zu vernachlässigen.) Den Fall, in dem eine Oberflächenladung vorhanden ist, können wir für den von uns beabsichtigten Zweck ausschließen. Bei einer sehr großen Anzahl von Parallelepipeden erhalten wir durch Grenzübergang den Ausdruck


Abb. 11

$$\iint E_n\, dS = \iiint \operatorname{div} \mathfrak{E}\, dx\, dy\, dz.$$

Dieser mathematische Lehrsatz ist unter dem Namen GREENscher Satz bekannt.

Potentialbetrachtungen

Es seien drei positive elektrische Einheitsladungen A, B und C an den drei Ecken eines gleichseitigen Dreiecks angebracht. Diese Ladungen erzeugen in dem Raum ein elektrisches Feld und ein Potential. Wir werden sehen, was sich in der Ebene der Ladungen und vor allem auf der inneren Winkelhalbierenden des Winkels BAC ereignet.

Das System besitzt drei Symmetrieachsen, die die Winkelhalbierenden des Dreiecks sind. Dabei sind die physikalischen Werte auf diesen drei Winkelhalbierenden die gleichen.

Wir wollen nun das Feld auf der Winkelhalbierenden AG in Richtung von A nach G betrachten und es graphisch als Funktion der Höhe darstellen (siehe Abb. 12). Im Unendlichen hat das Feld den Wert Null; je mehr wir uns dem Punkt A nähern, um so mehr wächst es an, und in A selbst wird es unendlich groß und ändert seinen Sinn.

Danach nimmt der absolute Wert des Feldes ab, und die durch B und C hervorgerufenen Felder üben einen wachsenden Einfluß aus.

Im Schwerpunkt G des Dreiecks sind die Felder aller drei Ladungen gleich. Wenn wir die drei Felder überlagern, dann sehen wir, daß das resultierende Feld in G verschwindet, wie es nach den obigen Symmetriebemerkungen zu erwarten war.

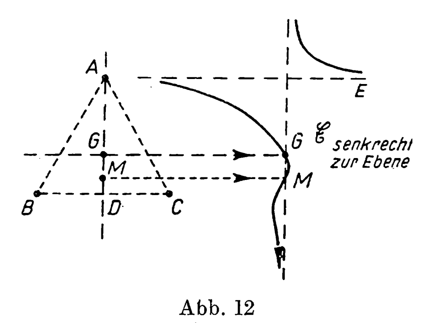


Abb. 12

Um die Kurvenform in der Nähe von G genauer zu bestimmen, benutzen wir die drei Achsen des rechtwinkligen Koordinatensystems Gx, Gy und Gz und berechnen das Potential in einem Punkt P:

$$V = \frac{1}{PA} + \frac{1}{PB} + \frac{1}{PC}\,.$$

Wir setzen $AG = a$. Uns interessiert nun das Feld für einen Punkt nahe G. Wir entwickeln dazu V in eine Reihe für den Punkt x, y, z, wobei $x, y, z \ll a$ seien. Wir erhalten dann

$$V = \frac{3}{a} + \frac{3}{4a^3}(x^2 + y^2 - 2z^2) + \cdots;$$

$$E_y = -\frac{dV}{dy} = -\frac{3y}{2a^3}\,.$$

Das Feld wechselt also in G seinen Sinn. Wenn wir den Punkt D überschreiten, hat es die Richtung Gy. Zwischen G und D, im Punkt M, dessen Abstand sich zu $0{,}285\,a$ berechnet, wird es wieder Null. In diesem Punkt und im Punkt G ist eine punktförmige elektrische Ladung im Gleichgewicht. Wir haben in G ein stabiles Gleichgewicht, wenn die Ladung ihre Bewegungen nur in der Ebene ausführen kann und positiv ist. Für diesen Fall erhalten wir für die andere Lage ein instabiles Gleichgewicht.

Dies gilt entsprechend für BG und CG.

Betrachten wir nun die gesamte Ebene. In der Nähe der Ladungen A, B und C ist die Wirkung dieser Ladungen von ausschlaggebender Bedeutung. Die Äquipotentiallinien sind nahezu Kreise. In weiterer Entfernung verlängern sich die Äquipotentialkreise nach G hin. Der Einfluß der beiden anderen Ladungen wird um so größer, je weiter man sich ihnen nähert.

Es gibt eine singuläre Äquipotentiallinie, die durch Gleichgewichtspunkte verläuft, die aus Symmetriegründen den gleichen Potentialwert besitzen. Diese Linie hat drei Schnittpunkte mit sich selbst, in denen das Feld Null ist, da die

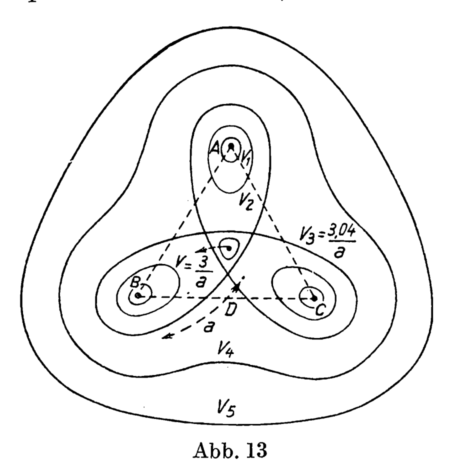


Abb. 13

Tangenten in ihnen aufeinander senkrecht stehen. Man findet, daß das Potential auf dieser Linie den Wert

$$\frac{3{,}017}{a}$$

hat. In G selbst hat das Potential den Wert $3/a$. Wenn man *nur Verschiebungen in der xy-Ebene* vornimmt, hat V in G ein Minimum, da $\delta V = \frac{3}{4a^3}(x^2 + y^2)$ ist. Dies ist jedoch kein *absolutes* Minimum, da man nämlich beim Austritt aus dieser Fläche einen zusätzlichen Term $-\frac{3}{4a^3} 2z^2$ erhält. Dieser zusätzliche Term ist notwendig, damit die Gleichung $\Delta V = 0$ erfüllt ist, denn in der Nähe von G ergibt sich

$$\frac{3}{4a^3}(2 + 2 - 4) = 0 .$$

Die Äquipotentiallinien nähern sich mehr und mehr der Kreisform, je weiter man sich von dem gesamten Ladungssystem entfernt.

Wir betrachten jetzt weitere Konsequenzen des Gaussschen Theorems.

Elektrisches Feld für eine Kugel mit gleichmäßiger Ladungsverteilung

Theorem I: *Das Feld, das von einer Kugel mit gleichförmiger Ladungsverteilung aufgebaut wird, ist in einem außerhalb der Kugel liegenden Punkt das gleiche, als wäre die gesamte Ladung im Kugelmittelpunkt vereinigt.*

Betrachten wir nun das Feld, das durch eine Kugel mit gleichförmiger Ladungsverteilung in einem Punkt P des Raumes aufgebaut wird. Aus Sym-

metriegründen sind die Äquipotentialflächen wieder Kugeln mit dem Mittelpunkt O, und auf jeder Fläche hat das Feld in allen Punkten den gleichen absoluten Wert.

Betrachten wir die Äquipotentialfläche (S), die durch P verläuft. E sei das Feld in P. Es steht senkrecht auf der Kugelfläche (S) und hat die Richtung des Radius. Wir wollen den Kraftfluß durch diese Fläche (S) berechnen. Nach der gleichen Definition ist $\Phi = E\,4\pi r^2$, wobei r der Abstand zwischen O und P ist. Nach dem GAUSSschen Theorem ist $\Phi = \frac{4\pi q}{\varepsilon_0}$, wobei q die Ladung der Kugel bedeutet.

Setzen wir diese beiden Ausdrücke gleich, so erhalten wir $E = \frac{q}{\varepsilon_0 r^2}$. Dies ist das COULOMBsche Gesetz für eine Ladung q im Mittelpunkt der Kugel.

Theorem II: *Das Feld in einem Punkt innerhalb einer Kugel mit homogener Ladungsverteilung auf der Oberfläche ist Null.*

Wählen wir einen Kegelausschnitt mit dem Scheitelpunkt P und dem Raumwinkel $d\Omega$. Dadurch erhalten wir zwei Flächenelemente dS_1 und dS_2 der Kugel mit den Mittelpunkten A_1 und A_2 (Abb. 14). Es sei Θ der Winkel zwischen der Achse des Elementarkegels und OA_1, entsprechend auch zwischen PA_2 und OA_2. Wenn wir mit $d\Sigma_1$ und $d\Sigma_2$ die Projektionen von dS_1 und dS_2 auf die Ebenen senkrecht zur Kegelachse bezeichnen, die durch A_1 bzw. A_2 verläuft, dann ist

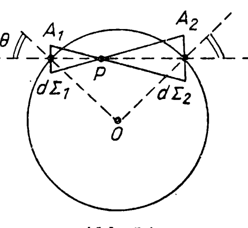


Abb. 14

$$dS_1 = \frac{d\Sigma_1}{\cos\Theta} \quad \text{und} \quad dS_2 = \frac{d\Sigma_2}{\cos\Theta},$$

da Θ außerdem der Winkel zwischen den Tangentialebenen der Kugel in A_1 und A_2 und den Ebenen ist, die zur Kegelachse senkrecht stehen.

Das Feld des Flächenelementes dS_1 hat in P den Wert

$$E_1 = \frac{1}{\varepsilon_0}\,\sigma\,\frac{d\Sigma_1}{\cos\Theta}\cdot\frac{1}{\overline{A_1P}^2} = \frac{\sigma}{\varepsilon_0\cos\Theta}\,d\Omega$$

und ist entlang A_1A_2 entsprechend dem Vorzeichen der Gesamtladung in dem einen oder dem anderen Sinn gerichtet. Das Feld, das von dS_2 aufgebaut wird, ist zu $\mathfrak{E}_1$ entgegengesetzt gerichtet und hat den absoluten Wert

$$E_2 = \frac{1}{\varepsilon_0}\,\sigma\,\frac{d\Sigma_2}{\cos\Theta}\,\frac{1}{\overline{A_2P}^2} = \frac{\sigma}{\varepsilon_0\cos\Theta}\,d\Omega.$$

Daraus folgt, daß

$$\mathfrak{E}_1 + \mathfrak{E}_2 = 0.$$

Man kann also je zwei Kugelelemente so zusammensetzen, daß das resultierende Feld in P verschwindet.

Dies ist eine Folgerung aus dem COULOMBschen Gesetz. Da das Feld einer punktförmigen Ladung von der Form $\frac{k}{r^2}$ ist, können wir durch Einführung eines

Raumwinkels die Flächenelemente und ihre Entfernungen vom Punkt P herausheben.

Es ist leicht zu zeigen, daß umgekehrt diese Eigenschaft, als Hypothese betrachtet, das COULOMBsche Gesetz als notwendige Folgerung ergibt. Die experimentelle Bestätigung dieser Eigenschaft ist der beste experimentelle Beweis des COULOMBschen Gesetzes.

Elektrisches Feld eines Punktes auf der Symmetrieachse einer runden Scheibe mit gleichmäßiger Ladungsverteilung

Wir wollen dieses Feld auf zwei Arten berechnen. Einmal kann man das COULOMBsche Gesetz anwenden, zum anderen von der Potentialberechnung ausgehen und dann das Feld einführen. Wir werden nacheinander beide Methoden benutzen.

1. P sei der Punkt auf der Achse, in dem wir das Feld berechnen wollen. Wir zerlegen die Scheibe in kleine Flächenelemente, für die jeweils das COULOMBsche Gesetz gilt. Wir bilden dann die Resultante der Einzelfelder. Nun betrachten wir ein kleines Flächenelement der Scheibe zwischen den Radien r und $r + dr$ und den Winkeln Θ und $\Theta + d\Theta$. Die Fläche dieses Elementes ist gegeben zu $r dr d\Theta$. Die Ladung des Elementes ist also, wenn σ die Flächendichte darstellt, gegeben durch

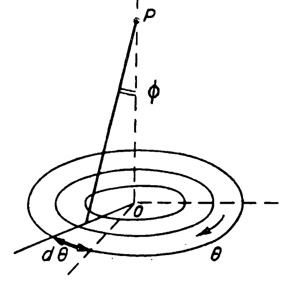


Abb. 15

$$\sigma r \, dr \, d\Theta .$$

Nach dem COULOMBschen Gesetz ist das Feld, das in P durch diese Elementarladung hervorgerufen wird:

$$dE = \frac{1}{\varepsilon_0} \frac{\sigma r \, dr \, d\Theta}{r^2 + x^2} ;$$

x ist dabei die Entfernung vom Scheibenmittelpunkt bis zum Punkt P und verläuft in Richtung zum Punkt P (Abb. 15).

Fügen wir dem betrachteten Element das zu ihm in bezug auf O symmetrische Element hinzu. Dieses letztere ruft in P ein Feld der gleichen Intensität wie das erste, jedoch symmetrisch in bezug auf Ox, hervor. Die Komponenten dieser Felder senkrecht zu Ox heben sich auf, während sich die Komponenten in Ox-Richtung addieren. Wir können also wieder je zwei Elemente der Scheibe zusammensetzen. Es ergibt sich, daß das Feld in der Ox-Richtung verläuft. Folglich interessiert uns nur die Komponente dE_x entlang Ox. Sie hat den Wert $dE \cdot \cos\Phi$, wobei Φ den Winkel zwischen der Geraden, die P mit dem Mittelpunkt des Flächenelementes verbindet, und Ox bedeutet,

$$\cos\Phi = \frac{x}{\sqrt{x^2 + r^2}} .$$

Daraus folgt

$$dE_x = \frac{1}{\varepsilon_0} \frac{x \sigma r \, dr \, d\Theta}{(r^2 + x^2)^{3/2}} .$$

Wenn nun R der Radius der Scheibe ist, dann gilt

$$E = \frac{\sigma \cdot x}{\varepsilon_0} \int_{\Theta=0}^{2\pi} \int_{r=0}^{R} \frac{r\,dr\,d\Theta}{(r^2 + x^2)^{3/2}} = \frac{\pi \sigma x}{\varepsilon_0} \int_0^R \frac{2\,r\,dr}{(r^2 + x^2)^{3/2}} .$$

Wir erhalten also mit $r^2 = u$; $2rdr = du$:

$$E = \frac{\pi \sigma x}{\varepsilon_0} \int_0^{R^2} \frac{du}{(u + x^2)^{3/2}} = -\frac{2\pi\sigma x}{\varepsilon_0} \left[\frac{1}{(u + x^2)^{1/2}}\right]_0^{R^2} = \frac{2\pi\sigma x}{\varepsilon_0} \left[\frac{1}{x} - \frac{1}{\sqrt{R^2 + x^2}}\right];$$

$$E = \frac{2\pi\sigma}{\varepsilon_0} \left[1 - \frac{x}{\sqrt{R^2 + x^2}}\right].$$

2. Betrachten wir den Kreisring zwischen den Radien r und $r + dr$, so finden wir die Ladung dieses Kreisringes zu $2\pi\sigma r dr$, und das von ihr in P erzeugte Potential hat den Wert

$$dV = \frac{1}{\varepsilon_0} \frac{2\pi\sigma r\,dr}{\sqrt{r^2 + x^2}}.$$

Das Potential in P ist also

$$V = \frac{\pi\sigma}{\varepsilon_0} \int_0^R \frac{2\,r\,dr}{\sqrt{r^2 + x^2}} = \frac{2\pi\sigma}{\varepsilon_0} \left(\sqrt{R^2 + x^2} - x\right)$$

und bis auf eine Konstante bestimmt, die keine physikalische Bedeutung hat und gleich Null gesetzt werden kann, da im Unendlichen für die Scheibe keine Ladungen existieren.

Das Feld in P lautet

$$H = -\frac{dV}{dx} = \frac{2\pi\sigma}{\varepsilon_0} \left(1 - \frac{x}{\sqrt{R^2 + x^2}}\right).$$

Wir lassen nun x gegen Null gehen, d.h. $P \to 0$. Dann geht H_x gegen $2\pi\sigma/\varepsilon_0$. In der Nähe der Scheibenoberfläche hängt das Feld also nicht mehr von x ab und besitzt den konstanten Wert $2\pi\sigma/\varepsilon_0$. Das Potential muß unter diesen Bedingungen von der Form

$$V = C - \frac{2\pi\sigma x}{\varepsilon_0}$$

sein, was leicht nachzuprüfen ist.

Das Feld verläuft in Richtung abnehmender Potentiale. Wenn σ positiv ist, verläuft das Feld entlang OP, und das Potential nimmt ab, wenn man sich auf der Achse OP von O entfernt.

Elektrostatische Einheiten

Die elektrischen Größen Ladung, Potential und Feldstärke werden in bestimmten Einheiten gemessen. Dabei versucht man grundsätzlich, diese Einheiten so zu definieren, daß die formelmäßigen Gesetze von einfacher Form sind.

Man nennt ein System von elektrostatischen Einheiten *kohärent*, wenn der Koeffizient, der im COULOMBschen Gesetz auftritt, gleich 1 wird. Dieses Gesetz schreibt sich dann

$$K = \frac{e e'}{r^2}.$$

Wir wählen für die Längen- und Krafteinheiten die Einheiten des CGS-Systems und erhalten damit das *elektrostatische CGS-System. In diesem System ist die Einheit der Ladung die Ladungsmenge, die, punktförmig angenommen, auf eine gleich große im Abstand von 1 cm mit der Kraft von 1 dyn wirkt.* Diese Einheit besitzt keine besondere Bezeichnung.

Wenn wir in einem elektrischen Feld eine Ladung q haben, ist die effektive Arbeit der elektrischen Kräfte gegeben durch

$$A = q V,$$

wenn die Ladung q eine Potentialdifferenz V überwindet.

Daraus ergibt sich, *daß die elektrostatische CGS-Einheit der Potentialdifferenz die Potentialdifferenz ist, die mit einer Einheitsladung eine Arbeit von 1 erg frei werden läßt.* Diese Einheit ist ebenfalls ohne Bezeichnung.

Es gibt ein weiteres System von elektrostatischen Einheiten, das häufig verwendet wird, das GIORGIsche System, das den technischen Größen angepaßt ist. Wir werden uns hier auf das CGS-System und seine Einheiten beschränken.

Die praktische Einheit der Elektrizitätsmenge ist das *Coulomb*, das $3 \cdot 10^9$ elektrostatische CGS-Einheiten beträgt. Die Einheit der Potentialdifferenz ist das Volt, welches einem Wert von 1/300 elektrostatischen CGS-Einheiten entspricht. Die von der Ladungseinheit 1 Coulomb beim Durchlaufen einer Potentialdifferenz von 1 Volt geleistete Arbeit beträgt 10^7 erg = 1 Joule.

Wir wollen noch erwähnen, daß das Coulomb eine sehr große elektrostatische Einheit darstellt. Wenn wir zwei Ladungen von je 1 Coulomb in einer Entfernung von 1 m voneinander betrachten, so stoßen sich diese mit einer Kraft von $9 \cdot 10^{14}$ dyn ab.

Bemerkungen über die Natur der Ladungen

Wir wissen, daß das Atom aus einem positiv geladenen Kern besteht, um den die negativen Elektronen kreisen, so daß die Gesamtladung des Atoms Null beträgt. Unter gewissen Umständen können diese Elektronen befreit werden. In den Bereichen, in denen sich die freien Elektronen befinden, beobachtet man das Auftreten von negativ geladenen Körpern, während die von den Elektronen verlassenen Bereiche positiv geladen erscheinen.

Wir wollen jetzt einige Angaben über das Elektron machen: Seine Masse beträgt 1/1840 der Masse des Wasserstoffatoms, d.h. $9 \cdot 10^{-28}$ g. Sein Radius beträgt ungefähr $2 \cdot 10^{-13}$ cm, d.h., er liegt in der Größenordnung von 1/100000 des Atomdurchmessers. Ein Gramm Elektronen würde ein Volumen von nur $7 \cdot 10^{-11}$ cm^3 einnehmen und eine sehr beträchtliche Elektrizitätskonzentration darstellen. Die Ladung eines Elektrons beträgt $4{,}8 \cdot 10^{-10}$ elektrostatische CGS-Einheiten.

Bringt man zwei Elektronenmassen von je einem Gramm in einem Abstand von 1 m an, so stoßen sich diese mit einer Kraft von $3 \cdot 10^{22}$ Tonnen ab. Die aus der Gravitation resultierenden Anziehungskräfte sind dieser Kraft gegenüber verschwindend klein. Das Verhältnis der Abstoßungskraft zu der der Anziehungskraft beträgt tatsächlich etwa $4{,}2 \cdot 10^{42}$.

Es tritt nun folgende Frage auf: Gewinnt ein elektrisierter Körper an Gewicht? Betrachten wir z.B. ein Gramm Gold. Wir hämmern es zu einem dünnen Blättchen aus, um mehr Ladung aufbringen zu können. Die Oberfläche kann bis zu 1 m^2 erreichen und eine Ladung von 60000 elektrostatischen Ladungseinheiten aufnehmen. Für diesen Fall hat sich das Gewicht nur um 10^{-13} g vergrößert, um einen Betrag also, der nicht meßbar und vernachlässigbar ist.

Bis jetzt haben wir die allgemeinen Theorien der Elektrostatik nur auf feste Ladungen angewendet; sie sind jedoch auch für bewegliche Ladungen gültig.

So ist zum Beispiel die Bewegungsgleichung für ein freies Elektron in einem elektrischen Feld E gegeben durch

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} = eE.$$

Dabei ist e die Elementarladung des Elektrons.

Die kinetische Energie beträgt $\frac{1}{2} mv^2$. Wenn das Elektron eine Potentialdifferenz $V_2 - V_1$ durchläuft, so gilt

$$\frac{1}{2} mv^2 = e(V_2 - V_1).$$

Wir werden später sehen, daß der elektrische Strom sich als eine Elektronenbewegung herausstellt. Die Stromstärke ist gegeben durch $\frac{dq}{dt}$, d.h. die Ladung, die sich während einer sehr kurzen Zeit verschiebt. Die Stromdichte ist durch das Verhältnis der Stromstärke zum Querschnitt des Stroms gegeben.

Wenn ϱ die Ladungsdichte pro Volumeneinheit und u die Geschwindigkeit der Elektronen bedeuten, dann beträgt die Stromdichte $\varrho \cdot u$. Diese Begriffe werden in der Elektrokinetik verwendet.

Eine wichtige Bemerkung

Obgleich ein Elektron, das seine Geschwindigkeit verloren hat, einer Kraftlinie zu folgen beginnt, hängt doch die Trajektorie im allgemeinen nicht mit den Kraftlinien des Feldes zusammen. Um dies zu zeigen, erinnern wir uns der KEPLERschen Bewegung: Ein Elektron mit einer Anfangsgeschwindigkeit beschreibt um ein Ladungszentrum eine Ellipse, wie dies die Planeten um die Sonne tun, während die Kraftlinien Radiusvektoren vom Zentrum aus sind.

II. KAPITEL

Allgemeine Eigenschaften des elektrischen Leiters

Leiter und Isolatoren

Die grundlegenden Experimente der Elektrisierung gelingen nicht an allen Körpern. Reibt man bestimmte Materialien, so bildet sich eine elektrische Ladung nur in dem geriebenen Bereich. Man nennt diese Körper *Isolatoren* oder *Dielektrika*. Beispiele dafür sind Glas, Hartgummi, Harz, Bernstein, Schwefel u.a. Im Gegensatz dazu ist es bei vielen anderen Körpern unmöglich, eine Elektrisierung zu erreichen, solange man sie in der Hand hält. Hält man diese Körper dagegen isoliert, so stellt man fest, daß sich beim Reiben die auftretenden Ladungen über die gesamte Oberfläche verteilen. Solche Körper nennt man *elektrische Leiter*. In diese Kategorie gehören die Metalle. Die Bewegung der Ladungen dauert im Prinzip nur solange an, bis sich ein Gleichgewichtszustand eingestellt hat. Ist dieser Zeitraum sehr kurz und nicht meßbar, so spricht man von einem guten Leiter.

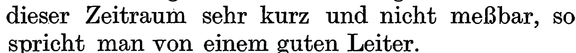


Abb. 16

Die Unterscheidung zwischen Leiter und Isolator ist allerdings relativ und nur eine Frage des Wertes der Leitfähigkeit, nicht dagegen ein prinzipieller Unterschied der Eigenschaften.

Experiment. Wir stellen eine Verbindung zwischen einer Kupferkugel, die auf einem isolierenden Fuß steht und die wir mit einem Katzenfell reiben, und einem Goldblattelektrometer her. Wir verbinden die beiden zuerst mit einem Hanffaden und dann mit einem Kupferdraht. Dann können wir beobachten, daß sich das Blatt des Elektrometers bei einer Verbindung mit dem Hanffaden erst nach Sekunden abspreizt, während bei einer Verbindung durch den Kupferdraht die Abspreizung sofort erfolgt. Das Kupfer ist also ein guter, das Hanf dagegen ein schlechter Leiter (Abb. 16).

Prinzip der Erhaltung der Elektrizität

Ist ein System von Körpern gegen den Raum isoliert, so bleibt seine Gesamtladung konstant.

In einem solchen System kann man wohl die Verteilung der Ladungen, nicht jedoch ihre algebraische Summe verändern. Wenn es z.B. gelingt, auf einem neutralen isolierten Körper eine Ladung zu erzeugen, so tritt auch eine gleiche Ladung mit entgegengesetztem Vorzeichen auf.

Gleichgewicht des Leiters

Die Verschiebung der Ladungen in einem Leiter erfolgt ohne Widerstand. Damit ist jedoch nicht gesagt, daß keine Reibung existiert, die sich dieser Bewegung widersetzt. Diese Reibung existiert wohl (sie stellt sich durch den Jouleschen Effekt des elektrischen Stromes dar), aber sie ist viskos, d.h., sie wird mit größerer

Geschwindigkeit kleiner. *Wenn der Gleichgewichtszustand erreicht ist, sind die Elektronen keiner Kraft mehr unterworfen.*

Folgerungen: 1. *Das elektrische Feld im Innern eines im Gleichgewichtszustand befindlichen elektrisierten Leiters ist Null.* Wäre dies nicht der Fall, so würden die inneren Ladungen weiter in Bewegung bleiben und sich kein Gleichgewicht einstellen.

2. *Das elektrische Feld steht senkrecht zur Oberfläche eines im Gleichgewicht befindlichen elektrisierten Leiters.* Wäre dies nicht so, dann hätte das Feld eine Tangentialkomponente, und die Ladungen würden sich auf der Oberfläche des Leiters verschieben.

Daraus folgt also, daß *die Oberfläche eines im Gleichgewicht befindlichen Leiters eine Äquipotentialfläche ist.*

Das elektrische Feld in der Nähe eines Leiters. Theorem von Coulomb

Ein Flächenelement dS der Oberfläche eines elektrisierten Leiters befinde sich im Gleichgewicht und trage eine Ladung σdS, wobei σ die Flächendichte darstellt. Wir betrachten nun die geschlossene Fläche, die gebildet wird durch die auf der Umrandung des Flächenelementes dS senkrecht stehenden Kraftlinien, eine beliebige Fläche AEB im Inneren des Leiters und einen Querschnitt CD aus der durch die Kraftlinien gebildeten geschlossenen Fläche parallel zum Leiter und an diesen angrenzend. Wir berechnen den durch diese Fläche austretenden Kraftfluß. Der Fluß durch die Fläche AEB ist Null, da das Feld im Innern eines im Gleichgewichtszustand befindlichen elektrisierten Leiters verschwindet. Der Fluß durch die Wände der betrachteten Kraftlinienröhre ist Null, da das Feld zu diesen Wänden parallel verläuft. Das Flächenelement dS wird senkrecht vom Feld durchsetzt, also auch CD:

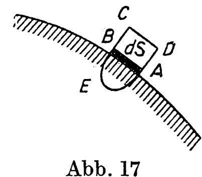


Abb. 17

$$d\Phi = E dS.$$

Nun gilt nach dem Gaussschen Theorem

$$d\Phi = 4\pi\sigma dS.$$

Daraus folgt

$$E = 4\pi\sigma.$$

Die allgemeinere Form dieser Gleichung unter Berücksichtigung des Faktors ε_0 aus dem Anziehungsgesetz lautet

$$E = \frac{4\pi\sigma}{\varepsilon_0}.$$

Dies ist das Coulombsche Theorem.

Nun besteht offensichtlich ein Widerspruch zu den Ergebnissen, die wir bei Betrachtung eines Feldes erhielten, das durch eine Ladungsverteilung auf einer runden Scheibe aufgebaut wurde. Dort ergab sich

$$E = \frac{2\pi\sigma}{\varepsilon_0}.$$

Dies besagt, daß entferntere Ladungen bei einem elektrischen Leiter eine ebenso wichtige Rolle spielen wie die Ladung des Flächenelementes dS und daß die Ladungsverteilung auf der Fläche des Leiters keineswegs willkürlich ist, sondern im Gegenteil genau den Anforderungen des COULOMBschen Theorems entspricht.

Elektrostatischer Druck

Wir haben soeben das Feld in der Nachbarschaft eines elektrisierten Leiters im Gleichgewicht betrachtet. Nun wollen wir die auf ein Flächenelement des Leiters von den anderen auf der Oberfläche des Leiters verteilten Ladungen ausgeübte Kraft berechnen.

Betrachten wir also das Flächenelement dS mit der Flächenladung σdS und die symmetrisch zu diesem Flächenelement und dicht beieinanderliegenden Punkte A und B. B liege im Innern des Leiters.

Das Feld in A sei die Resultante h_1 des zu dS gehörenden Feldes, und h_2 sei die Resultante aller anderen Ladungen des Leiters. Nach dem COULOMBschen Theorem ist die rechte Seite $4\pi\sigma$, wir haben also



$$h_1 + h_2 = 4\pi\sigma. \qquad (1)$$

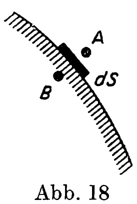


Abb. 18

Die gleichen Betrachtungen kann man für B anstellen. A und B waren nach Voraussetzung unmittelbar benachbart. Das von den Ladungen außerhalb dS aufgebaute Feld ist wiederum h_2, das durch die Ladung von dS herrührende Feld dagegen ist aus Symmetriegründen $-h_1$. B lag im Innern des Leiters, also ist dort das Feld Null. Wir erhalten somit

$$h_2 - h_1 = 0. \qquad (2)$$

Die Gleichungen (1) und (2) geben uns für das Feld der auf der Oberfläche des Leiters verteilten Ladungen andere Werte als die Gleichung für das betrachtete Flächenelement:

$$h_2 = 2\pi\sigma.$$

Die auf das Flächenelement ausgeübte Kraft ist demnach

$$dk = h_2 \sigma dS = 2\pi\sigma^2 dS.$$

Wir stellen fest, daß diese Kraft immer gegen das Äußere des Leiters gerichtet ist. Wenn z.B. die Flächenladung von dS positiv ist, so ist σ ebenfalls positiv. Daher ist das Feld h_2 nach außen gerichtet, das gleiche gilt auch für die Kraft dk. Ist dagegen σ negativ, dann ist das Feld gegen das Innere des Leiters gerichtet, und die Ladung σdS ist negativ; die Kraft, die sie ausübt, ist dem Feld entgegengesetzt, d.h., sie ist nach außen gerichtet.

Elektrostatischen Druck nennt man die Kraft auf die Flächeneinheit

$$\frac{dk}{dS} = 2\pi\sigma^2.$$

Man kann die Existenz dieses elektrostatischen Druckes experimentell nachweisen.

Experiment. Tauchen wir ein Aerometer in ein isoliertes Gefäß mit Wasser. Die Leiteroberfläche wird jetzt durch die Oberfläche des Gefäßes, die Wasseroberfläche und die Oberfläche des aus dem Wasser ragenden Aerometerteils gebildet. Die Kräfte des elektrostatischen Druckes, der auf diesen letzteren wirkt, haben eine vertikale, nach oben gerichtete Resultante. Dies stellt man fest, wenn man das Wasser mit Hilfe eines WIMSHURST-Generators elektrisiert. Das Aerometer hebt sich dabei um einige Millimeter. Durch Projizieren ist diese Verschiebung gut sichtbar zu machen.

Als Anwendung berechnen wir jetzt in der klassischen Form die Kraft, die erforderlich ist, um ein Elektron in zwei Hälften zu teilen. Wir nehmen einen Radius von $2 \cdot 10^{-13}$ cm (es handelt sich dabei um die Größenordnung) und eine Ladung von $4{,}80 \cdot 10^{-10}$ elektrostatischen CGS-Einheiten an. Die Flächendichte ergibt sich also zu

$$\sigma = \frac{4{,}80 \cdot 10^{-10}}{4\pi \cdot 4 \cdot 10^{-26}} = 9{,}5 \cdot 10^{14}\ \text{CGS}$$

elektrostatischen CGS-Einheiten.

Daraus folgt für den Wert des elektrostatischen Druckes also

$$P = 5 \cdot 10^{30}\ \text{dyn/cm}^2.$$

Die auf ein Flächenelement der Oberfläche des Elektrons ausgeübte Kraft beträgt

$$df = P \cdot dS.$$

Abb. 19

Uns interessiert nun nur die Komponente der Kraft senkrecht zum Äquatorialschnitt

$$df_1 = P dS \cdot \cos\alpha;$$

α ist dabei der Winkel zwischen df und der Senkrechten auf die Diametralebene und auch zwischen der Tangentialebene an die Kugel im betrachteten Punkt und der Äquatorialebene. Daraus folgt, daß $dS \cos\alpha = d\Sigma$ die Projektion des Flächenelementes dS auf die Diametralfläche ist. Die gesuchte Kraft ist also gegeben zu

$$f = \int_{(\Sigma)} df_1 = \pi r^2 P = 2\,\pi \cdot 10^5\ \text{dyn} \approx 600\ \text{g}.$$

Änderung des Feldes längs einer Senkrechten zur Oberfläche eines Leiters

Wir haben gesehen, daß das Feld in der Nähe eines Leiters senkrecht zu dessen Oberfläche gerichtet ist und einen Wert von $4\,\pi\sigma$ hat. Wir wollen nun untersuchen, wie sich das Feld längs einer Senkrechten zum Leiter ändert.

Betrachten wir ein rechtwinkliges Koordinatensystem. Die Ebene $x\,O\,y$ sei in O tangential zur Oberfläche des Leiters und Oz die nach außen gerichtete Senkrechte (Abb. 20).

Das Potential des Leiters bezeichnen wir mit V_0; das Feld in jedem Punkt ist dann

$$E = -\frac{\partial V}{\partial n}.$$

Auf der betrachteten Senkrechten Oz ergibt sich

$$E = -\frac{\partial V}{\partial z}.$$

Um diese Veränderung zu untersuchen, müssen wir den Ausdruck $\frac{\partial^2 V}{\partial z^2}$ berechnen. In jedem Punkt erfüllt nun aber das Potential die LAPLACEsche Gleichung

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} = 0.$$

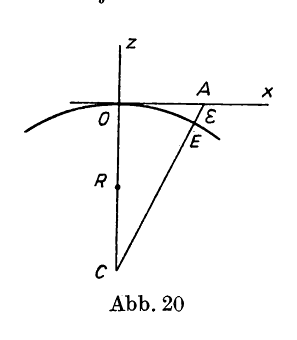


Abb. 20

Um $\frac{\partial^2 V}{\partial z^2}$ zu ermitteln, werden wir

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} \quad \text{und} \quad \frac{\partial^2 V}{\partial y^2}$$

berechnen.

Betrachten wir zuerst einen Punkt A in der Ebene xOz, der auf Ox in der Nähe von O liege. ε sei die Entfernung zwischen dem Punkt A und der Leiteroberfläche. Dann hat das Potential A bis auf kleine Größen höherer Ordnung den Wert

$$V_A = V_0 + \left(\frac{\partial V}{\partial n}\right)_0 \varepsilon + \cdots.$$

Nähern wir jetzt die Leiteroberfläche einem Kreis an, der die x-Achse in O berührt, und bezeichnen mit R_1 den Krümmungsradius dieses Kreises, dann erhalten wir

$$\varepsilon \cdot 2 R_1 = x^2,$$

woraus

$$V_A = V_0 + \frac{x^2}{2 R_1} \left(\frac{\partial V}{\partial n}\right)_0 \cdots$$

folgt. Es ergibt sich also

$$\left(\frac{\partial V}{\partial x}\right) = \frac{x}{R_1} \left(\frac{\partial V}{\partial n}\right)_0$$

und

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} = \frac{1}{R_1} \left(\frac{\partial V}{\partial n}\right).$$

Ebenso gilt

$$\frac{\partial^2 V}{\partial y^2} = \frac{1}{R_2} \left(\frac{\partial V}{\partial n}\right)$$

in der $y\,O\,z$-Ebene, wenn R_2 der Krümmungsradius des Leiters in dieser Ebene ist. Es ergibt sich dann für die z-Komponente

$$\frac{\partial^2 V}{\partial z^2} = -\left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}\right)\frac{\partial V}{\partial n}.$$

Nun wird in der Mathematik gezeigt, daß die Größe $\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}$ konstant bleibt, wenn man Ox und Oy um Oz dreht. Dieser Größe hat man die Bezeichnung *totale Krümmung* der Fläche in O gegeben. Das Endergebnis lautet also

$$\frac{\partial^2 V}{\partial n^2} = -\left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}\right)\frac{\partial V}{\partial n}.$$

Dieses Resultat wird uns später nützlich sein. Es wird uns helfen, das Verhalten der „Spitzen" zu erklären.

Spezielle Eigenschaften von Hohlleitern

Wir werden jetzt einen Leiter betrachten, der in seinem leitenden Material eine tiefe Aushöhlung besitzt. Es kann für ihn gezeigt werden, daß *das elektrische Feld in dieser Aushöhlung Null ist, wenn sich in ihr keine geladenen Körper befinden.* Das Potential ist in jedem Punkt der leitenden Materie konstant, und die die Höhlung begrenzende Fläche ist also eine Äquipotentialfläche. Jeder Punkt im Innern der gleichen Aushöhlung besitzt auch das gleiche Potential. Wenn es nicht so wäre, gäbe es Punkte in der Aushöhlung, in denen das Potential einen Maximal- oder Minimalwert annehmen würde. Dies ist jedoch unmöglich, da in der Aushöhlung keine Ladungen vorhanden sind.

Das Potential muß also konstant sein, und das Feld im Inneren der Aushöhlung Null. Dies ist die Verallgemeinerung des Resultats, das wir für das Feld im Innern einer gleichmäßig geladenen Hohlkugel gefunden hatten. Diese Verallgemeinerung fordert jedoch, daß der Körper ein *Leiter* ist, und setzt eine bestimmte Art der Ladungsverteilung voraus. (Die äußere Oberfläche muß eine Äquipotentialfläche sein.)

Daraus folgt, daß keine Ladungen auf der den Hohlraum begrenzenden Fläche existieren.

Um dies zu zeigen, betrachten wir eine kleine abgeschlossene Fläche Σ, die sowohl einen Teil der Aushöhlung als auch einen Teil der leitenden Materie umfaßt. Wir werden sehen, daß das Feld in jedem Punkt von Σ Null ist, und der aus der Fläche Σ austretende Kraftfluß ebenfalls Null sein muß (siehe Abb. 21).

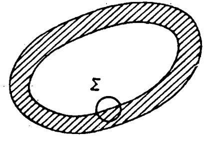
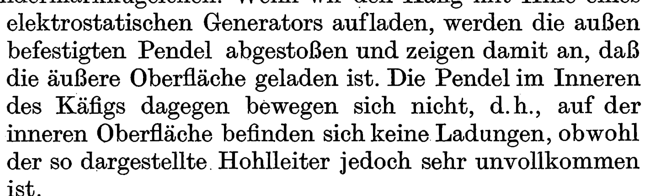


Abb. 21

Nach dem GAUSSschen Theorem beträgt dieser Fluß $4\,\pi q$, wobei q die Summe der inneren Ladungen von Σ ist. Nach unserer Annahme gibt es im Inneren der Aushöhlung jedoch keine Ladung. Wir wissen sogar, daß auch im Innern der leitenden Materie keine freien elektrischen Ladungen existieren; q ist dann die Ladung, die sich auf der den Hohlraum begrenzenden Fläche befindet. Wenn wir die beiden Werte des Kraftflusses vergleichen, sehen wir, daß diese Ladung Null ist.

Man kann dies durch das folgende Experiment veranschaulichen:

Nehmen wir einen Hohlleiter (Abb. 22), der durch ein zylindrisches metallisches Gitter gebildet wird (FARADAY-Käfig), und befestigen an der Innen- und Außenfläche Pendel aus Holundermarkkügelchen. Wenn wir den Käfig mit Hilfe eines elektrostatischen Generators aufladen, werden die außen befestigten Pendel abgestoßen und zeigen damit an, daß die äußere Oberfläche geladen ist. Die Pendel im Inneren des Käfigs dagegen bewegen sich nicht, d.h., auf der inneren Oberfläche befinden sich keine Ladungen, obwohl der so dargestellte Hohlleiter jedoch sehr unvollkommen ist.



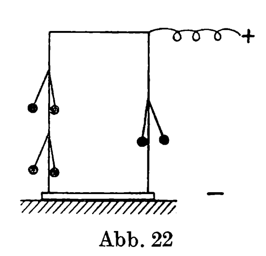


Abb. 22

Anwendung: Ladungsmessung mit einem FARADAY-Käfig

Wenn wir in das Innere eines FARADAY-Käfigs einen geladenen Leiter bringen, geht die gesamte Ladung des letzteren auf die äußere Oberfläche des Zylinders über. Verbinden wir diese mit einem Elektroskop, so kann man nach einer Eichung die Ladung messen (Abb. 23).

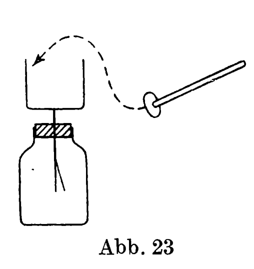


Abb. 23

Speziell kann man die Flächendichte durch eine sogenannte „Prüffläche" messen. So nennt man eine kleine Scheibe aus Blattgold, die von einem Isolator gehalten wird. Berührt man mit dieser Scheibe einen Punkt der Leiteroberfläche, so geht die von dem Flächenstück getragene Ladung auf die Scheibe über. Diese Scheibe bringt man dann mit der inneren Fläche des FARADAY-Käfigs in Berührung. Die Ladung, die man mit dem Elektrometer mißt, ist also der Flächendichte des Leiters in dem betrachteten Punkt proportional.

III. KAPITEL

Influenzerscheinungen

Fundamentalversuch: Influenz auf einem isolierten Leiter

Wir bringen einen neutralen *isolierten* Leiter B in das elektrische Feld, z.B. einer Kugel A, die mit einem elektrostatischen Generator positiv aufgeladen wurde (Abb. 24).

Wir stellen fest, daß auf dem ursprünglich neutralen Leiter Ladungen auftreten. So heben sich z.B. elektrische Pendel, die an den Enden des Leiters angebracht sind, aus ihrer Gleichgewichtslage. Das Ende des Leiters, das A am nächsten ist, wird negativ aufgeladen, während sich die positiven Ladungen auf dem entgegengesetzten Teil des Leiters verteilen. Dabei tritt übrigens kein Widerspruch zum Prinzip der Erhaltung der Elektrizität auf, da sich die Gesamtladung des Leiters B nicht verändert.

Die Erklärung dieser Erscheinung ist einfach: Unter dem Einfluß des elektrischen Feldes von A bewegen sich die Elektronen in B gegen A, wodurch eine

negative Ladung in den A nahegelegenen Bereichen hervorgerufen wird. Die weiter entfernten Bereiche dagegen, die von den Elektronen verlassen werden, scheinen positiv geladen zu sein.

Die positiven und die negativen Bereiche werden durch eine neutrale Linie voneinander getrennt, in deren nächster Umgebung Ladungsdichte und Feld sehr schwach sind.

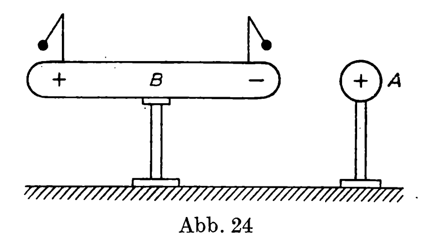


Abb. 24

Wir nehmen an, daß die influenzierende Ladung punktförmig sei. Der Leiter B sei immer isoliert, und wir sehen ungefähr, wie die Äquipotentialflächen angeordnet sind (Abb. 25).

In unmittelbarer Nähe von A bilden die Äquipotentialflächen Kugeln mit dem Zentrum A.

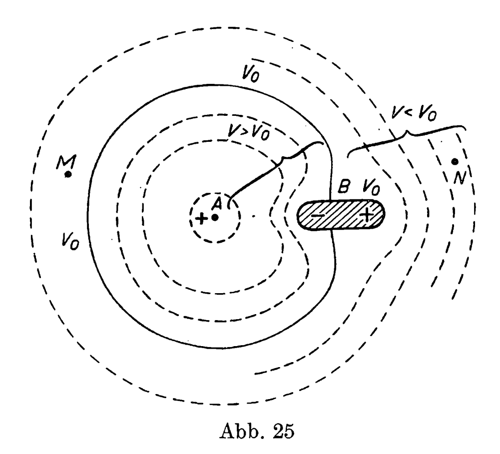


Abb. 25

Es existiert eine Äquipotentialfläche V_0, die die Oberfläche des Leiters umfaßt. Die anderen Äquipotentialflächen haben eine etwas ausgebuchtete Form, wie aus Abb. 25 ersichtlich ist.

Wie man leicht sehen kann, ist das Potential in dem Bereich M in einem beliebigen Punkt etwas kleiner als in dem Fall, wo der Körper B nicht vorhanden ist. Im Bereich N dagegen ist das Potential der einzelnen Punkte bei Anwesenheit von B etwas größer.

Selbstverständlich trifft die Äquipotentialfläche V_0 in B genau auf die neutrale Linie, denn in allen übrigen Punkten des Körpers existieren Ladungen, die verhin-

dern, daß die Äquipotentialflächen diesen berühren. Die Abb. 25 zeigt gut, daß das Feld auf dieser Äquipotentialfläche Null ist.

Wir stellen fest, daß auf dem positiv geladenen Teil von B das elektrische Feld nach außen, d.h. in Richtung des abnehmenden Potentials, gerichtet ist. Entsprechend ist im negativ geladenen Teil das Feld in das Innere des Leiters gerichtet.

Vollständige Influenz

Man spricht von einer *vollständigen Influenz, wenn die Ladungen auf dem influenzierten Körper, absolut genommen, den gleichen Wert haben wie die des influenzierenden Körpers.*

In der Praxis haben wir eine *vollständige Influenz nur dann, wenn die influenzierende Ladung fast vollständig von einem Hohlleiter umgeben ist.*

Der geladene Körper A (siehe Abb. 26) trage die Ladung $+q$ und reiche in das Innere eines ursprünglich neutralen isolierten Hohlleiters B. Auf diesem Leiter bilden sich durch Influenz die Ladungen $-q'$ und $+q'$ aus, wenn der influenzierende Körper A durch eine Öffnung im Leiter in seinen Hohlraum eingeführt wird. Die Ladungen $-q'$ liegen A am nächsten, d.h. auf der inneren Oberfläche des Leiters, die Ladungen $+q'$ liegen aus Symmetriegründen auf der äußeren Oberfläche des Leiters. Wir wollen sagen, daß q' nahezu gleich q ist. Nun betrachten wir die geschlossene Fläche in dem Leiter, die durch seine Öffnung läuft und die Ladungen $+q$ von A und $-q'$ auf der Innenfläche von B umschließt. Der Fluß des elektrischen Feldes durch die Fläche Σ ist Null. Tatsächlich ist das Feld im gesamten Leiter Null, und nur im Bereich $d\Sigma$, der der Öffnung angehört, existiert ein bestimmtes Feld H.

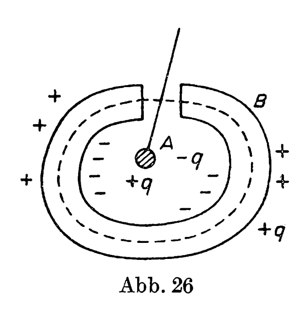


Abb. 26

Die Integration beschränkt sich also auf $H\,d\Sigma$ und ergibt nach dem Gaussschen Theorem $4\pi(q-q')$. Im Grenzfall, wenn $d\Sigma$ gegen Null geht, strebt $H\,d\Sigma \to 0$, und wir finden

$$4\pi(q-q') = 0, \quad \text{d.h.} \quad q = q'.$$

Als Anwendung dieses Ergebnisses kann man den bereits betrachteten Faraday-Käfig ansehen. Selbst wenn der geladene Körper beim Einbringen in das Innere des Käfigs diesen nicht berührt, können wir sagen, daß der Übergang der Ladung q auf die äußere Oberfläche des Käfigs praktisch durch Influenz erfolgt.

Influenzerscheinungen auf einem die influenzierende Ladung nicht umgebenden Leiter

Wenn sowohl A als auch B elektrische Leiter sind, müssen wir das Gesetz der Ladungsverteilung auf B präzisieren. Die Abb. 27 stellt die Kraftlinien dar und zeigt, daß keine vollständige Influenz auftreten kann, da nicht alle von A ausgehenden Kraftlinien in B enden.

Wir wählen ein kleines Flächenelement df des influenzierenden Körpers. Die Kraftlinien, die von der Flächenumrandung ausgehen, bilden eine „Kraftlinien-

röhre", die aus der Oberfläche von B ein Flächenelement df' herausschneidet. Man bezeichnet df und df' als *korrespondierend.*

Wir betrachten jetzt die geschlossene Fläche, die durch die „Kraftlinienröhre" (in Abb. 27 schraffiert) und zwei kleine Flächen Σ und Σ' gebildet wird. Die letzteren stehen auf der Umrandung von df und df' und liegen im Innern der Leitermaterie.

Der von einer solchen Fläche ausgehende Kraftfluß ist Null, d.h., daß in jedem Punkt von Σ und Σ' das Feld Null ist, wird auch der Fluß durch diese Flächen Null. Der Fluß durch die Oberfläche der „Kraftlinienröhre" muß nach der Definition der Kraftlinien ebenfalls verschwinden. Wenn dq und dq' die von den

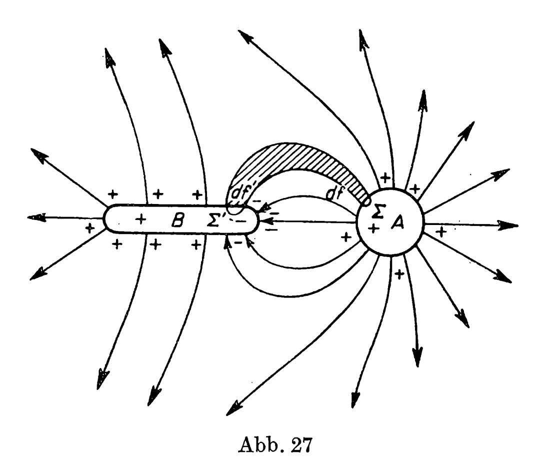


Abb. 27

Flächenelementen df und df' getragenen Ladungen sind, dann ist der aus der betrachteten Fläche austretende Kraftfluß gegeben durch

$$4\pi(dq + dq').$$

Daraus folgt

$$dq + dq' = 0,$$

was uns die folgende Aussage erlaubt:

Theorem der korrespondierenden Flächenelemente: *Die von zwei korrespondierenden Flächenelementen getragenen Ladungen haben den gleichen absoluten Wert, aber entgegengesetzte Vorzeichen.*

Bemerkung: Dieses Theorem kann zur Untersuchung der vollständigen Influenz verwendet werden.

Wir unterscheiden dabei zwei Fälle:

1. *Der influenzierte Leiter ist isoliert.* In diesem Fall besitzt der Leiter ein Potential V_0, das durch die Influenz bestimmt wird, und eine Ladungsverteilung, wie wir sie bereits oben im Falle der Influenz erhielten. Seine *Gesamtladung ändert sich nicht* und erfüllt das Gesetz der Erhaltung der Elektrizität.

2. *Der influenzierte Leiter hat ein konstantes Potential.* Er ist z. B. entweder geerdet oder mit einem Pol eines Akkumulators verbunden, dessen zweiter Pol an Masse liegt.

In diesem Fall wird die Elektrizität, die das gleiche Vorzeichen wie die influenzierende Ladung hat, abgestoßen und auf die Erde abfließen, da durch den Verbindungsdraht der influenzierte Leiter und die Erde ein System bilden.

Man sieht, daß der Leiter sein ursprüngliches Potential beibehält und seine Gesamtladung durch die Influenz bestimmt wird.

Gleichgewichtsbetrachtungen

Für Leiter mit einem bestimmten Potential stellt sich das Gleichgewichtsproblem in der folgenden Form dar: Wir müssen eine Funktion V finden, die die LAPLACEsche Gleichung im gesamten Raum um die Leiter ($\Delta V = 0$) befriedigt und die auf der Oberfläche jedes Leiters die vorgegebenen Werte annimmt.

Wenn man diese Funktion V gefunden hat, ist das Problem vollständig gelöst, da das elektrische Feld durch

$$\mathfrak{H} = -\operatorname{grad} V$$

gegeben ist. Da nun das Feld auf den Leiteroberflächen bekannt ist, ist die Ladungsverteilung durch die Gleichungen

$$\sigma = \frac{H}{4\pi} \quad \text{und} \quad \sigma = -\frac{1}{4\pi}\frac{\partial V}{\partial n}$$

bestimmt. Sind mehrere isolierte Leiter vorhanden, ist das Potential auf ihren Oberflächen nicht mehr bestimmt. Wir haben jedoch eine neue Bedingung für die Elektrizitätserhaltung:

$$\int \sigma\, dS = -\frac{1}{4\pi}\int \frac{\partial V}{\partial n}\, dS = Q.$$

Eine allgemeine Lösung für dieses Problem können wir nicht angeben. Wir wollen jedoch zeigen, daß nur *eine* Lösung existiert.

Nehmen wir an, V und V' seien Lösungen der LAPLACEschen Gleichung, dann ist auch $\lambda V + \lambda' V'$ *eine* Lösung. Dies bedeutet: wenn wir die im Gleichgewicht befindlichen Leiter erst bei einem Potential $V_1, V_2, \ldots$, dann bei einem Potential $V_1', V_2', \ldots$ betrachten und sie jetzt auf ein Potential $V_1 + V_1', V_2 + V_2', \ldots$ bringen, dann beobachten wir, daß sich ein neues Gleichgewicht mit den Ladungen $Q_1 + Q_1', Q_2 + Q_2', \ldots$ und den Flächendichten $\sigma_1 + \sigma_1', \sigma_2 + \sigma_2', \ldots$ einstellt.

Theorem: *Die Überlagerung zweier Gleichgewichtszustände ergibt wieder einen Gleichgewichtszustand.*

Wenn sich alle Leiter auf dem Potential Null befinden, dann gibt es im Raum keine Ladungen, und die Lösung der LAPLACEschen Gleichung lautet

$$V = 0.$$

Wäre dies nicht so, dann müßte das Potential an gewissen Punkten des Raumes oder auf der Oberfläche eines Leiters einen Maximal- bzw. Minimalwert annehmen. Das ist jedoch nicht möglich, da keine Ladungen existieren.

Verallgemeinerung: Wir nehmen an, es existieren zwei verschiedene Lösungen V und V' für ein Gleichgewichtsproblem, für welches der Leiter (1) auf einem Potential V_1, der Leiter (2) auf einem Potential V_2 usw. liegen.

Betrachten wir nun die Lösung $V - V'$. Sie ergibt für alle Leiter einen Potentialwert 0, der nach obigem sogar identisch 0 ist:

$$V \equiv V'.$$

Es gibt also wirklich nur eine Lösung des Problems.

Analoge Betrachtungen kann man für konstante Ladungen anstellen.

Elektrische Abschirmung

Wir betrachten einen *geschlossenen Hohlleiter* auf einem Potential Null und nehmen an, daß außerhalb des Leiters keine Ladungen existieren. Das Potential in jedem Punkt außerhalb des Leiters ist also Null, da es weder einen Maximal- noch einen Minimalwert annimmt, sondern auf dem Leiter und im Unendlichen verschwindet.

Treten elektrische Ladungen im Inneren des Hohlleiters auf, so beeinflussen diese nicht den Gleichgewichtszustand außerhalb des Leiters. Wir haben also dem Inneren gegenüber eine elektrische Abschirmung.

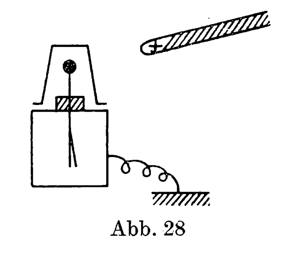
Wenn wir einen *zweiten Gleichgewichtszustand* untersuchen, bei dem der Leiter ein *konstantes Potential* hat, stellen wir fest, daß die Leiter innerhalb des Hohlraums nicht geladen sind. Das Gleichgewicht im Innern des Hohlleiters ist also von den äußeren Ladungen unabhängig.

Eine Überlagerung dieser beiden Gleichgewichtszustände ergibt eine *vollständige elektrische Abschirmung.*

In der Praxis kann man nur eine unvollständige Abschirmung erreichen. Der elektrostatische Schutz ist trotzdem durchaus hinreichend.

Anwendung: Faraday-Käfig

Dieser Käfig wird benutzt, um einen empfindlichen Apparat gegen störende äußere elektrostatische Einflüsse abzuschirmen.


Abb. 28

Ein Beispiel dafür ist die Abschirmung des Goldblattelektrometers. Dieses ist von einem metallischen Gehäuse umgeben, welches allerdings keine vollständige Abschirmung bildet, da zwei Seiten zur Beobachtung und Projektion des Ausschlages aus Glas bestehen.

Experiment: Wir bedecken die Kugel eines Goldblattelektrometers mit einer metallischen Glocke und stellen so einen Faraday-Käfig her. Die Metallwände werden geerdet. Nähern wir nun einen geladenen Körper, z.B. einen mit einem Katzenfell geriebenen Hartgummistab, so zeigt das Elektrometer keinen Ausschlag; wir haben also eine wirksame elektrostatische Abschirmung.

Abschirmung eines Raumes durch Drahtgitter

In der Industrie gebraucht man die elektrostatische Abschirmung z.B. beim Empfang drahtloser Telegraphie. Wenn die elektromagnetische Welle die Antenne des Empfängers erreicht, ruft ihr elektrisches Feld einen Strom hervor. Um Störfelder, die zum Beispiel von anderen elektrischen Maschinen in der Nähe herrühren, abzuschirmen, umgibt man den Empfänger mit einem Abschirmgitter.

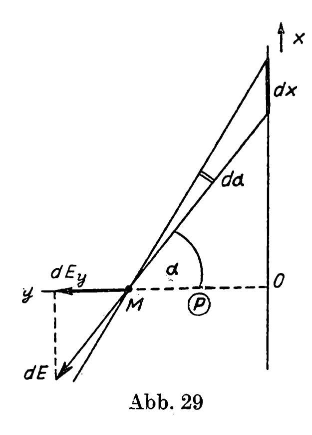


Abb. 29

Erstaunlicherweise erreicht man eine fast vollständige Abschirmung bereits bei durchbrochenen Abschirmungen, z.B. Drahtgittern. Dabei spielt jedoch die Maschengröße eine Rolle.

Um dies genau zu untersuchen, berechnen wir das Potential, das von parallelen Gitterstäben, die gleichmäßig auf einem Kreiszylinder mit dem Radius a angeordnet sind, hervorgerufen wird. Diese Anordnung ist eine weitere Art des FARADAY-Käfigs.

Wir berechnen zuerst das Potential, das von einem dieser Stäbe mit der Ladung λ pro Längeneinheit in einem Punkt M hervorgerufen wird, der sich im Abstand ϱ von diesem Stab befindet. Wenn nun im Unendlichen elektrische Ladungen existieren, ist die direkte Berechnung des Potentials nicht möglich.

dx sei das durch den Winkel $d\alpha$ bestimmte Flächenelement, das in M das Feld

$$dE = \frac{\lambda dx}{r^2}$$

hervorruft.

Die einzige interessierende Komponente dE_y ist die zu dem Stab senkrecht stehende, da die anderen durch die Wirkungen des zu dx in bezug auf O symmetrischen Flächenelementes aufgehoben werden:

$$dE_y = \frac{\lambda dx}{r^2} \cos\alpha .$$

Es ist

$$x = \varrho \cdot \operatorname{tg}\alpha, \quad dx = \frac{\varrho}{\cos^2\alpha}\, d\alpha, \quad r = \frac{\varrho}{\cos\alpha} .$$

Daraus folgt

$$dE_y = \frac{\lambda}{\varrho} \cos\alpha d\alpha .$$

Das Feld in M ist also

$$E = \frac{\lambda}{\varrho} \int\limits_{-\pi/2}^{+\pi/2} \cos\alpha d\alpha = \frac{2\lambda}{\varrho} .$$

Wenn V das Potential in M ist, haben wir

$$-\frac{\partial V}{\partial \varrho} = E = \frac{2\lambda}{\varrho}$$

und folglich

$$V = -2\lambda \ln \varrho = -\lambda \ln \varrho^2.$$

Erinnern wir uns jetzt unseres Gitters von n Stäben (siehe Abb. 30), von denen jeder den Abstand a vom Mittelpunkt O habe:

$$\varrho^2 = r^2 + a^2 - 2ar \cos\left(\Theta - \frac{2K\pi}{n}\right).$$

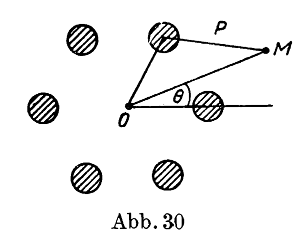


Abb. 30

Das Potential in einem Punkt ergibt sich also zu:

$$V_1 = -\lambda \sum_{K=1}^{\pi} \ln \left[r^2 + a^2 - 2ar \cos\left(\Theta - \frac{2K\pi}{n}\right)\right],$$

$$V_1 = -\lambda \ln \prod_{K=1}^{\pi} \left[r^2 + a^2 - 2ar \cos\left(\Theta - \frac{2K\pi}{n}\right)\right].$$

Diesen Ausdruck wollen wir nun berechnen. Legen wir unser Koordinatensystem so, daß Ox in Richtung des Stabes verläuft und Oy darauf senkrecht steht. Z sei der Abstand zwischen dem Punkt M und dem Mittelpunkt. Die verschiedenen Stäbe entsprechen den Wurzeln folgender Gleichung:

$$Z^n - a^n = 0.$$

Wenn $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ die Wurzeln dieser Gleichung sind, kann das Produkt

$$\overline{A_1M}^2 \cdot \overline{A_2M}^2 \cdot \overline{A_3M}^2 \cdots \overline{A_nM}^2$$

in folgender Form dargestellt werden:

$$|Z - \alpha_1|^2 \cdot |Z - \alpha_2|^2 \cdots |Z - \alpha_n|^2 = |Z^n - a^n|^2 .$$

Nun ist

$$Z = r[\cos\Theta + i \sin\Theta]; \quad Z^n = r^n [\cos n\Theta + i \sin n\Theta],$$

$$[Z^n - a^n]^2 = [r^n \cos n\Theta - a^n]^2 + r^{2n} \sin^2 n\Theta,$$

woraus

$$V_1 = -\lambda \ln (r^{2n} - 2r^n a^n \cos n\Theta + a^{2n})$$

folgt. Wenn r groß gegen a ist, d.h., wenn wir weit genug vom Käfig entfernt sind, ist

$$V_1 = -2n\lambda \ln r.$$

Bringen wir in die Zylinderachse einen Stab mit der Ladung $-n\lambda$ pro Längeneinheit. Dieser Stab erzeugt in M ein Potential

$$V_2 = 2n\lambda \ln r = \lambda \ln r^{2n}.$$

Das resultierende Potential in M ist also nun

$$V = V_1 + V_2 = \lambda \ln \frac{r^{2n}}{r^{2n} - 2r^n a^n \cos n\Theta + a^{2n}},$$

und wenn r groß ist gegen a:

$$V = \lambda \ln \frac{1}{1 - 2\,(a/r)^n \cdot \cos n\Theta + (a/r)^{2n}} = 2\lambda \left(\frac{a}{r}\right)^n \cos n\Theta\,.$$

Wenn man sich vom Käfig nach außen bewegt und n groß genug ist, geht das Potential gegen Null. Der Grund unseres Zurückkommens auf diese Untersuchungen ist folgender: Wir wollen eine möglichst große Anzahl von Stäben betrachten (ein enges Maschengitter), wobei der Durchmesser der Stäbe auf die Entfernung zwischen je zwei Stäben keinen Einfluß haben soll. Man muß dabei jedoch bemerken, daß die Influenz nicht vollständig ist, wenn die Ladungen auf den geerdeten äußeren Stäben durch Influenz einer Ladung auf der Mittelachse des Systems hervorgerufen werden. Wir können also in diesem Fall unsere obige Berechnung nicht exakt anwenden. Die qualitativen Ergebnisse sind jedoch weiterhin gültig.

Untersuchung einiger Spezialfälle der elektrischen Influenz

Verhalten der Spitzen

Die von einem Körper getragene Ladung häuft sich an den Punkten seiner größten Krümmungen. Nach dem Coulombschen Theorem hat das elektrische Feld dort seinen größten Wert. Wenn der Leiter in einer Spitze ausläuft und sein Potential groß genug ist, dann ist das Feld im Endpunkt der Spitze so groß, daß eine Entladung in die Luft stattfindet. Diese Entladung zeigt sich im Dunkeln durch sichtbare Leuchterscheinungen. Man beobachtet bei einem positiv geladenen Körper ein violettes Strahlenbüschel, dagegen bei einem negativ geladenen Körper einen hellen Punkt.

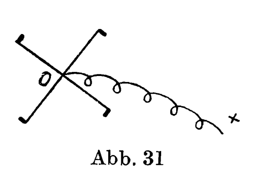
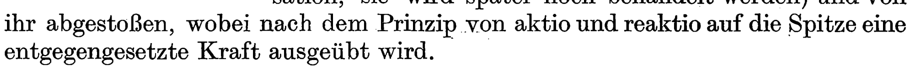


Abb. 31

Diese Beobachtungen sind die ersten Anzeichen einer Unsymmetrie zwischen negativen und positiven Ladungen.

Unter der Wirkung des starken elektrischen Feldes werden die Moleküle der Luft in der Nähe dieser Spitze elektrisiert (diese Erscheinung bezeichnet man als Ionisation, sie wird später noch behandelt werden) und von

ihr abgestoßen, wobei nach dem Prinzip von aktio und reaktio auf die Spitze eine entgegengesetzte Kraft ausgeübt wird.

Dies ist leicht durch die Drehung eines elektrisch geladenen Kreuzes zu zeigen. Dieser Apparat besteht aus horizontalen leitenden Stäben, die auf den Durchmessern eines Kreises angeordnet und um seinen Mittelpunkt drehbar sind. An ihren Enden haben sie senkrecht stehende Spitzen, die den selben Drehsinn zeigen (Abb. 31).

Verbinden wir jetzt dieses Drehkreuz mit einem elektrostatischen Generator, so stellen wir fest, daß es sich um seine Achse in der zu seinen Spitzen entgegengesetzten Richtung dreht.

Das für Spitzen gefundene Verhalten wollen wir nun ein wenig präzisieren, indem wir von dem Ausdruck für die Feldveränderung längs einer Senkrechten zum Leiter in einem Punkt seiner Oberfläche ausgehen, deren Krümmung $\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}$ beträgt:

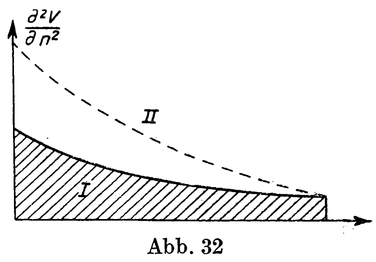


Abb. 32

$$\frac{\partial^2 V}{\partial n^2} = -\left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}\right)\frac{\partial V}{\partial n}.$$

Sehr nahe an dem geladenen Körper haben die Äquipotentialflächen etwa die Form einer Kugel. In jedem Punkt einer solchen Fläche hat das Potential den gleichen Wert entsprechend $\frac{\partial^2 V}{\partial n^2}$. Wenn wir uns der Leiteroberfläche nähern, und zwar einem *Punkt mit schwacher Krümmung*, bleibt $\frac{\partial^2 V}{\partial n^2}$ klein, folglich auch das Feld, das in Abb. 32, Kurve *I*, durch die gestrichelte Fläche dargestellt wird.

Wenn wir uns dagegen der Spitze nähern, wird $\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}$ sehr groß sein, also auch $\frac{\partial^2 V}{\partial n^2}$ und damit auch das Feld (Abb. 32, Kurve *II*).

Um quantitative Überlegungen zu dieser Frage anstellen zu können, soll die Spitze durch ein sehr gestrecktes Rotationsellipsoid angenähert werden.

Ladungsverteilung auf einem leitenden Rotationsellipsoid

Die Lösung für ein sehr gestrecktes Ellipsoid erhalten wir durch folgenden Kunstgriff.

Wir betrachten (Abb. 33) die Gerade F_1F_2, deren Länge $2c$ und deren Ladung pro Längeneinheit λ sei. Wir wollen nun das Feld berechnen, das durch diese lineare Ladungsverteilung in einem Punkt M aufgebaut wird.

Wir wählen ein kleines Element dx_1 aus, das durch den Winkel α zwischen $M\,dx_1$ und MH bestimmt wird, wobei MH senkrecht auf F_1F_2 steht. Wenn r der Abstand zwischen M und dem Element dx_1 ist, dann erzeugt letzteres in M ein Feld

$$dh_1 = \lambda \frac{dx_1}{r^2}.$$

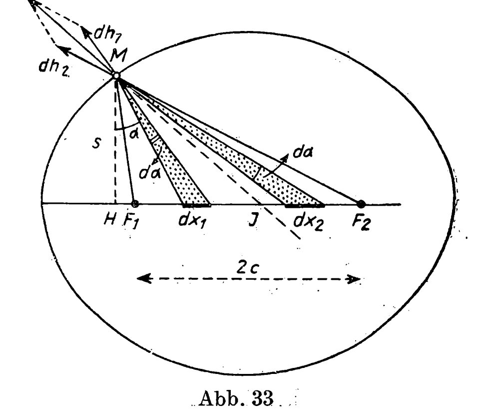


Abb. 33

Da nun

$$r = \frac{s}{\cos\alpha} \quad \text{und} \quad x = s \cdot \operatorname{tg}\alpha,$$

wobei s die Länge MH ist, folgt

$$dx_1 = \frac{s}{\cos^2\alpha}\, d\alpha.$$

Es ist also

$$dh_1 = \frac{\lambda}{s}\, d\alpha.$$

Wir zeichnen F_1M und F_2M ein und betrachten das Element dx_2, wobei wir ein zu $d\alpha$ in bezug auf die innere Winkelhalbierende MI des Winkels F_1MF_2 symmetrisches Element wählten. Berechnen wir das Feld, das von diesem Element dx_2 in M aufgebaut wird, so erhalten wir den gleichen Wert wie von dx_1, da $d\alpha$ unverändert ist. Weiterhin sind dh_1 und dh_2 symmetrisch in bezug auf MI entsprechend der Konstruktion von dx_2.

Die Komponenten von dh_1 und dh_2 in Richtung MI addieren sich, während die dazu senkrecht stehenden Komponenten verschwinden. Wir können nun jeweils aus zwei einander entsprechenden Elementen die gesamte Strecke F_1F_2 zusammensetzen. Das Feld in M hat die Richtung der Winkelhalbierenden des Winkels $\widehat{F_1MF_2}$; da M jetzt das Rotationsellipsoid $MF_1 + MF_2 = \text{const}$ beschreibt, steht die Winkelhalbierende senkrecht auf dieser Fläche. Dieses Ellipsoid ist eine Äquipotentialfläche, und die Gesamtheit der Flächen $V = \text{const}$ sind Rotationsellipsoide mit den gleichen Brennpunkten F_1 und F_2.

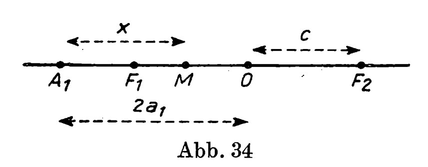


Abb. 34

Das Potential jeder dieser Flächen ist sehr leicht zu berechnen. Es genügt, das Potential in einem speziellen Punkt zu berechnen, z.B. im Scheitelpunkt A_1 der großen Achse. Es sei $2a_1$ die Länge der großen Achse (Abb. 34), dann ist das Potential in A_1

$$V_1 = \int\limits_{a_1-c}^{a_1+c} \frac{\lambda\, dx}{x} = \lambda \ln \frac{a_1 + c}{a_1 - c}.$$

Wir betrachten an Stelle des elektrisierten Segments F_1F_2 einen Leiter, der durch eines der oben betrachteten Ellipsoide begrenzt wird und z.B. durch seine große Achse a_1; er besitzt das Potential V dieses Ellipsoides; $V = \lambda \ln \dfrac{a+c}{a-c}$ kann als Funktion dieser großen Halbachse des Rotationsellipsoids betrachtet werden, das durch einen gegebenen Punkt M verläuft. Diese Funktion befriedigt die LAPLACEsche Gleichung $\Delta V = 0$ im Außenraum und gibt weiterhin dem Potential des Leiters den konstanten Wert V_1. Dies ist die gesuchte Lösung. Die oben betrachteten Ellipsoide mit gleichen Brennpunkten sind demnach Äquipotentialflächen für unsere neue Ladungsverteilung.

Um die Ladungsverteilung auf dem Leiterellipsoid zu untersuchen, genügt es, das Feld in einem Punkt zu berechnen; aus dem COULOMBschen Theorem ergibt sich dann die Flächendichte.

Man kann zeigen, daß die Gesamtladung des Leiterellipsoids mit einem Potential V den Wert $2\lambda c$ hat. Dazu betrachten wir eine Fläche Σ, die das Ellipsoid sehr eng umschließt, und berechnen den Kraftfluß des elektrischen Feldes durch diese Fläche.

Da das im Außenraum durch die Ladungsverteilung σ aufgebaute Feld das gleiche ist wie das von der Ladung $2\lambda c$ (die auf der Achse F_1F_2 verteilt ist) hervorgerufene Feld, ergibt das GAUSSsche Theorem

$$\Phi = 4\pi\iint \sigma\, dS = 4\pi\, 2\lambda c.$$

Also ist die Gesamtladung des Ellipsoids

$$\iint \sigma\, dS = 2\lambda c.$$

Wir berechnen das Verhältnis der Flächendichten in den Scheitelpunkten der großen und der kleinen Achse:

$$\frac{\sigma_A}{\sigma_B} = \frac{H_A}{H_B}.$$

Da

$$H_A = -\frac{\partial V}{\partial a}$$

und

$$b^2 = a^2 - c^2; \quad b\,db = a\,da,$$

$$H_B = -\frac{\partial V}{\partial b} = -\frac{\partial V}{\partial a}\frac{\partial a}{\partial b} = -\frac{\partial V}{\partial a}\cdot\frac{b}{a},$$

folgt

$$\frac{\sigma_A}{\sigma_B} = \frac{b}{a}.$$

Abb. 35

Abb. 36

Die Ladungsdichten auf dem Ellipsoid an den Enden der Achsen verhalten sich wie die Achsen selbst (Abb. 35).

Dieses Gesetz wurde von COULOMB experimentell gefunden, und zwar mit Hilfe einer sogenannten „Prüffläche"; die Theorie wurde sehr viel später von POISSON entwickelt.

Wenn wir einen Leiter mit einer ausgeprägten Spitze betrachten und diese Spitze durch ein sehr gestrecktes Rotationsellipsoid approximieren, sehen wir, daß die Flächendichte in der äußersten Spitze sehr beträchtlich und das Feld dort sehr stark ist (Abb. 36).

Das abgeplattete Ellipsoid verhält sich anders, ist jedoch nicht weiter interessant.

Anwendungen der Spitzeneigenschaften

a) *Der Blitzableiter.* Diesen werden wir bei der Erklärung des Blitzes näher untersuchen.

b) *St.-Elms-Feuer.* Diese Erscheinung wurde früher, als die Schiffe noch aus Holz gebaut waren, beobachtet. Unter gewissen Umständen lud sich das Deck dieser Schiffe elektrisch auf. Bei feuchtem Wetter bildete sich nun auf der Oberfläche der Masten eine gleichmäßige leitende Schicht aus, welche die elektrische Entladung des

Decks in den Mastspitzen erlaubte; dabei traten die von uns bereits betrachteten Leuchtphänomene auf. Sie sind in der Seefahrt schon seit sehr langer Zeit bekannt und wurden von CRISTOPH COLUMBUS auf seiner zweiten Reise beobachtet:

„In der Nacht des Samstags (im Oktober 1493) donnerte und regnete es heftig. Sankt Elms zeigte sich auf dem Bramsegelbaum (dem höchsten Punkt des Mastwerks) mit sieben brennenden Kerzen, die von den Matrosen für den Leib des Heiligen gehalten werden. Sogleich hörte man singen und danksagen, denn die Seeleute glauben, daß die Gefahr des Sturmes vorbei ist, wenn Sankt Elms erscheint. (CRISTOPH COLUMBUS, Memoiren seines Sohnes: 2. Reise.)

Weiterhin haben wir eine bereits genauere Beschreibung aus den Memoiren von FORBIN:

„Wir sahen mehr als dreißig Sankt-Elms-Feuer. Eines davon an der Spitze der Wetterfahne auf dem Großmast war mehr als $1^1/_2$ Fuß hoch. Ich schickte einen Mann auf den Mast, um es herunterzuholen. Als er oben ankam, rief er, daß das Feuer ein ähnliches Geräusch mache wie brennendes feuchtes Pulver. Ich befahl ihm, die Wetterfahne abzunehmen und herunterzukommen. Kaum hatte er sie jedoch abgenommen, als das Feuer von der Fahne auf die Mastspitze übersprang, ohne daß es möglich war, es davon zu entfernen. Dort blieb das Feuer längere Zeit, bis es nach und nach schwächer wurde.“

Vermeidung von radioelektrischen Störungen im Flugzeug

Ein Flugzeug in der Luft kann sich durch Reibung an den Luftschichten aufladen. Setzen beim Landen die isolierenden Reifen (Gummi-Luftreifen) auf dem trockenen Boden auf, so kann man aus der Maschine Funken ziehen. Diese Erscheinung ist besonders stark, wenn das Flugzeug Schneewolken durchflogen hat; die plötzliche Ladungsveränderung ruft Störungen hervor, die einen Empfang von radioelektrischen Wellen an Bord und damit eine Landung bei schlechter Sicht sehr erschweren. Diese Erscheinung kann man jedoch vermindern, indem man an dem Schwanz des Flugzeugs einen Draht von 2–3 m Länge befestigt und schleppen läßt. Durch die Drahtspitze wird das Flugzeug entladen und die Potentialschwankungen, die in der Größenordnung von 2–3 Volt liegen, werden auf $^1/_{10}$ Volt herabgesetzt. Die Störungen nehmen dann entsprechend ab.

Von einer punktförmigen Ladung influenzierte Kugel. Methode der elektrischen Abbildungen

Wir besprechen noch einen rechnerischen Kunstgriff, der uns zu dem gewünschten Resultat führt (Abb. 37, 38). Die beiden Punkte A und B tragen die Ladungen $+q$ und $-q'$. Wir betrachten einen Punkt M, der von A bzw. B durch den Abstand r bzw. r' gekennzeichnet ist. Das Potential in M ist

$$V = \frac{q}{r} - \frac{q'}{r'}.$$

Die Äquipotentialflächen gehorchen der bipolaren Gleichung

$$\frac{q}{r} - \frac{q'}{r'} = \text{const}.$$

Diese Flächen sind nicht trivial, mit Ausnahme der Fläche mit dem Potential Null. Dies ist eine Kugel, deren Punkte die Entfernungen von A und B im Verhältnis von q/q' teilen.

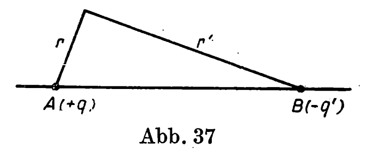


Abb. 37

Es seien d und d' die Entfernungen von A und B und dem Mittelpunkt O dieser Kugel (K). Wenn R der Radius dieser Kugel ist, dann gilt: $dd' = R^2$. A und B bezeichnet man in bezug auf K als konjugiert.

Wir wollen nun das Feld in einem Punkt P der Kugel (K) berechnen; dazu betrachten wir die Feldkomponenten h und h', die zu A und B gehören:

$$h = \frac{q}{r^2}; \quad h' = \frac{q'}{r'^2}.$$

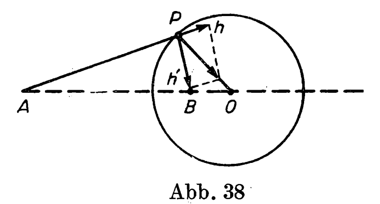


Abb. 38

Da nun die Kugel das Potential Null besitzt, steht das Feld E senkrecht zu ihr und geht durch den Punkt O. Die Dreiecke PhE und PAB sind einander ähnlich. In der Tat ist der Winkel bei h gleich dem Winkel bei P. Anderseits ist

$$\frac{Ph}{hE} = \frac{h}{h'} = \frac{q}{q'}\,\frac{r'^2}{r^2}.$$

Da P auf der Kugel mit dem Potential Null liegt, gilt

$$\frac{r}{r'} = \frac{q}{q'}.$$

Daraus folgt

$$\frac{Ph}{hE} = \frac{q'}{q} = \frac{r'}{r} = \frac{PB}{PA}$$

und weiterhin

$$\frac{PE}{AB} = \frac{h}{r'} = \frac{q}{r^2 r'}.$$

Da PE das resultierende Feld in P darstellt, ist

$$AB = d - d' = d - \frac{R^2}{d},$$

wobei d der Abstand zwischen A und O und d' der zwischen B und O ist.

Wir bekommen also

$$E = \frac{q}{r^2 r'}\left(d - \frac{R^2}{d}\right) = \frac{q}{r^3}\cdot\frac{q}{q'}\,\frac{d^2 - R^2}{d}.$$

Da anderseits ein Punkt der Kugel auf AB diese Strecke im Verhältnis $q:q'$ teilt, gilt

$$\frac{d+R}{d'+R} = \frac{q}{q'}.$$

Nun ist aber

$$\frac{d+R}{d'+R} = \frac{d+R}{\frac{R^2}{d}+R} = \frac{d}{R}.$$

Folglich ist

$$\frac{d}{R} = \frac{q}{q'}.$$

Es ergibt sich also

$$E = q \cdot \frac{d^2 - R^2}{R} \frac{1}{r^3}.$$

Dieser Ausdruck gibt uns das Feld E auf einer Kugel mit dem Radius R als Funktion der Ladung q und der Entfernung d vom Kugelmittelpunkt an, unabhängig von q' und der Entfernung d' vom Kugelmittelpunkt.

a) Wir nehmen an, die betrachtete Kugel sei leitend und durch einen Draht geerdet, d. h., sie habe das Potential Null; die Punktladung q' sei nicht vorhanden. Wir bringen in A die Ladung $+q$ an. Das Feld außerhalb der Kugel wird jetzt das gleiche sein wie ein Feld, das von einer Ladung $+q$ in A und $-q'$ in B erzeugt wird. Wir werden also außerhalb der Kugel $\Delta V = 0$ und auf der Kugeloberfläche das Potential $V = 0$ haben. Nun wissen wir, daß dieses Problem nur eine einzige Lösung hat, und zwar die, die wir bei der Betrachtung der ersten Ladungskombination gefunden haben. Das Problem ist also zurückgeführt auf die Influenz einer punktförmigen Ladung in bezug auf eine geerdete Kugel (siehe Abb. 40).

Die Flächendichte in einem Punkt dieser leitenden geerdeten Kugel ist

$$\sigma = \frac{E}{4\pi} = \frac{q}{4\pi} \frac{d^2 - R^2}{R} \cdot \frac{1}{r^3}.$$

Diese Gleichung ergibt für σ überall dasselbe Vorzeichen, was von vornherein anzunehmen war. Wir haben also ein $\frac{1}{r^3}$-Gesetz, wobei r der Abstand des Kugelpunktes von der influenzierenden Ladung ist.

Berechnen wir jetzt die *Gesamtladung der Kugel* (K). Dazu bestimmen wir den durch eine Fläche Σ hindurchtretenden Kraftfluß, der die Kugel K, ohne den Punkt A zu enthalten, umgibt. Nach dem GAUSSschen Theorem ergibt sich

$$\Phi = \iint E\,ds_1 = 4\pi \iint \sigma\,ds,$$

wobei ds_1 das Flächenelement von Σ sei und ds das der Kugel K.

Da Σ außerhalb von K liegt, ist das Feld in einem Punkt von Σ gleich dem, das durch die Ladung $+q$ in A und $-q'$ in B aufgebaut wird. Wir bekommen also

$$\Phi = \iint E\,ds_1 = 4\pi(-q').$$

Die Gesamtladung der Kugel beträgt also $-q'$.

Berechnen wir nun die *Anziehungskraft*, die von der Ladung q auf die Kugel K ausgeübt wird. Diese entspricht bis auf das Vorzeichen derjenigen, die von der Kugel K auf die Ladung q ausgeübt wird. Wie wir oben gesehen haben, ist das in A durch die Kugel erzeugte Feld von der gleichen Stärke wie das der Ladung $-q'$ in B, nämlich $-\frac{q'}{\overline{AB}^2}$, und der Ausdruck für die Anziehungskraft ergibt sich danach zu

$$f = \frac{qq'}{\overline{AB}^2} = -\frac{q \cdot q'}{(d-d')^2} = -\frac{q \cdot q'}{\left(d - \frac{R^2}{d}\right)^2}.$$

Oben haben wir gesehen, daß $q' = q\frac{R}{d}$, folglich ist

$$f = -\frac{q^2 R d}{(d^2 - R^2)^2}.$$

Dies ist die Anziehungskraft als Funktion der gegebenen Größen (influenzierende Ladung und Kugel), unabhängig von der Hilfsladung q'.

Die Ladung $-q'$ in B, die wir in dieses Problem eingeführt haben, nennt man die *elektrische Abbildung* der Ladung q in A in bezug auf die Kugel K.

b) *Influenz von A auf die isolierte Kugel.* Wir überlagern nun zwei Gleichgewichtszustände.

Zuerst betrachten wir die Ladung $+q$ in A und die auf dem Potential Null liegende Kugel mit der Ladung $-q'$.

Im zweiten Fall trägt die jetzt isolierte Kugel eine Ladung $+q'$; die Ladung $+q$ ist jetzt nicht mehr vorhanden. In diesem Fall können wir die Kugel durch die in ihrem Zentrum angebrachte Ladung $+q'$ ersetzen.

Daraus folgt für das Potential der Kugel

$$V = \frac{q'}{R} = \frac{q}{d},$$

da

$$\frac{R}{d} = \frac{q'}{q}.$$

Überlagern wir nun diese beiden Gleichgewichtszustände, so erhalten wir einen neuen Gleichgewichtszustand, bei dem eine Ladung $+q$ in A vorhanden ist, während die Kugel eine Gesamtladung Null hat und auf dem Potential $\frac{q}{d'}$ liegt.

Auf der Kugel selbst existieren Bereiche mit negativer und andere mit positiver Ladung. Die Grenze zwischen diesen verschieden geladenen Bereichen ist die *neutrale Linie*, die aus Symmetriegründen ein Kreis mit der Achse AB ist (Abb. 39).

Die Äquipotentialfläche $V = \frac{q}{d}$ enthält die neutrale Linie auf dieser Kugel und gibt uns damit eine Möglichkeit, letztere zu finden.

Die Anziehungskraft, die von A auf die Kugel ausgeübt wird, ist schwächer als vorher, da die positiven Ladungen auf der Kugel die negativen Ladungen teilweise neutralisieren. (Dies zeigt uns, daß ein geerdetes elektrisches Pendel empfindlicher ist als ein isoliertes.)

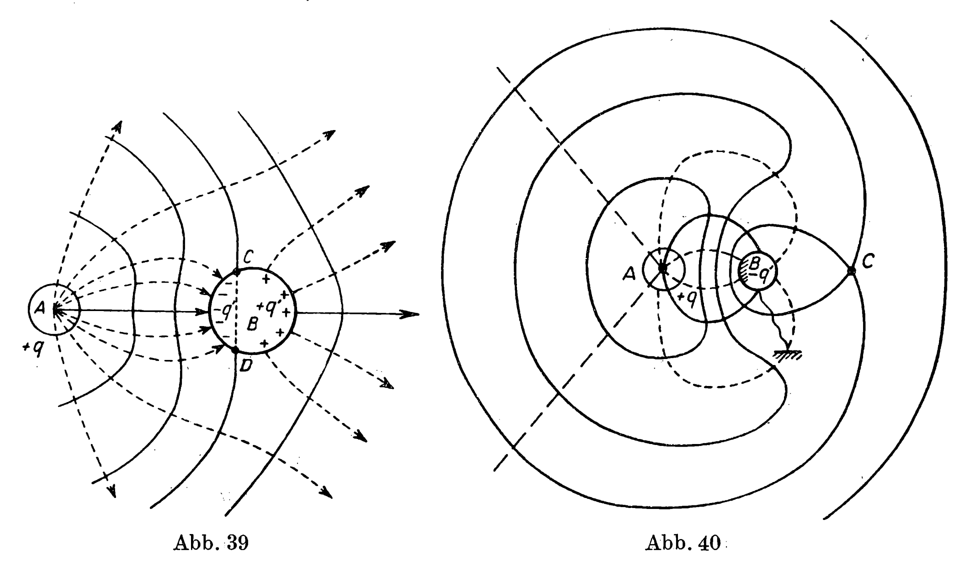


Abb. 39 Abb. 40

Die Berechnung dieser Anziehungskraft ist übrigens sehr einfach. Man berechnet die Kraft auf die Ladung $+q$ in A, die von den Ladungen $+q'$ und $-q'$ in O bzw. B erzeugt wird (Abb. 38). Wir finden also

$$f' = \frac{q^2 R^3}{d^2} \frac{2d^2 - R^2}{(d^2 - R^2)^2}.$$

Erinnern wir uns an den Fall a). Die Äquipotentialflächen und die Kraftlinien waren in dem Fall gleich, wo die Kugel geerdet war. Ist die Kugel negativ geladen, so wächst das Potential, und nahe an der Kugel wird diese vollständig von den Äquipotentialflächen umgeben.

Ebenso umgeben für die höchsten Potentialwerte die Äquipotentialflächen vollständig die Ladung A (Abb. 40).

Um es noch einmal zusammenzufassen: Bei kleinen Potentialwerten sind die Äquipotentialflächen aus zwei Flächen gebildet, deren eine im allgemeinen annähernd Kugelgestalt hat und sehr groß ist, während die andere die Kugel umgibt. Bei höheren Potentialwerten besteht die Äquipotentialfläche aus einer einzigen Fläche um A.

Verfolgen wir den Übergang zwischen diesen beiden Formen.

Wenn wir einen Punkt auf der Rotationsachse des Systems betrachten, sind die Felder der Ladung q und auf der Kugel von entgegengesetzter Richtung. Da die Ladung der Kugel kleiner als q ist, existiert auf der Achse rechts von der Kugel

ein Punkt C, in dem das Feld Null ist. Um ihn zu bestimmen, ersetzen wir die Kugel durch das elektrische Spiegelbild B $(-q')$ von A und setzen

$$AB = a.$$

Der Punkt C ist durch die Gleichung definiert:

$$\frac{q}{x^2} - \frac{q'}{(x-a)^2} = 0,$$

wobei man A als Ursprung des Koordinatensystems ansieht.

Um das Potential in der Nähe von C zu finden, machen wir eine Reihenentwicklung

$$V_M = V_C + a_1\xi + b_1\eta + a_2\xi^2 + b_2\eta\xi + c_2\eta^2,$$

in der ξ und η die auf C bezogenen Koordinaten von M sind.

Das Feld hat die Komponenten

$$-\frac{\partial V}{\partial \xi} = -a_1 + \cdots$$

und

$$-\frac{\partial V}{\partial \eta} = -b_1 + \cdots.$$

Das Feld in C ist aber Null, woraus folgt, daß $a_1 = b_1 = 0$ ist. Die Äquipotentialfläche, die durch C geht, ist in der Nähe von M gegeben durch

$$V_{M'} - V_M = a_2\xi^2 + b_2\xi\eta + c_2\eta^2 + \cdots = 0.$$

Wenn wir die Mittellinie dieser Fläche betrachten, finden wir die Tangenten in C durch Vernachlässigung der Terme niedrigen Grades. Der Punkt C ist ein zweifacher Punkt der Mittellinie der Äquipotentialfläche durch diesen Punkt. Die Äquipotentiallinien und die Kraftlinien folgen unmittelbar daraus.

Beispiel. Wir wollen nun für das obige Problem ein Beispiel berechnen (Abb. 40). Dabei sei

$$q = 1 \quad \text{und} \quad q' = \frac{1}{4},$$

C sei der Punkt, in dem das Feld verschwindet:

$$\frac{1}{x^2} - \frac{1}{4\cdot(x-a)^2} = 0,$$

dann erhalten wir

$$x = 2a.$$

Damit können wir die Kugel bestimmen, für die B die elektrische Abbildung von A ist.

Wir haben gesehen, daß $q' = q\,\dfrac{R}{d}$ war. Also erhalten wir

$$d = 4R.$$

Da nun aber

$$dd' = R^2 = \frac{d^2}{16}$$

und

$$d - d' = a$$

ist, folgt

$$d' = \frac{d}{16}, \quad d = \frac{16}{15}a, \quad d' = \frac{a}{15}.$$

Ist M ein Punkt in der Nähe von C mit den Koordinaten $2a + \xi, \eta$, so finden wir das Potential in M aus

$$V_M = \frac{1}{\sqrt{4a^2 + 4a\xi + \xi^2 + \eta^2}} - \frac{1}{4\sqrt{a^2 + 2a\xi + \xi^2 + \eta^2}}$$

$$= \frac{1}{2a}\left[\frac{1}{\sqrt{1 + \dfrac{\xi}{a} + \dfrac{\xi^2 + \eta^2}{4a^2}}} - \frac{1}{2}\,\frac{1}{\sqrt{1 + \dfrac{2\xi}{a} + \dfrac{\xi^2 + \eta^2}{a^2}}}\right].$$

Nehmen wir ε als sehr klein an, dann ist

$$\frac{1}{\sqrt{1+\varepsilon}} = (1 + \varepsilon)^{1/2} \approx 1 - \frac{\varepsilon}{2} + \frac{3}{8}\varepsilon^2$$

und daher

$$V_M = \frac{1}{2a}\left[\frac{1}{2} - \frac{\xi^2}{4a^2} + \frac{\eta^2}{8a^2} + \cdots\right] = V_C\left[1 - \frac{\xi^2}{2a^2} + \frac{\eta^2}{4a^2} + \cdots\right],$$

da das Potential in $C = \dfrac{1}{4a}$ ist. Die Tangenten an die Mittellinie der Äquipotentialfläche in C sind gegeben durch

$$\eta^2 = 2\xi^2, \quad \eta = \pm\sqrt{2}\,\xi,$$

d.h., die Neigung der Tangenten ergibt sich zu

$$\pm\sqrt{2}.$$

Um die Form dieser Mittellinie genau zu bestimmen, suchen wir ihre anderen Schnittpunkte mit der Achse auf. In diesen Punkten ist das Potential $\dfrac{1}{4a}$.

a) Links von A gilt

$$\frac{1}{4a} = \frac{1}{x} - \frac{1}{4(x+a)};$$

folglich ist

$$x^2 - 2ax - 4a^2 = 0.$$

Dabei ist nur die positive Wurzel dieser Gleichung $x = a\left(1 + \sqrt{5}\right) \approx 3{,}25a$ zu betrachten.

b) Zwischen A und B gilt

$$\frac{1}{4a} = \frac{1}{x} - \frac{1}{4(a-x)}.$$

Dann ist

$$x^2 - 6ax + 4a^2 = 0.$$

Hier kommt nur die kleinere Wurzel in Betracht:

$$x = a\left(3 - \sqrt{5}\right) \approx 0{,}75a.$$

Unsere Kenntnisse reichen jetzt aus, um die Äquipotentialflächen zu finden. Ihre orthogonalen Trajektorien geben uns die Kraftlinien an und damit den physikalischen Inhalt dieser Betrachtungen:

Die Methode der elektrischen Abbildungen kann auch verwendet werden, wenn die influenzierte Fläche eine Ebene ist. Das elektrische Spiegelbild von A ist dann eine entgegengesetzte Ladung im Punkt B, der zu A in bezug auf die Ebene symmetrisch ist. Die Lage der Punkte A und B ergibt sich, wenn man den Radius der Kugel gegen Unendlich gehen läßt, wobei sich der Kugelmittelpunkt nach Unendlich verschiebt.

Zylindrische Leiter. Methode der konjugierten Funktionen

Bei gewissen Problemen können alle Leiter als parallele und praktisch unendliche Zylinder angesehen werden. Jede Ebene senkrecht zur Zylinderachse ist eine Symmetrieebene, d.h.. daß das Feld überall parallel zu dieser Ebene ist und in allen Punkten die gleiche Richtung, die gleiche Intensität und den gleichen Richtungssinn behält, wenn diese auf Parallelen zu den Erzeugenden liegen.

Betrachten wir eine dieser Ebenen.

Die Äquipotentiallinien und die Kraftlinien bilden ein Netz orthogonaler Kurven. Wir können also von vornherein sagen, daß eine gewisse Reziprozität in ihren Eigenschaften vorhanden sein wird, und wollen dies jetzt zeigen.

Zwei Funktionen V und φ der Variablen x und y nennt man konjugiert, wenn sie folgenden Beziehungen genügen:

$$\frac{\partial V}{\partial x} = \frac{\partial \varphi}{\partial y}, \quad \frac{\partial V}{\partial y} = -\frac{\partial \varphi}{\partial x}.$$

Die Funktionen V und φ sind nun beide Lösungen der LAPLACEschen Gleichung. Es gilt tatsächlich

$$\Delta V = \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y \partial x} - \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial y} = 0,$$

desgleichen

$$\Delta \varphi = 0.$$

Wir bemerken, daß die Vorzeichen von V und φ sowohl positiv als auch negativ sein können, da

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} = \frac{\partial(-V)}{\partial y} \quad \text{und} \quad \frac{\partial \varphi}{\partial y} = -\frac{\partial(-V)}{\partial x}.$$

Ferner sind die Kurven

$$V = \text{const} \quad \text{und} \quad \varphi = \text{const}$$

orthogonal.

Längs einer Kurve $V = \text{const}$ gilt

$$\frac{\partial V}{\partial x} dx + \frac{\partial V}{\partial y} dy = 0.$$

Die Neigung der Tangente im Punkt mit den Koordinaten x, y beträgt

$$\frac{\partial y}{\partial x} = -\frac{\left(\frac{\partial V}{\partial x}\right)}{\left(\frac{\partial V}{\partial y}\right)}.$$

Längs einer Kurve $\varphi = \text{const}$, die durch diesen Punkt mit den gleichen Koordinaten x, y geht, erhalten wir

$$\frac{\partial y}{\partial x} = -\frac{\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x}\right)}{\left(\frac{\partial \varphi}{\partial y}\right)}.$$

Das Produkt der Neigungen dieser Tangenten ist

$$\frac{\left(\frac{\partial V}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x}\right)}{\left(\frac{\partial \varphi}{\partial y}\right)\left(\frac{\partial V}{\partial y}\right)} = -1,$$

woraus folgt, daß die Kurven orthogonal sind.

Wenn also die Kurven $V = \text{const}$ *die Äquipotentiallinien eines Feldes sind, bilden die Kurven* $\varphi = \text{const}$ *die Kraftlinien und umgekehrt.* Es entspricht also jedem ebenen elektrostatischen Problem, für das die Linien $\varphi = \text{const}$ und $V = \text{const}$ bekannt sind, ein anderes lösbares Problem, bei dem die Äquipotentiallinien den Kraftlinien des ersten Problems und die Kraftlinien den Äquipotentiallinien entsprechen. Nach einiger Überlegung können wir die physikalischen Größen des zweiten Problems angeben.

Beispiel: Es sei

$$V = 2q \ln \varrho; \quad \varphi = 2q\,\Theta,$$

ϱ und Θ sind Polarkoordinaten. Dieses Problem entspricht einem Potential, das von einem Rotationszylinder herrührt (vgl. weiter oben die Berechnung eines

durch einen Stab hervorgerufenen Potentials). Dabei gibt $\varphi = \text{const}$ die Kraftlinien an, die von Null ausgehende Radiusvektoren sind. Es gilt

$$V = q \cdot \ln(x^2 + y^2); \quad \varphi = 2q \operatorname{arc\,tg} \frac{y}{x};$$

$$\frac{\partial V}{\partial x} = \frac{2qx}{x^2 + y^2}; \quad \frac{\partial V}{\partial y} = \frac{2qy}{x^2 + y^2};$$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} = -\frac{2qy}{x^2 + y^2}; \quad \frac{\partial \varphi}{\partial y} = \frac{2qx}{x^2 + y^2}.$$

Die Funktionen V und φ sind konjugiert. Die Kraftlinien sind Gerade, die vom Schnittpunkt der Ebene mit der Zylinderachse ausgehen (Abb. 41).

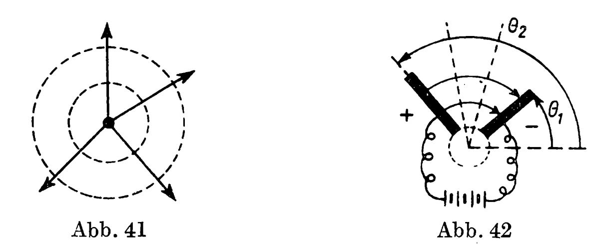


Abb. 41 Abb. 42

Nachdem wir dies gesehen haben, können wir auch setzen:

$$V = 2q\Theta; \quad \varphi = -2q \ln \varrho.$$

Dieses neue Problem erhält man aus obigem, wenn man zwei Kraftlinien unter einem Winkel von 90° durch zwei Leiter ersetzt, die eine bestimmte Potentialdifferenz V_0 besitzen (Abb. 42).

Zwischen diesen zwei leitenden Halbebenen beträgt die Potentialdifferenz

$$V_0 = 2q(\Theta_2 - \Theta_1).$$

Dadurch wird die Konstante q bestimmt.

Die Äquipotentialflächen sind die Halbebenen, die durch den Schnittpunkt der beiden Leiter gehen, und die Kraftlinien sind Kreise um die Schnittachse in diesem Punkt (Äquipotentiallinie des ersten Problems).

In der Entfernung ϱ von der Achse hat das Feld den absoluten Wert

$$E = \frac{dV}{\varrho d\Theta} = \frac{2q}{\varrho}.$$

Es behält diesen Wert entlang der Kraftlinie (da diese nicht mehr von Θ abhängt), insbesondere auch in der Nähe der Leiter bei. Die Flächendichte auf diesen ist also gegeben durch

$$\sigma = \frac{q}{2\pi\varrho}.$$

Es gibt also eine größere Ladungsdichte in der Nähe des Schnittpunktes der beiden Leiter, wie zu erwarten war, da die Ladungen verschiedene Vorzeichen haben. Auf Leitern endlicher Länge kann man also durch Integration die Gesamtladung Q berechnen.

Allgemeines Verfahren zur Bestimmung konjugierter Funktionen

Wir setzen

$$V + i\varphi = f(x + iy).$$

Wenn die Funktionen V und φ konjugiert sind, ist die Funktion f der komplexen Variablen $x + iy$ *analytisch*, d.h., daß ihre Ableitung einen bestimmten Wert hat für jedes $x + iy$ und umgekehrt; wenn die Funktion analytisch ist, kann man zeigen, daß V und φ konjugiert sind.

Um konjugierte Funktionen zu erhalten, genügt es, die Real- und Imaginärteile einer analytischen Funktion $f(x + iy)$ zu separieren.

Im vorigen Fall ist

$$f(x + iy) = \ln \varrho + i\Theta,$$

da

$$x + iy = \varrho \cdot e^{i\Theta}; \quad \ln \varrho + i\Theta = \ln(x + iy).$$

Die Funktion f ist also $\ln(x + iy)$.

$V = \ln \varrho$ und $\varphi = \Theta$ sind konjugierte Funktionen. Man kann zeigen, daß man durch Multiplikation zweier konjugierter Funktionen mit der gleichen Konstanten wieder zwei konjugierte Funktionen erhält. Also

$$V = 2q \ln \varrho; \quad \varphi = 2q\Theta.$$

Verteilung der auf einem Leiter influenzierten Ladungen

Es ist klar, daß die Ladungsverteilung sich so einstellen muß, daß die gesamte Oberfläche des Leiters eine Äquipotentialfläche ist.

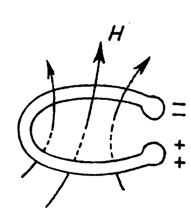


Abb. 43

Nehmen wir einmal einen ringförmigen Leiter an, und lassen einen magnetischen Fluß Φ durch diesen Ring hindurchtreten. Wenn sich der Fluß *proportional zur Zeit* ändert, entsteht zwischen den beiden Enden des Leiters eine *Potentialdifferenz*

$$U = -\frac{d\Phi}{dt} = \text{const.}$$

Es gibt also in diesem Fall auf dem Leiter eine Ladungsverteilung, die auf den ersten Blick derjenigen analog zu sein scheint, die sich bei elektrostatischer Influenz einstellt. Beide unterscheiden sich jedoch quantitativ, da die Ladungsverteilung mit der gefundenen Potentialdifferenz vergleichbar sein muß (Abb 43).

IV. KAPITEL

Kapazität. Kondensatoren

Kapazität eines im Raum isolierten Körpers

Es sei Q die Ladung eines sich im Gleichgewicht befindlichen im Raum isolierten Leiters. Wenn σ die Flächendichte ist, dann gilt für Q:

$$Q = \iint \sigma \, ds.$$

Nun ist aber nach dem GAUSSschen Theorem

$$\sigma = -\frac{1}{4\pi}\frac{\partial V}{\partial n},$$

wobei V das Potential des Leiters ist. Setzen wir dies ein, so erhalten wir

$$Q = -\frac{1}{4\pi}\iint \frac{\partial V}{\partial n}\, ds.$$

Wir sehen also, daß die *von einem Leiter getragene Ladung seinem Potential proportional ist.* (Das Potential im Unendlichen sei Null). Wir können nun den Leiter durch das Verhältnis

$$C = \frac{Q}{V}$$

charakterisieren. C nennen wir die Kapazität eines im Raum isolierten Leiters.

Einheiten der Kapazität

Wir betrachten eine Kugel mit der Ladung Q auf einem konstanten Potential V. Wollen wir nun V und Q in einem System kohärenter elektrostatischer Einheiten ausdrücken, so haben wir gesehen, daß

$$V = \frac{Q}{R}$$

ist.

In dem System der kohärenten elektrostatischen Einheiten wird also die Kapazität einer Kugel durch den gleichen numerischen Wert wie ihr Radius dargestellt.

Im elektrostatischen CGS-System wird die Kapazität also in Zentimetern gemessen.

Im praktischen Maßsystem ist die Einheit der Kapazität das Farad. Das ist die Kapazität eines Leiters, der die Ladung von 1 Coulomb besitzt, wenn er auf ein Potential von 1 Volt gehoben wird. Wir drücken jetzt ein Farad in Zentimetern aus.

1 Volt war $^1/_{300}$ elektrostatische CGS-Einheiten, 1 Coulomb $3 \cdot 10^9$ elektrostatische CGS-Einheiten; daraus ergibt sich also, daß 1 Farad $= 9 \cdot 10^{11}$ cm ist.

Das Farad ist eine sehr große Einheit; in der Praxis gebraucht man meist das Mikrofarad, welches der millionste Teil eines Farads ist und durch das Symbol μ F ausgedrückt wird.

Um eine Vorstellung von der Größe eines Farads zu geben, berechnen wir die Kapazität der Erde ($R = 6300$ km):

$$C = \frac{6{,}3 \cdot 10^8}{9 \cdot 10^{11}} = 700 \cdot 10^{-6} F = 700 \, \mu\,\mathrm{F}.$$

Die Berechnung der Kapazität eines Leiters ist selten so einfach wie im Fall der Kugel. Wir wissen jedoch, daß in allen Fällen, in denen wir die Ladungsdichte auf den Leitern, d.h. also die Felder und die Potentiale, bestimmen können, auch die Berechnung der Kapazität möglich ist.

Zum Beispiel: Betrachten wir ein Rotationsellipsoid mit der großen Achse $2a$, dessen Brennpunkte die Entfernung $2c$ voneinander haben. Sein Potential ist in diesem Fall gegeben durch

$$V = \lambda \ln \frac{a+c}{a-c},$$

wenn $Q = 2\lambda c$ seine Ladung ist. Seine Kapazität ergibt sich also zu

$$C = \frac{2c}{\ln \frac{a+c}{a-c}}.$$

Wenn c gegen Null, geht das Ellipsoid gegen eine Kugel mit dem Radius a, also

$$\ln \frac{a+c}{a-c} = \ln \frac{1+\frac{c}{a}}{1-\frac{c}{a}} = \frac{2c}{a}.$$

Im Grenzfall ist $C = a$. Dies aber ist der Ausdruck, den wir direkt für die Kapazität einer Kugel erhielten.

Wenn c gegen a geht, dann wird das Ellipsoid zu einem Stab mit dem Radius b und der Länge $2a$. Die Kapazität dieses Körpers beträgt dann

$$C = \frac{a}{\ln \frac{2a}{b}}.$$

Dies ist die Kapazität eines *Drahtes*, die man auch direkt durch die Anwendung des GAUSSschen Theorems finden kann.

Für den Fall eines abgeplatteten Rotationsellipsoids liefert eine Methode, die wir nicht entwickeln wollen, die Kapazität

$$C = \frac{c}{\arcsin \frac{c}{a}}.$$

Geht c gegen Null, so wird die Kapazität C gleich a, d. h., wir haben eine Kugel.

Geht C dagegen gegen a, wird das Ellipsoid zu einer *flachen Scheibe*, und die Kapazität ist gegeben durch $\frac{2}{\pi}a$; die einer Kugel mit dem gleichen Radius ist 1,571mal größer, obwohl ihre Oberfläche das Doppelte der beiden Scheibenflächen ausmacht.

Verformt man einen Leiter so, daß sich die Ladungen gegenseitig voneinander entfernen können, so nimmt die „Kapazität“ zu, während umgekehrt die Abstoßung zwischen Ladungen gleichen Vorzeichens abnimmt.

Kapazitäten und Influenzkoeffzienten

Wir wollen jetzt an Stelle eines im Raum isolierten Leiters ein System von n Leitern $A_1, A_2, \ldots, A_n$ betrachten, welche die Ladungen $Q_1, Q_2, \ldots, Q_n$ tragen und sich auf den Potentialen $V_1, V_2, \ldots, V_n$ befinden. Dazu stellen wir zuerst folgenden Fundamentalsatz auf:

Theorem: *In einem System von n elektrisch geladenen Leitern, die sich im Gleichgewicht befinden und deren Gestalt und Lage im Raum unveränderlich sind, ist das Potential eines Leiters eine lineare, homogene Funktion der auf allen Leitern verteilten Ladungen.*

Wir müssen zu diesem Zweck an die Überlagerung von Gleichgewichtszuständen anknüpfen. Betrachten wir zuerst den Gleichgewichtszustand, in dem der Leiter A_1 die Ladung $+1$ trägt, während alle anderen Leiter ungeladen sind. Die Potentiale der Leiter $A_1, \ldots, A_n$ sind in diesem Falle $a_{11}, a_{12}, \ldots, a_{1n}$.

Überlagern wir jetzt Q_1 Gleichgewichtszustände, die dem eben betrachteten gleich sind. Der Gleichgewichtszustand (1) wird also durch die folgende Tabelle definiert:

(I)	Leiter	A_1	A_2	A_3	$\cdots A_n$,
	Ladungen	Q_1	0	0	$\cdots 0$,
	Potentiale	$a_{11}Q_1$	$a_{12}Q_1$	$a_{13}Q_1$	$\cdots a_{1n}Q_1$.

Wir betrachten jetzt die Gleichgewichtszustände (2) $\cdots$ (n), die wir in gleicher Weise erhalten.

(II)	Leiter	A_1	A_2	A_3	$\cdots A_n$,
	Ladungen	0	Q_2	0	$\cdots 0$,
	Potentiale	$a_{21}Q_2$	$a_{22}Q_2$	$a_{23}Q_2$	$\cdots a_{2n}Q_2$.
	....	....	....	....	....
(n)	Leiter	A_1	A_2	A_3	$\cdots A_n$,
	Ladungen	0	0	0	$\cdots Q_n$,
	Potentiale	$a_{n1}Q_n$	$a_{n2}Q_n$	$a_{n3}Q_n$	$\cdots a_{nn}Q_n$.

Überlagern wir nun alle diese Gleichgewichtszustände, so erhalten wir einen Gleichgewichtszustand, in dem die Ladung des Leiters A_i gerade Q_i beträgt. Dies ist der gegebene Gleichgewichtszustand. Man erhält also

$$\begin{aligned}
V_1 &= a_{11}Q_1 + a_{21}Q_2 + \cdots + a_{n1}Q_n,\\
V_2 &= a_{12}Q_1 + a_{22}Q_2 + \cdots + a_{n2}Q_n,\\
&\vdots\\
V_n &= a_{1n}Q_1 + a_{2n}Q_2 + \cdots + a_{nn}Q_n,
\end{aligned}$$

wodurch das Theorem bewiesen wird.

Im allgemeinen löst man dieses Gleichungssystem nach den Ladungen auf:

$$\begin{aligned}
Q_1 &= c_{11}V_1 + c_{12}V_2 + \cdots + c_{1n}V_n,\\
Q_2 &= c_{21}V_1 + c_{22}V_2 + \cdots + c_{2n}V_n,\\
&\vdots\\
Q_n &= c_{n1}V_1 + c_{n2}V_2 + \cdots + c_{nn}V_n.
\end{aligned}$$

(Man kann dieses Gesetz direkt finden, wenn wir ähnlich wie bei der Darstellung der Potentiale als Funktion der Ladungen vorgehen.)

Den Koeffizienten c_{ii} bezeichnet man als *Kapazität des Leiters* A_i, *wenn noch andere Leiter vorhanden sind.* Die Koeffizienten c_{ij} $(j \neq i)$ nennt man *Influenzkoeffizienten.*

Beispiel für die Bestimmung von Kapazitäten und Influenzkoeffizienten in einem Leitersystem

Wir betrachten z. B. ein dreiadriges Kabel, d. h. ein Kabel mit drei Leitern, und wollen jetzt die Kapazitäten und die Influenzkoeffizienten dieser drei Leiter bestimmen. Q_1, Q_2, Q_3 sind die Ladungen dieser Leiter, die sich auf den Potentialen V_1, V_2, V_3 befinden:

$$\begin{aligned}
Q_1 &= c_{11}V_1 + c_{12}V_2 + c_{13}V_3,\\
Q_2 &= c_{21}V_1 + c_{22}V_2 + c_{23}V_3,\\
Q_3 &= c_{31}V_1 + c_{32}V_2 + c_{33}V_3.
\end{aligned}$$

Wir wollen nun die Leiter (2) und (3) erden, d.h. $V_2 = V_3 = 0$ setzen. Um den Wert von V_1 zu bestimmen, verbinden wir den Leiter (1) mit einem Pol einer Stromquelle, deren anderer Pol geerdet ist.

Wir haben also

$$V_1 = c_{11}Q_1.$$

Die Messung von Q_1 wird mit einem *ballistischen Galvanometer G* durchgeführt, dessen Ausschlag nach dem Schließen des Stromkreises proportional Q_1 ist (vgl. Abb. 44).

Nun wollen wir das ballistische Galvanometer zwischen den Leiter (2) und Erde legen (Abb. 45) und messen Q wieder nach dem Schließen des Stromkreises; wir erhalten

$$Q_2 = c_{21} V_1 .$$

Daraus ergibt sich c_{21}.

Diesen gleichen Vorgang wiederholen wir jetzt, legen aber diesmal das Galvanometer zwischen den Leiter (3) und Erde. So erhalten wir c_{31}.

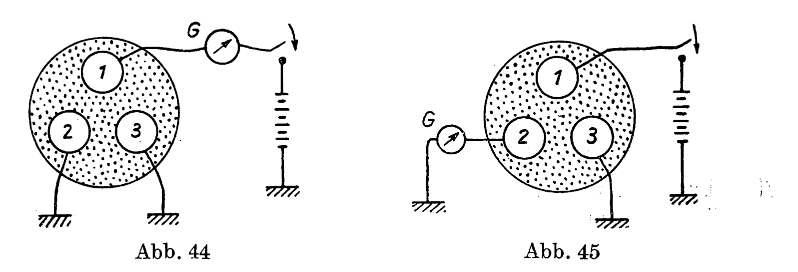


Abb. 44 Abb. 45

In der gleichen Weise bestimmen wir nun alle anderen Kapazitäten und Koeffizienten des Systems.

Elektrostatische Energie eines Leitersystems

Es seien n Leiter auf Potentialen $V_1, \ldots, V_n$ gegeben, die die Ladungen $Q_1, \ldots, Q_n$ tragen. Um eine zusätzliche Ladung auf einen der Leiter zu bringen, benötigen wir eine gewisse Arbeit, da elektrische Kräfte vorhanden sind, die dieser Ladungsvergrößerung entgegenwirken.

Die elektrostatische Energie eines Systems von Leitern ist die Energie, die das System aufbringen muß, um einen vorgegebenen Gleichgewichtszustand zu erlangen, wobei wir davon ausgehen, daß in dem System vorher sowohl alle Potentiale als auch alle Ladungen Null waren.

Die Abstoßungskräfte, die einer Ladungsvergrößerung entgegenwirken, rühren von einem Potential her. Die effektive Arbeit hängt also nur von dem Anfangs- und Endzustand des Systems ab und keineswegs von der Art des Überganges zwischen beiden.

Wir werden nun die Leiter so aufladen, daß in einem beliebigen Augenblick die Potentiale von $A_1, \ldots, A_n$ gleich $x V_1, x V_2, \ldots, x V_n$ und die ihnen entsprechenden Ladungen $x Q_1, x Q_2, \ldots, x Q_n$ sind; x ist dabei eine Zahl zwischen 0 und 1.

Bringen wir nun eine zusätzliche Ladung $d Q_1 = Q_1 d x$ auf den Leiter A_1, so benötigen wir hierbei eine Arbeit

$$d V_1 = x V_1 d Q_1 = V_1 Q_1 x d x .$$

Die elektrostatische Energie des Leiters A_1 ist also

$$W_1 = \int_0^1 V_1 Q_1 x \, d x = \frac{1}{2} V_1 Q_1 .$$

Die elektrostatische Energie des Systems setzt sich nun aus den Energien der einzelnen Leiter zusammen, die die Ladungen tragen:

$$W = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n} Q_i V_i.$$

Da nun

$$Q_i = \sum_{j=1}^{n} c_{ij} V_j$$

ist, folgt

$$W = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} c_{ij} V_i V_j.$$

Eigenschaften der Koeffizienten c_{ii} und c_{ij}

Wir nehmen an, daß sich der Leiter A_1 auf dem Potential $+1$ befinde, die anderen Leiter dagegen auf dem Potential Null. A_1 trage die positive Ladung

$$Q_1 = c_{11}.$$

Nun werden die anderen Leiter durch Influenz negativ geladen:

$$Q_2 = c_{21},$$

$$\dots\dots\dots$$

$$Q_n = c_{n1}.$$

Diese Ladungen genügen dem Theorem der korrespondierenden Elemente (Abb. 46); im allgemeinen gibt es keine vollständige Influenz. So wird also die Absolutsumme der auftretenden negativen Ladungen kleiner sein als die influenzierende Ladung:

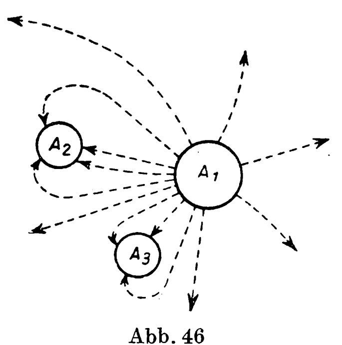


Abb. 46

$$c_{11} > |c_{21} + c_{31} + \cdots + c_{n1}|.$$

Wir haben also folgende Eigenschaften der Koeffizienten festgestellt:

$$c_{ii} > 0; \quad c_{ij} < 0;$$

$$c_{ii} > |\Sigma c_{ij}| \quad \text{(Summation über } j).$$

Wir wollen jetzt zeigen, daß

$$c_{ij} = c_{ji}$$

ist. Dazu ist es notwendig, vorher zu den Koeffizienten a_{ij} überzugehen und zu zeigen, daß

$$a_{ij} = a_{ji}.$$

Dazu betrachten wir die Energie $dW = \Sigma V_i \, dq_i$, d.h. die Vergrößerung der Energie des Systems bei der Aufbringung der zusätzlichen Ladung dq_i auf jeden Leiter. Wir sehen also:

$$\frac{\partial W}{\partial q_i} = V_i.$$

Da jedoch

$$V_i = \sum_j a_{ij} q_j$$

ist, folgt also

$$a_{ij} = \frac{\partial V_i}{\partial q_i} = \frac{\partial^2 W}{\partial q_i \partial q_j} = \frac{\partial^2 W}{\partial q_j \partial q_i} = a_{ji}.$$

Die Determinante der a_{ji} ist also symmetrisch, und wir können daraus die gleiche Eigenschaft für die der c_{ij} folgern, d.h.

$$c_{ij} = c_{ji}.$$

Kondensatoren

Wir wollen jetzt zwei Leiter (1) und (2) betrachten, die so angeordnet sind, daß eine vollständige Influenz auftritt. Es sei z.B. der Leiter (1) im Inneren des Leiters (2) angebracht. Nehmen wir nun an, daß der Leiter (1) eine Ladung Q trägt, dann entsteht auf der Innenfläche des Leiters (2) eine Ladung $-Q$, die durch Influenz des Leiters (1) hervorgerufen wird (Abb. 47). Wir können also schreiben:

$$Q = c_{11} V_1 + c_{12} V_2,$$
$$-Q = c_{21} V_1 + c_{22} V_2.$$

Dabei sind V_1 und V_2 die Potentiale der Leiter (1) und (2). Nun addieren wir diese beiden Gleichungen und erhalten

$$V_1(c_{11} + c_{21}) + V_2(c_{12} + c_{22}) \equiv 0.$$

Aus dieser Identität ergibt sich unabhängig von V_1 und V_2

$$c_{11} + c_{21} = 0,$$
$$c_{12} + c_{22} = 0.$$

Also ist

$$c_{12} = c_{21} = -c_{11} = -c_{22} = -c,$$
$$Q = c(V_1 - V_2).$$

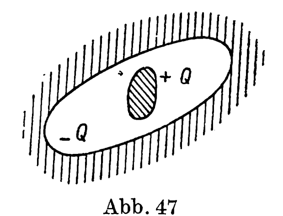
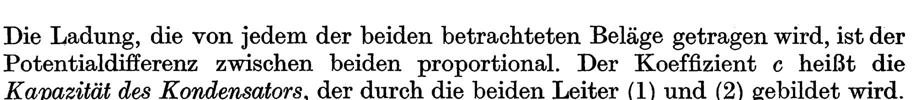


Abb. 47


Die Ladung, die von jedem der beiden betrachteten Beläge getragen wird, ist der Potentialdifferenz zwischen beiden proportional. Der Koeffizient c heißt die *Kapazität des Kondensators*, der durch die beiden Leiter (1) und (2) gebildet wird.

Wir wollen nun die Kapazität der einfachsten Kondensatoren berechnen.

Kugelkondensatoren

Ein solcher Kondensator besteht aus einer leitenden Kugel (1), die von einem zweiten Leiter (2) vollständig umgeben ist, dessen innere Oberfläche kugelförmig ist, während seine äußere Oberfläche beliebig sein kann (Abb. 48).

Der Leiter (1) trägt die Ladung Q. Das Feld im Innern des Hohlraumes im Punkt M in der Entfernung R von O ist dann gegeben durch $\frac{Q}{R^2}$, da die Ladung von (2) keine Wirkung ausübt und die Ladung von (1) als im Zentrum befindlich betrachtet werden kann.

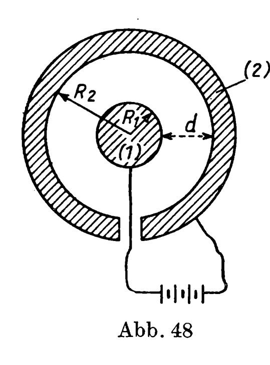


Abb. 48

Die Potentialdifferenz $V_1 - V_2$ ist also gegeben durch das negative Feldintegral

$$V_1 - V_2 = -\int_{R_1}^{R_2} \frac{Q}{R^2}\, dr = Q\left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2}\right).$$

Folglich ist

$$C = \frac{Q}{V_1 - V_2} = \frac{1}{\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2}} = \frac{R_1 R_2}{R_2 - R_1}.$$

Interessant wird der Fall dann, wenn R_1 und R_2 ungefähr gleich sind:

$$R_2 = R_1 + d; \quad R_1 R_2 \approx R_1^2 = \frac{S}{4\pi};$$

S ist dabei die Oberfläche der Leiter:

$$C = \frac{S}{4\pi d}.$$

Wenn man die Kugeln durch Ebenen ersetzt, d.h., R_1 und R_2 sehr groß werden läßt, so erhält man einen *Plattenkondensator*. Damit die Fläche endlich bleibt, genügt es, auf der Kugel ein Flächenstück zu isolieren, das zu einem ebenen Element der Fläche S wird. Wir erhalten also für die Kapazität eines Plattenkondensators die Formel

$$C = \frac{S}{4\pi d}.$$

Diese Formel gilt für jeden Wert von d, da R unendlich ist. Dabei ist vorausgesetzt, daß das Feld senkrecht zu den Leitern verläuft.

Zylinderkondensatoren

Wir sind also in der Lage, die Kapazität eines Kondensators zu berechnen, wenn wir seine Feldverteilung bestimmen können, die durch die Ladungsverteilung gegeben ist. Wir erhalten aus der Feldstärke die Potentiale durch Integration und aus der Gleichung $Q = C(V_1 - V_2)$ die Größe C.

Betrachten wir jetzt den Fall eines Kondensators, der durch zwei koaxiale Zylinder mit den Radien R_1 und R_2 gebildet wird (Abb. 49).

Wir wollen nun das Feld im Abstand r von der Achse berechnen. Dieses Feld liegt offensichtlich in einer Meridianebene und steht senkrecht auf der Achse. Sein Wert hängt nicht von dem betrachteten Meridian ab.

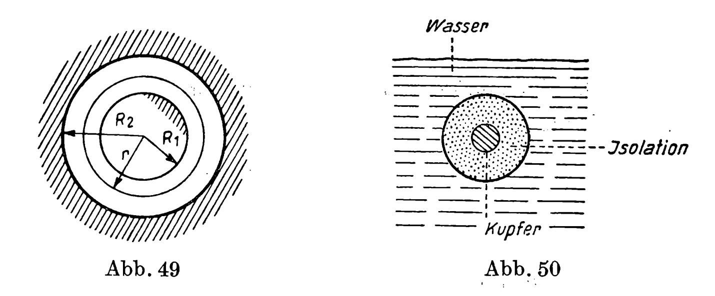


Abb. 49 Abb. 50

Besitzt der Zylinder den Radius r und die Höhe 1, so ist der aus diesem Zylinder austretende Fluß gegeben durch

$$\Phi = 2\pi r E(r).$$

Wenn andererseits q die Ladung des inneren Zylinders pro Längeneinheit ist, so gilt

$$\Phi = 4\pi q \qquad \text{(Gausssches Theorem)},$$

und folglich ist

$$E = \frac{2q}{r} \qquad (R_1 < r < R_2).$$

Für das Potential ergibt sich dann

$$V = 2q \ln r + \text{const}.$$

Die Potentialdifferenz zwischen den beiden zylindrischen Belägen beträgt

$$V_1 - V_2 = 2q \ln \frac{R_2}{R_1}$$

und die Kapazität pro Längeneinheit

$$C = \frac{1}{2 \ln \frac{R_2}{R_1}}.$$

In dieser Formel muß C dimensionslos sein, da im elektrostatischen System eine Kapazität die Dimension einer Länge hat.

Ein isoliertes Kabel (Abb. 50) stellt einen wirklichen Kondensator dar, wobei die Beläge des Kondensators durch den Leiter und die Erde oder das Meerwasser gebildet werden. Das Dielektrikum wird durch die Isolation des Kabels

gegeben. Die Kapazität in Mikrofarad pro Kilometer Kabellänge wird durch eine praktische Formel dargestellt, die man leicht nachprüfen kann:

$$C = \frac{0{,}0242\,\varepsilon}{\log \frac{R_2}{R_1}},$$

ε ist dabei die Dielektrizitätskonstante der Isolation.

Bemerkung I. Erinnern wir uns der Formel

$$C = \frac{1}{2 \ln \frac{R_2}{R_1}}$$

und nehmen an, daß R_1 und R_2 nur wenig differieren:

$$R_2 = R_1 + d,$$

$$\ln \frac{R_2}{R_1} = \ln\left(1 + \frac{d}{R_1}\right) = \frac{d}{R_1} + \cdots.$$

Folglich ist

$$C = \frac{R_1}{2d} = \frac{2\pi R_1}{4\pi d} = \frac{S}{4\pi d}.$$

Wir erhalten also die gleiche Formel wie für den Kugelkondensator und den Plattenkondensator.

Bemerkung II. Bei einem Plattenkondensator mit endlichen Dimensionen steht das Feld am Plattenrand nicht mehr senkrecht zu den Platten. Die durchgeführte Berechnung gilt hier also nicht exakt. (In der Abb. 51 ist dagegen die wirkliche Verteilung der Äquipotentiallinien dargestellt.)

Andererseits weicht der tatsächliche Wert des Feldes um weniger als 10^{-4} von seinem theoretischen Wert ab, wenn man sich in einer Entfernung vom Plattenrand befindet, die größer ist als der Plattenabstand d. Eine Korrektion ist daher nicht erforderlich.

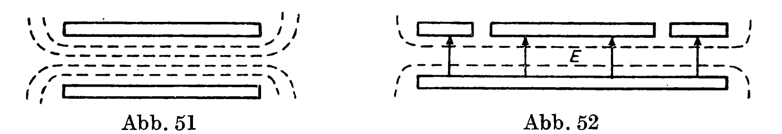


Abb. 51 Abb. 52

Es ist möglich, diesen Effekt durch einen „Schutzring“ fast völlig auszugleichen. Einer der Leiter ist kleiner als der andere und von einem Schutzleiter umgeben, der sich auf gleichem Potential befindet (Abb. 52).

In die Berechnung der Kapazität des Kondensators geht nur die Mittelplatte ein, da wegen des Schutzringes das Feld zwischen den Platten in jedem Punkt senkrecht zu diesen steht. Dieser Kunstgriff wurde zuerst von Lord KELVIN angewandt.

Die Dielektrizitätskonstante

Bei allem, was wir bisher über die Elektrostatik ausgesagt haben, galt als Voraussetzung, daß sich die Leiter im Vakuum befanden.

Nehmen wir jetzt an, daß ein Dielektrikum vorhanden sei, d.h. eine isolierende Zwischenschicht zwischen den beiden Belägen eines Kondensators. Das Experiment zeigt, daß sich dann seine Kapazität verändert und seine Kapazitätsänderung durch einen Proportionalitätsfaktor ε angegeben werden kann, der für dieses Dielektrikum charakteristisch ist. So ergibt sich z.B. für den Plattenkondensator

$$C = \frac{\varepsilon S}{4\pi d},$$

wobei ε ein Koeffizient größer als 1 (ausgenommen ionisierte Gase) ist und *Dielektrizitätskonstante* genannt wird. Wir geben hier eine Tabelle von ε für gebräuchliche Isolatoren an.

Hartgummi	$\varepsilon = 2{,}8$	Schwefelkohlenstoff (flüssig)	$\varepsilon = 2{,}63$
Glimmer	$\varepsilon = 8$	Luft bei 0°C und 760 mm Hg	$\varepsilon = 1{,}000576$
Paraffin	$\varepsilon = 2{,}3$	CO_2 bei 0°C und 760 mm Hg	$\varepsilon = 1{,}000987$
Guttapercha	$\varepsilon = 4{,}4$		
Glas (je nach der Zusammensetzung	$\varepsilon = 5–7$		

Diese Werte sind bezogen auf die Dielektrizitätskonstante des Vakuums, die als Einheit gilt. Sie geben also die Absolutwerte im elektrostatischen CGS-System an, während man sie in allen anderen Maßsystemen mit dem Wert der Dielektrizitätskonstanten des Vakuums in diesem System multiplizieren muß.

Die anisotropen Körper (Kristalle) haben eine Dielektrizitätskonstante, die von der Richtung des Feldes abhängt. Wir bemerken, daß dies z.B. für Glimmer gilt, müssen also darauf achten, daß bei der Verwendung dünner Schichten immer die gleiche Orientierungsrichtung gewahrt bleibt.

Ferner weisen wir darauf hin, daß sich die Dielektrizitätskonstante eines gegebenen Körpers etwas mit der Temperatur verändert.

Das Seignettesalz, ein Doppeltartrat des Kaliums und des Natriums, das einen piezoelektrischen Körper bildet, erreicht in einem bestimmten Temperaturbereich eine Dielektrizitätskonstante $\varepsilon = 2000$. Hierbei handelt es sich um einen Ausnahmefall, analog den magnetischen Eigenschaften der ferromagnetischen Stoffe.

Die Dielektrizitätskonstante von *Bariumtitanat* liegt ebenfalls in der Größenordnung von 1200. Wegen der feuerfesten Eigenschaften des Bariumtitanats kann man daraus mit gewissen Bindemitteln *Keramische Stoffe* herstellen, die es ermöglichen, Kondensatoren hervorragender Güte anzufertigen. (Siehe auch *technische Kondensatoren.*)

Durchschlagsfestigkeit

Die Dielektrika werden nicht nur durch ihre Dielektrizitätskonstante charakterisiert, sondern auch durch ihre *Durchschlagsfestigkeit*, d.h. durch die maximale Feldstärke, die sie ohne Beschädigung ertragen können. Bei einer größeren

Feldstärke springt ein Funken zwischen den beiden Leitern über und durchlöchert dabei den Isolator. Dies nennt man *Durchschlag.*

Die Potentialdifferenz, die nötig ist, um einen Funken zu erzeugen, wächst mit der Dicke des Dielektrikums an, ohne ihr jedoch direkt proportional zu sein. Es ist trotzdem von einiger Wichtigkeit, die Durchschlagsfestigkeit zu kennen. Sie kann andererseits auch als die Potentialdifferenz definiert werden, die einen Funken zwischen den Leitern hervorruft, wenn das Dielektrikum eine Dicke von 1 cm hat. $\left(\text{Es war } \mathfrak{E} = -\frac{\partial V}{\partial n}.\right)$ Nimmt man eine Proportionalität zwischen der Durchschlagsspannung und der Dicke des Dielektrikums an, so läßt sich die Stärke des Dielektrikums eines Kondensators angeben, an den man eine vorgegebene Potentialdifferenz ohne Durchschlag anlegen kann.

Die folgende Tabelle gibt Durchschlagsfestigkeiten für häufig gebrauchte Isolatoren an. Sie gelten in einem homogenen Feld und sind in kV/cm angegeben.

Luft (trocken)	32	Papier	40–100
Petroleum	65	Ölpapier	400–500
Glas	75–300	Glimmer	600–750

Die Durchschlagsfestigkeit guter Isolatoren nimmt mit anwachsender Temperatur sehr stark ab.

Dielektrische Verluste

An die beiden Elektroden eines Kondensators, die ein Dielektrikum einschließen (fest oder flüssig), legen wir eine hohe Gleichspannung unterhalb der Durchschlagsspannung. Dabei kann es vorkommen, daß sich das Dielektrikum etwas erwärmt. Diese Tatsache erklärt sich einfach dadurch, daß dieses Dielektrikum kein vollkommener Isolator ist, sondern einen bestimmten großen Widerstand darstellt und ein schwacher Strom eine geringe JOULEsche Wärme erzeugt.

Legen wir jedoch eine *Wechselspannung* an den Kondensator, so stellen wir eine bedeutend größere Erwärmung fest, die im allgemeinen mit der Frequenz anwächst. Der Grund hierfür liegt in den Veränderungen der Orientierung der Moleküle, die durch die Richtungswechsel des äußeren Feldes hervorgerufen werden. Dieser Orientierungswechsel findet mit einer Verzögerung statt, die durch die viskose Reibung zwischen den benachbarten Molekülen hervorgerufen wird. Die Reibungsarbeit dieser Moleküle tritt nun als Wärme auf und ist die Ursache oder wenigstens die Hauptursache der *dielektrischen Verluste.* Diese Erscheinung wird dem Leser nach dem Studium der *Wechselströme* völlig klar sein. Die dielektrischen Verluste steigen mit anwachsender Temperatur des Dielektrikums stark an.

Energie eines Kondensators

Die Energie eines Kondensators ist in seinem Dielektrikum lokalisiert, wie wir leicht durch folgendes Experiment feststellen können: Betrachten wir einen Kondensator, dessen zwei Elektroden durch Metallbecher dargestellt sind, während

sein Dielektrikum als Glasbecher ausgebildet ist. Diese Becher sind ineinander gestellt, wie aus Abb. 53 und 54 hervorgeht. Zuerst laden wir den Kondensator auf und entfernen dann die beiden Leiter vom Dielektrikum. Dann entladen wir sie, indem wir sie mit der Hand berühren. Wenn wir nun die verschiedenen Teile des Kondensators in ihre ursprüngliche Stellung zurückbringen und die Leiter mit Hilfe eines Entladers verbinden, der z. B. die in Abb. 54 dargestellte Form haben

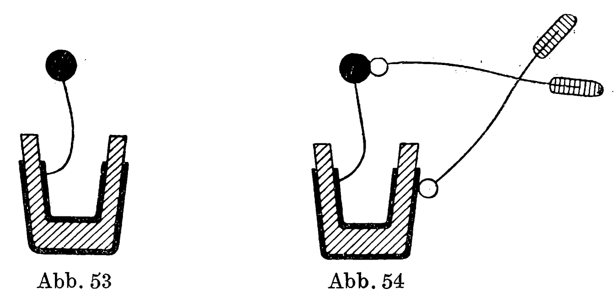


Abb. 53 Abb. 54

kann, stellen wir fest, daß ein Funke zwischen einem Leiter und einer Kugel des Entladers überspringt, wenn man mit der anderen Kugel in Kontakt die zweite Elektrode berührt. Der Kondensator wurde also wieder aufgeladen; die Energie befand sich „im“ Dielektrikum, während die Ladungen „auf“ der Oberfläche verteilt waren. (Siehe weiter unten: *Elektrophore.*)

Diese Tatsache hatte in der Theorie bedeutende Konsequenzen. Sie führte MAXWELL zum Begriff des Verschiebungsstroms, der die theoretische Vorhersage der HERTZschen Wellen ermöglichte.

Kondensation der Elektrizität

Wir wollen 2 Leiter (Abb. 55) betrachten, von denen der eine am negativen, der andere am positiven Pol einer Spannungsquelle liegt, die zwischen beiden eine konstante Potentialdifferenz V aufrechterhält. Nun nähern wir die beiden Leiter einander.

Das Feld, das die Größe $\frac{V}{d}$ hat, wobei d der Abstand zwischen beiden Leitern ist, wächst bei dieser Verschiebung an und ebenfalls die Ladungen der beiden Leiter nach dem COULOMBschen Theorem. Es gelangt so durch die Annäherung mehr Elektrizität auf die Leiter, während die gleiche Potentialdifferenz bestehenbleibt. Diesen Vorgang nennt man *Kondensation der Elektrizität.*

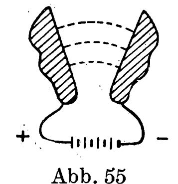


Abb. 55

Machen wir nun den umgekehrten Versuch. Wir entfernen nach der Aufladung die Spannungsquelle und vergrößern dann den Abstand zwischen beiden Leitern: die Feldstärke auf ihrer Oberfläche behält jetzt den gleichen Wert, die Potentialdifferenz zwischen den Leitern wächst jedoch an.

Wir haben hier zwei Auswirkungen des gleichen Phänomens: Die Kapazität wächst an (nimmt ab), wenn die beiden Leiter einander genähert werden (voneinander entfernt werden). Die verschiedenen Effekte, die sich aus diesem Phänomen

ergeben, kann man mit dem in Abb. 56 dargestellten *Kondensatorelektroskop von* VOLTA nachweisen.

Dieser Apparat besteht aus einem Goldblattelektroskop, bei dem die Kugel durch eine Kondensatorplatte ersetzt ist, die mit einer sehr dünnen Isolierschicht überzogen wurde. Eine zweite Kondensatorplatte, die einen Isolierstab trägt, ist auf der Isolierschicht der ersten Platte angebracht. Diese ist mit dem Gehäuse des Elektroskops verbunden. Wegen der geringen Dicke der Isolierschicht hat dieser Kondensator eine sehr große Kapazität in bezug auf die erste Platte.

Wir verbinden jetzt die obere Kondensatorplatte mit dem positiven und die untere mit dem negativen Pol eines Akkumulators. Der Ausschlag des Elektroskops

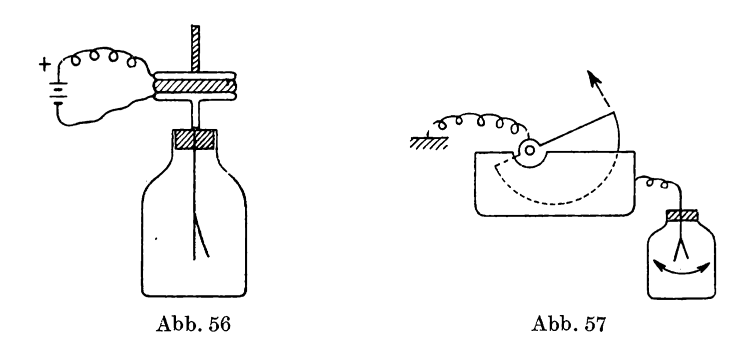


Abb. 56 Abb. 57

ist kaum bemerkbar. Entfernen wir nun die obere Platte des Kondensators, nachdem wir die Verbindungen mit dem Akkumulator unterbrochen haben, so vergrößert sich der Ausschlag des Elektroskops merklich.

Dieses Experiment kann auch auf folgende Art durchgeführt werden (Abb. 57): Wir verbinden den Stator eines Drehkondensators mit der Kugel eines Goldblattelektroskops und legen den Rotor an Masse. Dann verringern wir die Kapazität des Kondensators nach der Aufladung, indem wir den Rotor herausdrehen, und stellen fest, daß das Elektroskop ausschlägt.

Leidener Flasche

Die Kondensation der Elektrizität wurde zum erstenmal mit einer sogenannten *Leidener Flasche* durchgeführt.

Dieser Kondensator wird durch eine Flasche gebildet, die innen und außen mit Staniolpapier beklebt ist. Er ist jedoch als veraltet zu betrachten und wird heute nicht mehr benutzt. Wir geben ihn nur aus historischen Gründen an, da er die erste Ausführung eines Kondensators darstellt.

Entwickelt wurde dieser Kondensator in Leiden von MUSSCHENBROEK, der am 20. April 1746 in einem Brief an RÉAUMUR schrieb:

„Ich habe Ihnen über ein neues, aber schreckliches Experiment zu berichten und gebe Ihnen den Rat, es nicht zu wiederholen“ (Abb. 58).

„Ich habe einige Untersuchungen über die Kraft der Elektrizität durchgeführt. Zu diesem Zweck hatte ich an zwei Seidenfäden ein Eisenrohr aufgehängt, das mit einer Glaskugel verbunden war. Diese Kugel konnte man schnell um ihre Achse

drehen und sie dabei durch Reibung mit meinen Händen elektrisieren. Diese Elektrizität ging auf mein Eisenrohr über. Am anderen Ende des Rohres hing ein Messingdraht, der in ein Glasgefäß mit Wasser tauchte. Dieses Glasgefäß hielt ich in der rechten Hand, während ich mit der linken Hand versuchte, aus dem elektrisierten Eisenrohr Funken zu ziehen. Plötzlich erhielt ich einen so heftigen elektrischen Schlag an meiner rechten Hand, daß ich am ganzen Körper zitterte, als habe mich der Blitz getroffen ... Nicht nur mein Arm, sondern der ganze Körper wurde in einer schrecklichen Art mitgenommen; ich dachte, es sei aus mit mir."

MUSSCHENBROEK hatte durch seinen Körper einen Kondensator entladen, wobei seine rechte Hand als eine Elektrode dieses Kondensators wirkte.

Diese Versuche wurden in Paris von Abbé NOLLET wiederholt. Er erkannte dabei die Bedeutung der Glasdicke und der Oberflächengröße und gelangte auf diesem

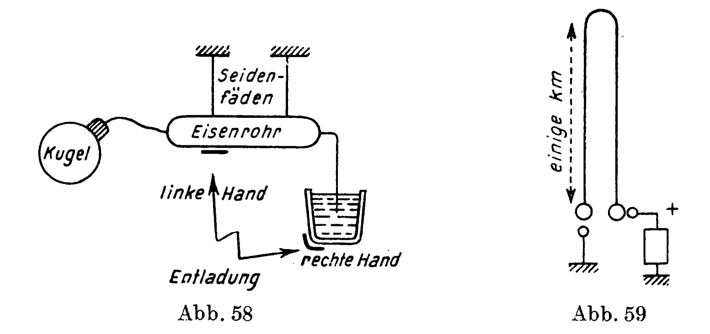


Abb. 58 Abb. 59

Wege zur „Leidener Flasche". Er ließ eine große Anzahl von Menschen sich so in eine Reihe stellen, daß sie sich berührten, und berührte den ersten und letzten der Reihe jeweils mit einem Pol einer Leidener Flasche. In Versailles, vor dem König und dem Hof wurde dieser Versuch mit einer Kompanie (240 Gardesoldaten) durchgeführt, die sehr heftig reagierte. Er wurde von Mitgliedern des Chartreuser Ordens wiederholt, die sich in einer 3 km langen Kette aufstellten. Die nebeneinanderstehenden Mönche waren jeweils durch einen Eisendraht leitend verbunden.

Über die Frage nach der *Geschwindigkeit des Stromdurchganges* sagte ein gewisser LEMONNIER:

„Der Durchgang der Elektrizität durch einen Draht von der Länge 12276 Fuß (ungefähr 4 km) geschah augenblicklich." Tatsächlich benötigt der Strom dazu $^1/_{75000}$ Sekunde.

Kurze Zeit danach ergab ein mit einem Drehspiegel durchgeführter Versuch, bei dem zwei Funken in A und B erzeugt wurden (A und B waren durch einen Draht von einigen Kilometern Länge verbunden), daß die Ausbreitungsgeschwindigkeit des Stromes in der Größenordnung der Lichtgeschwindigkeit liegt (Abb. 59).

Es existiert noch eine deutsche Version der Entdeckung der Leidener Flasche, die etwas verschieden von der eben betrachteten ist: „Der Prälat von KLEIST wollte Elektrizität in eine Flasche einschließen. Am 10. Oktober 1745 nahm er eine Medizinflasche, schlug in den Pfropfen einen Nagel und näherte diesen einer Elektrisiermaschine. Als er jetzt mit der anderen Hand den Kopf des Nagels berührte,

erhielt er einen heftigen Schlag. Bei einer Füllung der Flasche mit Wasser oder Quecksilber wurde dieser Schlag sehr heftig."

Technische Kondensatoren

Papierkondensator. Man bringt ein imprägniertes Papier mit einer Stärke von 0,015 mm zwischen zwei Aluminium- oder Zinnfolien, die 0,007 mm stark sind. Die Durchschlagsspannung dieser Anordnung beträgt 300–500 Volt. Der so hergestellte Kondensator wird zusammengefaltet und in ein Metallkästchen gebracht, damit der von ihm eingenommene Raum möglichst klein wird.

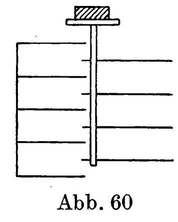
Einen Kondensator von 1 μF kann man so aus einer Papierschicht von 0,1 mm Dicke herstellen ($\varepsilon = 2{,}2$), die auf beiden Seiten mit einer Metallschicht überzogen ist. Die Fläche des Papiers muß dabei 5,12 m^2 betragen.

Glimmerkondensator: Für gewisse Anwendungen, besonders für hohe Frequenzen, stellen sich die Papierkondensatoren als unzulänglich heraus. (Durch die dielektrischen Verluste erwärmt sich der Kondensator, die Imprägnierschicht des Papiers schmilzt, und der Kondensator schlägt durch.) Aus diesem Grund bevorzugt man Glimmerkondensatoren, obgleich diese wesentlich teurer sind. Diese Kondensatoren, bei denen das Papier durch eine Glimmerschicht von 0,2 mm ersetzt ist und deren Aufbau dem der Papierkondensatoren entspricht, haben außer ihrer Verwendbarkeit bei höheren Spannungen noch den Vorzug, daß die Verluste sehr klein sind.

Drehkondensator. Dieser Kondensator wird besonders in der Rundfunktechnik sehr häufig angewandt. Er besteht aus zwei Paketen von Metallplatten, die ineinander gedreht werden können. Dazu ist das eine Paket auf einer drehbaren Achse und das andere auf einer festen Achse angebracht (Abb. 60).

Dreht man jetzt die beweglichen Platten, dann kann man die Kapazität des Kondensators nach Belieben, z.B. zwischen 50 und 500 cm, kontinuierlich verändern.

Durch diese Anordnung bilden dabei alle festen und alle beweglichen Platten nur je eine Elektrode. Wenn es nun n bewegliche und $n + 1$ feste Platten gibt, werden insgesamt $2\,n$ Kondensatoren gebildet, die parallel zueinander sind.


Abb. 60

Elektrolytkondensator. Der Elektrolytkondensator, der seit ungefähr 1930 bekannt ist, besitzt bei einem kleinen Volumen eine sehr große Kapazität. Er kann jedoch bei Spannungen über 600 bis 700 Volt nicht verwendet werden, obgleich seine Weiterentwicklung große Fortschritte gemacht hat. Betrachten wir zuerst seinen Aufbau und seine „Formierung". Man führt eine Elektrolyse einer Alkaliborat- oder -citratlösung schwacher Konzentration zwischen zwei Aluminiumelektroden durch und erhält dabei auf der Anode eine dünne transparente Isolierschicht aus Aluminiumoxyd, welche das Dielektrikum bildet.

Ein Verstärken der Isolierschicht über 0,002 mm bringt keine Vorteile. Bei dieser Stärke kann der Kondensator für Gleichstrom bis zu Spannungen von 600 Volt benutzt werden. Wenn die Oxydschicht dicker gewählt wird, nimmt die Kapazität sehr schnell ab, und die Anordnung wird sehr ungünstig.

Man kann die Isolierschicht vor oder nach dem Zusammenbau des Kondensators anbringen. Eine große Sauberkeit und Reinheit des Materials aber sind unbedingt erforderlich.

Zur Bildung der Isolierschicht legt man an die Elektroden eine linear anwachsende Spannung (um die Elektrolyse trotz der Isolierschicht auf der Aluminiumanode aufrechtzuerhalten), wobei man die Temperatur erhöht. Bei 95 °C setzt die Oxydation der Anode plötzlich ein.

Wir geben jetzt die erhaltenen Werte für die Schichtdicke als Funktion der anzulegenden Spannung an, d. h. der Formierungsspannung:

Anzulegende Spannung	100	200	400	600	700 V
Schichtdicke (Al_2O_3)	0,22	0,52	1,19	1,98	2,4 μ

Die Kurve in Abb. 61 zeigt, daß die Kapazität, gemessen in μF pro dm² Leiterfläche, als Funktion der Formierungsspannung sehr schnell abnimmt. Wenn man nun an die beiden Klemmen dieser Anordnung eine niedrigere Spannung als die

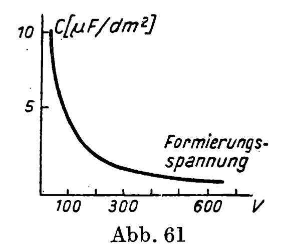


Abb. 61

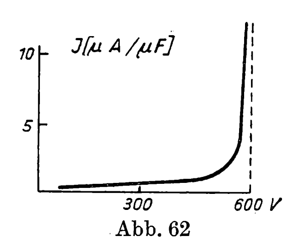


Abb. 62

Formierungsspannung legt, wirkt diese wie ein Kondensator. Diese Kondensatorwirkung geht jedoch verloren, wenn man an die Elektroden eine höhere Spannung als die Formierungsspannung legt; das Dielektrikum wird dann durchschlagen. Dieser Nachteil ist jedoch nicht sehr schwerwiegend, da man die Isolierschicht ohne Schwierigkeiten wieder erneuern kann. Man muß allerdings darauf achten, daß die Polung an den Platten nicht vertauscht wird, da sonst die Isolierschicht elektrolytisch zerstört wird.

Diese Kondensatoren werden sehr häufig in der Rundfunktechnik verwendet. Im allgemeinen wird die Kathode aus porösen Substanzen gebildet (Papier, Gewebe), die mit dem Elektrolyten imprägniert sind. Die andere Elektrode des Kondensators wird durch eine Aluminiumfolie gebildet. Die ganze Anordnung ist in einen zylindrischen Becher eingeschlossen, der bei der Elektrolyse als Kathode dient.

Die Entladungsgeschwindigkeit eines guten „Elkos" ist halb so groß wie die eines Papierkondensators, dagegen sind die dielektrischen Verluste bei Wechselstrom sehr viel größer, da in einer Richtung Strom fließen kann.

Wenn die Spannung in die Nähe der Formierungsspannung kommt, wächst auch der Verluststrom stark an (Abb. 62).

1939 wurde von der Fa. Siemens ein Kondensator dieser Art gebaut, der eine Kapazität von 1 Farad hatte und eine Dielektrizitätskonstante $\varepsilon = 13$ aufwies. Die Kapazität wurde durch die Unebenheit der Kondensatorplatten beträchtlich erhöht (Oberflächenvergrößerung). Das von diesem Kondensator eingenommene Volumen betrug ungefähr 4 dm³, seine Spannung 1,5 Volt. Die Ka-

pazität entspricht der einer Kugel mit einem Radius, 13 mal so groß wie der Sonnenradius.

Keramische Kondensatoren. Titanoxyd TiO_2 ist ein hervorragender Isolator, dessen hohe Dielektrizitätskonstante $\varepsilon = 120$ beträgt. Einige andere seltene Oxyde haben eine noch größere Dielektrizitätskonstante, wie es bereits bei Bariumtitanat erwähnt wurde. Verwendet man diese Oxyde als Beimischung zu keramischen Massen, so erhält man Dielektrika, deren Dielektrizitätskonstanten einen Wert von ungefähr 1000 haben, wobei die Temperaturkoeffizienten beliebig, positiv oder negativ, sind. Dies erlaubt die Konstruktion ganz hervorragender Kondensatoren mit kleinen Dimensionen, großen Kapazitäten und einer Temperaturunabhängigkeit in sehr großen Bereichen.

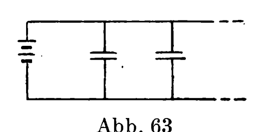
Kondensatorschaltungen

Parallelschaltung (Abb. 63)

Die Potentialdifferenz an den Klemmen aller Kondensatoren beträgt V. Sie speichern die Ladungen

$$Q_1 = VC_1, \quad Q_2 = VC_2$$

auf. Die Gesamtladung ist dann gegeben durch


Abb. 63

$$Q = Q_1 + Q_2 + \cdots = VC_1 + VC_2 + \cdots.$$

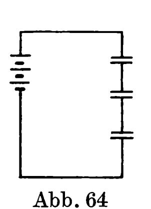
Diese Anordnung entspricht also einem einzigen Kondensator mit der Kapazität

$$C = \Sigma C_i; \quad Q = V \Sigma C_i.$$

Diese Anordnung wird dann benutzt, wenn man eine große Kapazität benötigt und nur über Kondensatoren verfügt, die geringere Kapazitäten besitzen, aber für die Spannung V geeignet sind.

Reihenschaltung (Abb. 64)

Auf dem Leiter (1) des Kondensators C_1 tritt eine Ladung $+Q$ auf, während durch Influenz eine Ladung $-Q$ auf dem Leiter (2) des gleichen Kondensators entsteht.


Abb. 64

Nach dem Prinzip der Elektrizitätserhaltung muß jetzt eine Ladung $+Q$ auf dem Leiter (1) des Kondensators C_2 erscheinen, da dieser Leiter mit dem Leiter (2) des Kondensators C_1 zusammen einen einzigen isolierten Leiter bildet.

V_1 und V_2 seien die Spannungen an den Klemmen der Kondensatoren C_1 und C_2:

$$V_1 = \frac{Q}{C_1}; \quad V_2 = \frac{Q}{C_2}.$$

Andererseits ist $V_1 + V_2 = V$. Die Anordnung entspricht also einer Kapazität C, so daß

$$C = \frac{Q}{V} = \frac{C_1 V_1}{V_1 + V_2} = \frac{C_2 V_2}{V_1 + V_2} = \frac{V_1}{\frac{V_1 + V_2}{C_1}} = \frac{V_2}{\frac{V_1 + V_2}{C_2}} = \frac{1}{\frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2}}.$$

Folglich ist also

$$\frac{1}{C} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2}$$

oder allgemeiner

$$\frac{1}{C} = \sum \frac{1}{C_i}.$$

Diese Schaltung wird dann angewandt, wenn man nur über Kondensatoren verfügt, die allein die gewünschte Spannung nicht ertragen können.

Man kann in einer gemischten Anordnung sowohl Reihen- als auch Parallelschaltungen kombinieren.

Ladung und Entladung eines Kondensators über einen Widerstand

Ladung eines Kondensators

Die Abb. 65 zeigt das Schaltschema einer Anordnung, mit der man Ladung und Entladung eines Kondensators untersuchen kann.

Die Ladung des Kondensators ist mit der Potentialdifferenz an den Klemmen durch folgende zeitunabhängige Beziehung verbunden:

$$Q = C V.$$

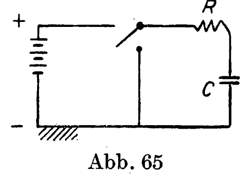


Abb. 65

Wenn der Kondensator aufgeladen ist, entspricht seine Potentialdifferenz V der angelegten Spannung, also $V = U$. Solange der Kondensator nicht vollständig aufgeladen ist, verändert sich die Potentialdifferenz, und es fließt ein Strom der Stärke $i = \frac{dQ}{dt}$.

Nach dem OHMschen Gesetz gilt

$$U = R \frac{dQ}{dt} + V.$$

Da nun

$$\frac{dQ}{dt} = C \frac{dV}{dt},$$

folgt

$$U = V + R C \frac{dV}{dt}.$$

Diese lineare Differentialgleichung erster Ordnung müssen wir nun integrieren. Vernachlässigen wir das erste Glied, so lautet sie

$$\frac{dV}{V} = -\frac{dt}{RC},$$

und die allgemeine Lösung hat die Form

$$V = V_0 e^{-\frac{t}{RC}}.$$

Da U ein partielles Integral der Gleichung mit dem 2. Glied ist, lautet die allgemeine Form

$$V = U + V_0\, e^{-\frac{t}{RC}}.$$

Wir wollen nun V_0 durch die Anfangsbedingungen $t = 0$ und $V = 0$ bestimmen. Es ergibt sich

$$V = U\left(1 - e^{-\frac{t}{RC}}\right).$$

Wir tragen nun die Funktion $V = f(t)$ graphisch auf (Abb. 66). $\Theta = RC$ nennt man die *Zeitkonstante des Stromkreises*, d.h. die Zeit, nach der der Abklingvorgang $e^{-t/RC}$ auf $\frac{1}{e}$ abgenommen hat, also auch die Zeit, nach der die Ladung den Wert $\frac{1}{e}$ erreicht hat. In der Praxis ist die Benutzung dieses Begriffs der Zeitkonstanten sehr bequem.

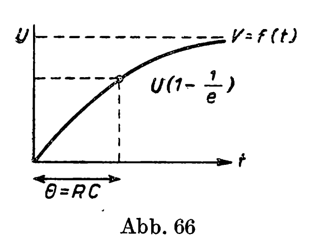


Abb. 66

Wir sehen also, daß nach Ablauf der Zeit 6,9 Θ die Spannung nur noch um 10^{-3} von U verschieden ist.

Entladung eines Kondensators

Entladen wir nun den Kondensator, dann hat die Differentialgleichung die Form

$$V + RC\frac{dV}{dt} = 0.$$

Zur Zeit $t = 0$ beträgt die Potentialdifferenz zwischen den Klemmen des geladenen Kondensators U, also ist

$$V = U e^{-\frac{t}{RC}}.$$

Nach der Zeit $t = RC$ ist die Spannung zwischen den Kondensatorklemmen auf $\frac{U}{e}$ abgefallen. Bei der Entladung tritt die gleiche Zeitkonstante wie bei der Ladung des Kondensators auf (Abb. 67).

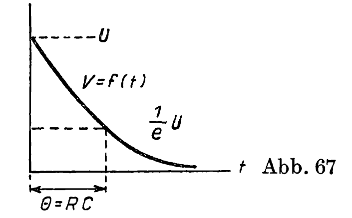


Abb. 67

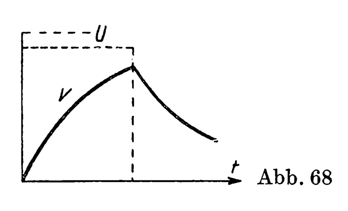


Abb. 68

Diese Dinge haben eine gewisse praktische Bedeutung. Wie wir schon gesehen haben, stellen z.B. die Überseekabel beträchtliche Kondensatoren dar.

Betrachten wir die Signalübermittlung durch ein solches Kabel. Die graphische Darstellung der Spannungsänderung an den Kondensatorklemmen als Funk-

tion der angelegten Spannung zeigt uns deutlich, daß es erforderlich ist, die Signalaussendung in einem Abstand auszuführen, der größer als die Zeitkonstante dieses Systems ist (Lord KELVIN) (Abb. 68).

Experiment

Wir wollen nun die Entladung eines Kondensators von 10 μF über einen Widerstand von 500 kΩ betrachten. Um diese Spannungsänderungen leicht messen zu können, steuern wir mit der Spannungsänderung an den Klemmen des Kondensators die Potentialdifferenz zwischen Gitter und Kathode einer Triode. Dazu wird der Kondensator zuerst mit einer in Abb. 69 nicht dargestellten Batterie geladen. Der Punkt A liegt im Vergleich zur Masse auf einem negativen Potential.

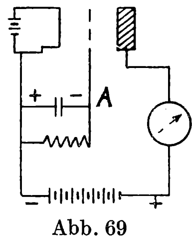


Abb. 69

Wenn nun die Spannung zwischen den Kondensatorklemmen abnimmt, wächst das Potential zwischen Gitter und Kathode, und der Strom, den man mit dem Milliamperemeter mißt, steigt an.

Die Zeitkonstante des Stromkreises ergibt sich zu $10 \cdot 10^{-6}$ Farad $\cdot\, 0{,}5 \cdot 10^{6}$ Ohm $= 5$ Sekunden.

Wir stellen fest, daß nach dieser Zeit die Nadel des Milliamperemeters tatsächlich einen Ausschlag von ungefähr $^2/_3$ seines Maximalausschlages anzeigt.

Kapazitätsänderung eines Körpers in Erdnähe

Wir betrachten eine Kugel mit dem Radius R und der Ladung Q, die wir dem Erdboden nähern und isolieren (Abb. 70). Wenn der Kugelmittelpunkt in der Höhe H über der Erde liegt, wobei H groß gegen R ist, existiert nach der Theorie der elektrischen Abbildung zwischen Erde und Kugel wegen der Influenz eine fiktive Ladung $-Q$, die sich im Abstand $-H$ in der Erde befindet.

In erster Näherung hat also das Potential auf der Oberfläche der Kugel den Wert

$$V = \frac{Q}{R} - \frac{Q}{2H} = \frac{Q}{R}\left(1 - \frac{R}{2H}\right).$$

Das Ergebnis ist das gleiche, als hätte sich die Kapazität der Kugel $C = R$ vergrößert auf

$$C = \frac{R}{1 - \dfrac{R}{2H}}.$$

Abb. 70

In zweiter Näherung muß berücksichtigt werden, daß auch die Ladungsverteilung durch die Influenz der Erde verändert wird. Das Potential der Kugel selbst beträgt tatsächlich nur Q/R.

Man kann nachweisen, daß die ersten Korrektionsglieder, die dieser Tatsache Rechnung tragen, von höherer Ordnung in R/H sind und daher vernachlässigt werden können.

Zwei Körper in Erdnähe

Wir betrachten zwei Kugeln mit den Radien R_1 und R_2, die die Ladungen Q_1 und Q_2 tragen und voneinander um h entfernt sind. Wir wollen nun annehmen, daß beide Kugeln sich senkrecht übereinander befinden. Die Kugel mit dem Radius R_2 habe ihr Zentrum in der Höhe H oberhalb der Erde. In erster Näherung werden die Potentiale V_1 und V_2 dieser Kugeln mit Berücksichtigung der elektrischen Abbildungen gegeben sein zu

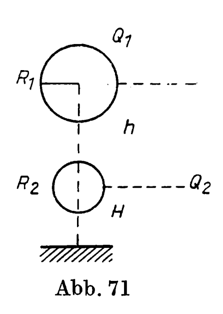


Abb. 71

$$V_1 = \frac{Q_1}{R_1} + \frac{Q_2}{h} - \frac{Q_2}{2H+h} - \frac{Q_1}{2H+h},$$

$$V_2 = \frac{Q_2}{R_2} + \frac{Q_1}{h} - \frac{Q_1}{2H+h} - \frac{Q_2}{2H}.$$

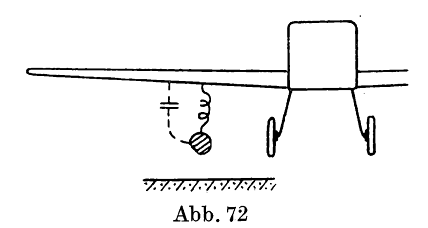
Wenn wir annehmen, daß $Q_1 = -Q_2$ ist, dann erhalten wir nach einigen Vernachlässigungen die Potentialdifferenz

$$V_1 - V_2 = Q_1 \left[\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} - \frac{2}{h} + \frac{1}{4}\,\frac{h^2}{H\left(H + \frac{h}{2}\right)(H+h)}\right].$$

Es gilt $Q_1 = -Q_2$, wenn die beiden ursprünglich neutralen Kugeln durch einen bestimmten, für Gleichstrom nicht unendlichen Scheinwiderstand oder durch eine Batterie verbunden sind. Dies macht folgende Anwendungen möglich:

Höhenmesser für das Flugwesen

Wenn sich ein Flugzeug unter schlechten Sichtverhältnissen einem Flugplatz nähert, gibt ihm eine Funkanlage zwar die Möglichkeit zur Landung. Der Flugzeugführer muß jedoch seine Höhe über der Landebahn sehr genau kennen, besonders wenn sich das Flugzeug nur noch wenige Meter über der Landefläche befindet.


Abb. 72

Für diese Schwierigkeiten bietet das oben betrachtete Prinzip eine Lösung: Wir benutzen einen Schwingkreis, der aus einer Selbstinduktion L und einer Kapazität C gebildet wird. Die Kapazität ihrerseits besteht aus einer Kugel mit dem Radius R und der Kapazität der Tragflächen. Dieser Schwingkreis bestimmt die Frequenz eines Oszillators im Flugzeug. (Der Sender ist in der Abbildung nicht eingezeichnet.) Die Nähe der Erde verändert nun die Kapazität nach den oben angegebenen Formeln, wodurch die Frequenz sich ebenfalls verändert. Diese Frequenzveränderung kann man z. B. durch Vergleich mit einem anderen Sender sehr stabiler Frequenz feststellen. Auf diese Art erhält man eine sehr empfindliche Höhenanzeige auf den letzten Metern über der Landefläche (Abb. 72).

Zündung durch Influenz

Der Körper einer Granate spielt die Rolle der Kugel R_1. Die Kugel R_2 wird durch ihre Spitze dargestellt (s. Abb. 73). R_1 und R_2 sind durch eine Batterie verbunden, die in Reihe mit einem Widerstand liegt.

Ändert sich jetzt die Ladung Q_1 auf R_1, so entsteht am Widerstand R der Spannungsabfall $R \cdot \frac{dQ_1}{dt}$. Wenn V_0 die elektromotorische Kraft der Batterie ist, dann erhalten wir

$$V_1 - V_2 = V_0 - R\,\frac{dQ_1}{dt} = Q_1 \left[\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} - \frac{2}{h} + \frac{h}{4\left(\frac{h}{2} + H\right)(H + h)}\right].$$

Dabei ist H eine mit der Zeit sehr schnell veränderliche Funktion. Die Spannung $R\, dQ_1/dt$ entspricht der Änderung des zweiten Gliedes, d.h. ist V_0 gegenüber recht bedeutend. Man gibt sie auf das erste Gitter einer Verstärkerröhre, durch welche die Explosion der Granate ausgelöst wird.

Wir haben mit dieser Anordnung eine Möglichkeit, die Granate durch „Influenz" bereits einige Meter über der Erde zu zünden, ohne daß dies erst durch den Aufschlag zu geschehen braucht. Es existieren für dieses Problem heute eine ganze Reihe verbesserter Konstruktionen.

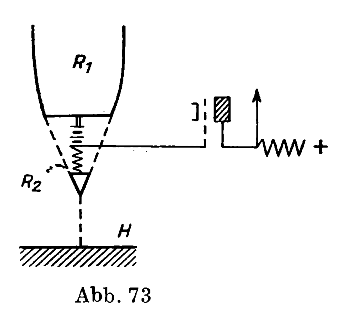


Abb. 73

V. KAPITEL

Untersuchung der Dielektrika

Polarisation eines Dielektrikums

Wir haben gesehen, daß die Kapazität eines Kondensators sich ändert, wenn man zwischen seine Platten ein Dielektrikum einschiebt oder wenn sich die beiden Platten im Vakuum befinden. Es wird sich zeigen, daß wir diese Tatsache und viele andere Eigenschaften des Dielektrikums durch eine spezielle Annahme, nämlich die *Polarisation des Dielektrikums* erklären können.

Dazu werden wir zuerst den *elektrischen Dipol* definieren: Ein Dipol ist eine Anordnung von zwei punktförmigen elektrischen Ladungen $+e$ und $-e$, die *gleich groß* sind, jedoch *entgegengesetzte Vorzeichen* haben, und sich in der *kleinen* Entfernung l voneinander befinden.

Als *elektrisches Moment* dieses Dipols bezeichnet man den Vektor

$$\mathfrak{M} = e\,\mathfrak{l}.$$

Unsere Hilfsannahme, d.h. die Hypothese der Polarisation des Dielektrikums, wird nun in folgender Form ausgedrückt.

Wir nehmen an, daß in einem Dielektrikum, das unter der Wirkung eines elektrischen Feldes steht, jedes Volumenelement dv das Dipolmoment

$$d\mathfrak{M} = \mathfrak{P} d V$$

besitzt. Dabei ist $\mathfrak{P}$ der sogenannte *Polarisationsvektor.*

In einem isotropen Dielektrikum gilt

$$\mathfrak{P} = \chi \mathfrak{E},$$

wenn $\mathfrak{E}$ das elektrische Feld ist.

Der Koeffizient χ wird *elektrische Suszeptibilität* des Dielektrikums genannt.

Bemerkung: Diese Ausführungen sind nur dann gültig, wenn die Ladungen des Dielektrikums durch Influenz entstanden sind. Wenn z.B. neue Ladungen durch Reibung erzeugt werden, sind diese Aussagen nicht anwendbar.

Feld und elektrische Induktion

Man kann die von den entstandenen Ladungen ausgehenden Wirkungen im Dielektrikum nach dem folgenden Poissonschen Theorem berechnen. Wir werden uns hier auf seinen Wortlaut beschränken, da eine Erklärung besser in dem Abschnitt über den Magnetismus möglich ist.

Theorem: *Die Wirkungen eines Volumens V des polarisierten Dielektrikums sind die gleichen wie die*

1. *durch eine Ladungsverteilung auf der Oberfläche mit der Flächendichte $\sigma = P_n$ hervorgerufenen, wobei P_n die Normalkomponente des Polarisationsvektors ist. Sie wird positiv gerechnet, wenn sie aus der Fläche heraustritt;*
2. *durch eine Ladungsverteilung im Volumen des Dielektrikums mit einer Ladungsdichte $\varrho = \operatorname{div}\mathfrak{P}$ hervorgerufenen.*

Das Potential in einem Punkt hat den Wert

$$V = \iint\limits_F \sigma \frac{df}{r} + \iiint\limits_V \varrho \frac{dv}{r} = \iint\limits_F \frac{P_n\, df}{r} - \iiint\limits_V \operatorname{div}\mathfrak{P} \frac{dv}{r}.$$

Nun ist

$$\operatorname{div}\mathfrak{P} = \chi \operatorname{div}\mathfrak{E} = \chi\, 4\pi\varrho.$$

Für jedes Volumenelement ist die Gesamtladung jedoch Null, also ist $\varrho = 0$ und folglich $\operatorname{div}\mathfrak{P} = 0$. Für das Potential ergibt sich also

$$V = \iint\limits_F \frac{P_n\, df}{r}.$$

Die Wirkung eines bestimmten Volumens des polarisierten Dielektrikums ist die gleiche wie die der Oberflächenschicht mit der Flächendichte $\sigma = P_n$, die dieses Dielektrikum begrenzt.

Anwendung des Coulombschen Theorems auf einen Leiter in einem Dielektrikum

Betrachten wir die Grenzfläche zwischen einem Leiter und einem Dielektrikum, das keine anderen Ladungen als die von der Polarisation hervorgerufenen enthält (Abb. 74). Diese Fläche ist eine Äquipotentialfläche, und das Feld $\mathfrak{E}$ steht auf ihr senkrecht. Ersetzen wir die im Dielektrikum auftretenden Ladungen durch eine Flächenverteilung mit der Flächendichte $\sigma' = -\chi\mathfrak{E}$, wobei $\mathfrak{P}$ und $\mathfrak{E}$ positiv sein sollen, wenn sie *gegen das Innere des Dielektrikums* gerichtet sind, so können wir das Gausssche Theorem auf ein Element der Kraftlinienröhre anwenden, das im Dielektrikum durch eine zur Trennfläche parallele Fläche und im Leiter durch eine beliebige Fläche abgeschlossen wird.

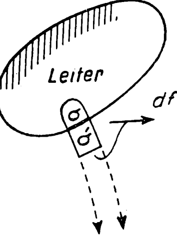


Abb. 74

Der aus dieser geschlossenen Fläche austretende Kraftfluß ist also $E\,df$. Nach dem Gaussschen Theorem ist der Kraftfluß gegeben durch

$$4\,\pi(\sigma + \sigma')dF.$$

Also ist

$$4\,\pi(\sigma + \sigma')dF = E dF.$$

Da nun $\sigma' = -\chi E$ ist (E ist gegen das *Innere* des Dielektrikums gerichtet), gilt

$$4\,\pi\sigma = (1 + 4\,\pi\chi)\,E.$$

Wir setzen jetzt $1 + 4\,\pi\chi = \varepsilon$, dabei ist ε die *experimentell bestimmte Dielektrizitätskonstante*; (tatsächlich werden, nach der Beziehung $Q = C\,V$ bei konstantem V, also mit konstantem Feld, die zu C proportionalen Ladungen mit ε multipliziert.)

$$E = \frac{4\pi\sigma}{\varepsilon}.$$

Den Vektor

$$\mathfrak{D} = \varepsilon\mathfrak{E}$$

nennt man *elektrostatische Induktion.*

Die elektrostatische Induktion ist also dem Feld $\mathfrak{E}$ proportional und von gleichem Vorzeichen und gleicher Richtung. Dies gilt jedenfalls in einem isotropen Dielektrikum.

Kapazität eines Plattenkondensators

Wir haben folgendes gesehen: Wenn wir den Raum zwischen den beiden Leitern mit einem Dielektrikum der Dielektrizitätskonstanten ε ausfüllen, ergibt sich die Kapazität zu

$$C = \frac{\varepsilon F}{4\,\pi\,d}.$$

Nehmen wir jetzt an, daß wir eine unbegrenzte dielektrische Schicht der Dicke d_1 in den aufgeladenen und isolierten Plattenkondensator einschieben (Anordnung

siehe Abb. 75). Nun ersetzen wir die durch Polarisation des Dielektrikums entstandenen Ladungen durch homogene ebene Ladungsverteilungen mit der Flächendichte $\sigma' = \chi E$ auf den Grenzflächen des Dielektrikums. In einem Punkt außerhalb des Dielektrikums heben sich ihre Wirkungen auf, da sie gleiche und entgegengesetzt gerichtete Felder erzeugen, die den Wert

$$\pm 2\,\pi\sigma'$$

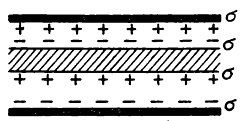


Abb. 75

besitzen. In einem Punkt innerhalb des Dielektrikums dagegen addieren sich die beiden Felder.

Im Vakuum ist das Feld immer durch den Wert $E = 4\,\pi\sigma$ gegeben, im Dielektrikum dagegen gilt die Formel

$$E' = 4\pi(\sigma + \sigma') = E - 4\pi\chi E' = \frac{E}{\varepsilon}.$$

Die Potentialdifferenz zwischen den Platten beträgt

$$U_1 = \int_0^d E\,dx = E d_2 + \frac{E}{\varepsilon} \cdot d_1 + E d_3 = E\left(\frac{d_1}{\varepsilon} + d_2 + d_3\right).$$

Im Vakuum gilt

$$U = E \cdot (d_1 + d_2 + d_3).$$

Die Kapazität ist also gegeben zu $C_1 = \dfrac{Q}{U_1} = C\dfrac{U}{U_1}$. Dabei ist C die Kapazität, wenn das Dielektrikum durch das Vakuum gebildet wird. Es folgt also

$$\frac{C_1}{C} = \frac{d_1 + d_2 + d_3}{\dfrac{d_1}{\varepsilon} + d_2 + d_3}; \quad C_1 = \frac{F}{4\pi\left(\dfrac{d_1}{\varepsilon} + d_2 + d_3\right)}.$$

Wir erhalten speziell für $d_1 = d$; $d_2 = d_3 = 0$:

$$C_1 = \frac{\varepsilon F}{4\pi d}.$$

Begriff des Verschiebungsstroms (Maxwell)

Betrachten wir nun den Entladungsstrom eines Kondensators, dessen Platten die Fläche F besitzen. Ist I die Stromstärke, die im Zeitpunkt t durch den Außenleiter fließt, dann gilt

$$I = \frac{dQ}{dt}.$$

Wir zeichnen im Innern des Dielektrikums Stromfäden ein, die den Kraftlinien des Feldes entsprechen, und definieren den Vektor der Stromdichte im Dielektrikum zu

$$\mathfrak{i} = \frac{1}{F}\,\frac{dQ}{dt} = \frac{d\sigma}{dt}\,.$$

Es ist

$$\sigma = \frac{\varepsilon E}{4\pi}\,,$$

da

$$\frac{\varepsilon F}{4\pi d}\,U = F\,\frac{\varepsilon}{4\pi}\,E\,.$$

Folglich gilt

$$\mathfrak{i} = \frac{\varepsilon}{4\pi}\,\frac{d\mathfrak{E}}{dt}\,.$$

MAXWELL setzte dafür

$$\mathfrak{i} = \frac{d\vec{\Delta}}{dt}\,,$$

wobei

$$\vec{\Delta} = \frac{\varepsilon\mathfrak{E}}{4\pi} = \frac{\mathfrak{D}}{4\pi}\,.$$

Dieser Vektor $\vec{\Delta}$ ist die *dielektrische Verschiebung*.

Erklärung des Verschiebungsstromes

1. Wird das Dielektrikum durch das Vakuum gebildet, so ist offensichtlich, daß der Verschiebungsstrom $\mathfrak{i}_0 = \frac{1}{4\pi}\,\frac{d\mathfrak{E}}{dt}$ keiner Verschiebung der Elektrizität entspricht.

Die Eigenschaften des Raumes sind jedoch modifiziert. Insbesondere existiert z.B. ein magnetisches Feld, und der Verschiebungsstrom ist einem Leitungsstrom in elektromagnetischer Hinsicht äquivalent.

2. Stellen wir uns jetzt ein zwischen die beiden Platten geschobenes Dielektrikum vor und nehmen an, daß N Elemente (z.B. Moleküle) pro Volumeneinheit vorhanden sind. Für die Polarisation gilt dann

$$\mathfrak{P} = \chi\mathfrak{E} = Ne\mathfrak{l}\,.$$

Eine Veränderung des elektrischen Feldes um $d\mathfrak{E}$ ruft eine Veränderung der Entfernung zwischen den Ladungen um $d\mathfrak{l}$ hervor, was einem Ladungstransport

$$FNe\,d\mathfrak{l}$$

entspricht, wobei $d\mathfrak{l}$ parallel zum Feld verläuft. Ist die Stromdichte gegeben durch

$$\mathfrak{i}_1 = Ne\,\frac{d\mathfrak{l}}{dt} = \frac{d\mathfrak{P}}{dt},$$

so nennen wir den Vektor $\mathfrak{j}_1$ den *Polarisationsstrom.* Wir können also schreiben:

$$\mathfrak{j}_1 = \chi \frac{d\mathfrak{E}}{dt} = \frac{\varepsilon - 1}{4\pi} \frac{d\mathfrak{E}}{dt} = \mathfrak{j} - \mathfrak{j}_0.$$

Diese Formel zeigt uns, daß der Verschiebungsstrom in einem Dielektrikum die Summe aus dem Verschiebungsstrom im Vakuum j_0, *der von einer Modifikation der Eigenschaften des Raumes abhängt, und dem Polarisationsstrom des Dielektrikums* j_1 *ist, der einer wirklichen Elektrizitätsverschiebung entspricht.*

Andererseits wissen wir aus der Erklärung der Polarisation, daß die Existenz des Polarisationsvektors $\mathfrak{P} = \chi\,\mathfrak{E}$ $\left(\text{wobei } \chi = \frac{\varepsilon - 1}{4\pi} \text{ ist}\right)$ sich einzig durch das Auftreten von Ladungen mit der Dichte $\sigma = P_n$ auf der Oberfläche äußert.

Mit $\mathfrak{P} = \chi\mathfrak{E} = Ne\mathfrak{l}$, wobei N die Anzahl der Moleküle pro Volumeneinheit ist, können wir nun setzen

$$\mathfrak{P} = \chi\mathfrak{E} = Ne\mathfrak{l} = N\alpha\mathfrak{E},$$

wobei α die Polarisierbarkeit der Moleküle ist:

$$N\alpha = \chi = \frac{\varepsilon - 1}{4\pi}.$$

Die Anzahl N der Moleküle pro Volumeneinheit ist proportional der Dichte ϱ des Dielektrikums. Die obenstehende Gleichung führt also zu folgender Beziehung: $\frac{\varepsilon - 1}{\varrho}$ ist konstant, wenn sich der physikalische Zustand verändert. Dies ist ein besonders für die Gase gültiges Gesetz. Es erfordert, daß α eine charakteristische Konstante ist, die nicht vom physikalischen Zustand des Körpers abhängt, was allerdings nicht immer zutrifft.

Untersuchung der Polarisation eines Moleküls

Ein Molekül besteht bekanntlich aus positiven Atomkernen, die von Elektronen umgeben sind.

Polarisationseffekte können zwei verschiedene Ursachen haben.

1. Der Schwerpunkt der positiven Ladungen fällt mit dem der negativen Ladungen zusammen, wenn das Molekül nicht unter der Wirkung eines elektrischen Feldes steht. Legt man jedoch ein elektrisches Feld an, so verschieben sich die Schwerpunkte, und ein elektrisches Moment des Moleküls tritt auf. Die vorstehende Theorie läßt sich dann anwenden. Wir haben es dabei mit einer solchen Anzahl von Elektronen zu tun, die im Molekül eine stabile und symmetrische Anordnung um die positiven Kerne annehmen. Das ist hauptsächlich der Fall bei den Edelgasen in der Atmosphäre, die vollständige Schalen mit 2, 4, 8 Elektronen besitzen.

2. Betrachten wir nun Fälle, in denen dies nicht gilt. Das einfachste Beispiel ist Chlorwasserstoff (Abb. 76). Die äußere Schale des Chloratoms besteht aus sieben Elektronen, die äußere Schale des Wasserstoffs dagegen besitzt 1 Elektron. In unserem Fall vervollständigt nun das Chlor seine äußere Schale durch das Elektron des Wasserstoffs. Es bekommt aber dadurch eine überschüssige negative Ladung, während der Wasserstoffkern mit seiner positiven Ladung außerhalb des Chloratoms bleibt. Der Schwerpunkt der positiven Ladungen stimmt nun nicht mehr mit dem der negativen Ladungen überein. Der Abstand zwischen beiden Schwerpunkten sei l. Das Molekül besitzt also ein permanentes elektrisches Moment μ und wird *polar* genannt; μ ist durch die Beziehung $\mu = el$ definiert.

(−) → (+) Cl H

Abb. 76

Die Orientierung der Moleküle ist vollkommen willkürlich, wenn sie nicht der Wirkung eines Feldes unterworfen sind. Das elektrische Moment der Moleküle läßt sich dann nicht nachweisen. In einem elektrischen Feld stellen sich die Moleküle in bestimmter Richtung ein. Dieser Orientierung wirken die Stöße der Moleküle untereinander entgegen. Eine komplizierte Rechnung[1]) zeigt, daß die mittlere Orientierung der Dipole μ um so stärker ausgeprägt ist, je stärker das angelegte Feld ist, was einer wirklichen Polarisation entspricht. Für die Suszeptibilität der Substanz ergibt sich in diesem Fall

$$\chi = \frac{\varepsilon - 1}{4\pi} = N\left(\alpha + \frac{\mu^2}{3kT}\right).$$

Dieser Zusatzterm $\frac{\mu^2}{3kT}$ ist durch die Arbeiten von DEBYE eingeführt worden.

Dabei ist k die BOLTZMANNkonstante $k = \frac{R}{N}$. Hierin ist R die allgemeine Gaskonstante für ideale Gase und beträgt $8{,}32 \cdot 10^7$ CGS-Einheiten; N ist die Anzahl der Moleküle pro Volumeneinheit.

Die obenstehende Gleichung ist übrigens noch nicht korrekt, denn ein bestimmtes Molekül unterliegt nicht nur der Wirkung eines äußeren Feldes $\mathfrak{E}$, sondern auch einem Feld, der „Polarisation“, das von den elektrischen Momenten der anderen Moleküle herrührt. Man kann zeigen, daß dieses zusätzliche Feld bestimmt ist durch

$$\frac{\varepsilon - 1}{3}\mathfrak{E}.$$

Wir haben also

$$\mathfrak{P} = \chi\mathfrak{E}\left(1 + \frac{\varepsilon - 1}{3}\right) = \chi\mathfrak{E}\,\frac{\varepsilon + 2}{3}$$

und daraus

$$\frac{\varepsilon - 1}{4\pi} = \chi\,\frac{\varepsilon + 2}{3}.$$

---

[1]) Die ausführliche Berechnung siehe weiter unten, Magnetismus, Seite 148.

Ersetzen wir in dieser Gleichung χ durch seinen Wert, so erhalten wir die Clausius-Mossotische Beziehung, die durch Debye vervollkommnet wurde:

$$\frac{\varepsilon - 1}{\varepsilon + 2} = \frac{4\pi}{3} N \left(\alpha + \frac{\mu^2}{3kT}\right).$$

Diese Gleichung erlaubt uns die Veränderung von ε als Funktion der Temperatur und der Dichte vorherzusagen. Im allgemeinen hat sie sich als sehr zutreffend erwiesen.

Diese Theorie gestattet, die Sekundäreffekte in einer Form vorauszusagen, wie sie auch durch das Experiment bestätigt werden. Bei sehr starken Feldern (100000 V/cm), wo die Dipole bereits weitgehend orientiert sind, muß z.B. eine Sättigung der Polarisation auftreten, so daß diese nicht mehr proportional mit der Feldstärke anwachsen kann. Wir erhalten also eine Abnahme der Dielektrizitätskonstante, wie es auch durch das Experiment bestätigt wird.

Weiterhin kann man mit dieser Gleichung die auftretenden Abweichungen von der Maxwellschen Theorie erklären. In der Maxwellschen Theorie gilt $n^2 = \varepsilon$, wobei n der Brechungsindex des Dielektrikums ist. Man findet, daß n^2 bedeutend kleiner ist als ε auf Grund des zweiten Terms, der von dem permanenten Moment des Moleküls herrührt.

Legen wir an das Dielektrikum eine Wechselspannung hoher Frequenz, so verhindert die Trägheit der Moleküle eine Orientierung in Richtung des Feldes. Der Debyesche Effekt verschwindet; es bleibt $\frac{n^2 - 1}{n^2 + 2} = \frac{4\pi}{3} N\alpha$, während ε bei niedrigen Frequenzen auf Grund des Terms $\frac{\mu^2}{3kT}$ bedeutend größer sein kann. Dies gilt besonders für Wasser: $n^2 = 1{,}77$, dagegen $\varepsilon = 80$. Allgemein kann man sagen, daß bei allen Körpern mit großer Dielektrizitätskonstante die Moleküle ein großes Dipolmoment μ besitzen.

Sitz der Energie im Dielektrikum

Wir betrachten zuerst den Fall eines sich zwischen den zwei Belägen eines Plattenkondensators befindenden Dielektrikums.

Wenn am Plattenkondensator mit der Kapazität C die Potentialdifferenz U liegt, gilt für die gespeicherte Energie

$$W = \frac{1}{2} C U^2.$$

Für einen Plattenkondensator gilt

$$C = \frac{\varepsilon F}{4\pi d};$$

dabei ist F die Plattenfläche, d ihr Abstand und ε die Dielektrizitätskonstante des Dielektrikums. Also ist

$$W = \frac{\varepsilon F}{8\pi} \frac{U^2}{d}.$$

Jetzt wollen wir annehmen, daß diese Energie gleichförmig im Dielektrikum verteilt sei. Die Energie pro Volumeneinheit ist dann gegeben zu

$$\frac{W}{F d} = \frac{\varepsilon}{8\pi} \frac{U^2}{d^2}.$$

Nun ist aber $\frac{U}{d}$ die elektrische Feldstärke E zwischen den Platten. Der Ausdruck für die Energie der Volumeneinheit bekommt also die Form

$$\frac{\varepsilon}{8\pi} E^2.$$

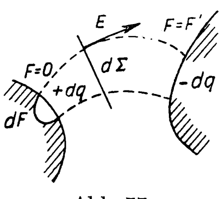


Abb. 77

Wir wollen zeigen, daß diese Formel allgemein gilt. Nehmen wir an, daß Leiter mit verschiedenen Potentialen in ein Dielektrikum mit der Dielektrizitätskonstante ε eingetaucht sind. (Das Vakuum wird berücksichtigt, wenn wir $\varepsilon = 1$ setzen.)

Jetzt betrachten wir eine Kraftlinienröhre zwischen zwei Leitern, zwischen denen eine Potentialdifferenz U existiert.

Die elektrostatische Energie der Ladungen dq, die auf den entsprechenden Flächenelementen der Leiter isoliert sind, hat die Form

$$d W = \frac{1}{2} U d q.$$

Da nun

$$U = \int \mathfrak{E} \, d\mathfrak{f},$$

gilt längs einer Kraftlinie

$$U = \int_0^{F_1} \mathfrak{E} \, d\mathfrak{f}.$$

Für eine Kraftlinienröhre ergibt sich also

$$d W = \frac{1}{2} d q \int_0^{F_1} E \, d f.$$

Wir legen einen ebenen Schnitt $d\Sigma$ durch die Kraftlinienröhre und bilden eine geschlossene Hüllfläche aus $d\Sigma$, der Fläche dF_1 im Innern des Leiters, die auf der Fläche dF senkrecht steht, und dem Teil der Kraftlinienröhre zwischen dF und $d\Sigma$ (siehe Abb. 77). Wenden wir auf diese Fläche das Gausssche Theorem an, so erhalten wir

$$4\pi d q = \varepsilon E d\Sigma.$$

E ist dabei das Feld im Querschnitt $d\Sigma$. Wir bekommen also

$$d W = \frac{\varepsilon}{8\pi} E \, d\Sigma \int E \, d f$$

und

$$W = \frac{1}{8\pi} \iiint \varepsilon E^2 \, d\Sigma \, d f.$$

Da $d\Sigma\, d\, f$ das Elementarvolumen ist, können wir

$$W = \frac{1}{8\pi} \iiint \varepsilon\, E^2\, dv$$

schreiben.

Wir sehen also, daß sich für die Energie der Volumeneinheit der Ausdruck

$$\frac{\varepsilon\, E^2}{8\pi}$$

ergibt. Versuchen wir nun, ihn zu erklären:

Wenn wir das Feld um dE ändern, so ergibt sich die Veränderung der Energie pro Volumeneinheit zu

$$\frac{\varepsilon\, E\, d\, E}{4\pi} = E\, d\left(\frac{\varepsilon\, E}{4\pi}\right) = E\, d\, \Delta .$$

In diesem Ausdruck ist Δ die von MAXWELL eingeführte *elektrische Verschiebung*.

Wir vergleichen diese Formel mit der für die Arbeit einer elastischen Kraft $F = K\, x$ (F ist der Verschiebung des Angriffspunktes proportional). Korrekt muß diese Arbeit durch den Ausdruck $F\, dx = K\, x\, dx$ dargestellt werden. $K\, x$ ist dann analog zu E, während x dem Ausdruck $\frac{\varepsilon E}{4\pi}$ entspricht. Dies rechtfertigt den von MAXWELL eingeführten Ausdruck der „Verschiebung". Die „elektrische Kraft" E ist der elektrischen Verschiebung Δ proportional.

Diese Betrachtungen sind nicht nur ein bequemes Verfahren zur Energieberechnung; vielmehr gehen die modernen Theorien davon aus, daß die Energie tatsächlich in dem der Wirkung des Feldes unterworfenen Dielektrikum lokalisiert ist. Seine Eigenschaften werden im Gegensatz zu einem geladenen Leiter durch das Feld beeinflußt.

Reale Dielektrika

Alles, was wir bisher gesagt haben, bezog sich auf vollkommene Dielektrika. Wenn wir in der Praxis einen Kondensator aufladen, stellen wir fest, daß seine Ladung mehrere Stunden bestehenbleibt. Ferner sieht man, wenn man die Spannungsquelle entfernt, daß sich der Kondensator langsam entlädt.

Diese Erscheinungen werden durch die Existenz freier Ladungen im Dielektrikum hervorgerufen, die sich unter dem Einfluß des Feldes langsam verschieben und der Polarisation entgegenwirken oder eine langsame Entladung hervorrufen, solange sie sich im Dielektrikum befinden.

Es ist nun interessant, bei Wechselstrom die Beziehung zwischen aufgebrachter Energie und Verlustenergie beim Kondensator aufzustellen. Dieses Verhältnis setzt man gleich $\operatorname{tg}\varphi$ und nennt φ den *Verlustwinkel*. Bei Glas, das ein schlechtes Dielektrikum ist, hat φ ungefähr den Wert $10°$; für imprägniertes Papier und Glimmer liegt φ in der Größenordnung einiger Minuten.

Bei hohen Frequenzen machen sich die freien Ladungen nicht so stark bemerkbar wie oben. Die Bedeutung ihrer Verschiebungen ist wesentlich geringer. Dafür treten im Dielektrikum andere Verlustquellen auf. Wir wollen hier nur darauf

hinweisen, daß sich die Dipole der Moleküle orientieren und mit dem Feld ihre Richtung ändern wollen, wobei durch die benachbarten Moleküle Reibungskräfte auftreten und Wärme frei wird, die recht beträchtlich sein kann. Durch die Erwärmung erhöht sich die Leitfähigkeit des Dielektrikums und vergrößert nochmals die Verluste.

Die Elektrete

Gewisse Dielektrika, z.B. das Harz von Carnauba (Brasilien), haben die Eigenschaft, die elektrischen Momente der Polarisation, die sich in ihnen durch die Anlegung eines sehr starken elektrischen Feldes unter bestimmten Umständen gebildet haben, z.B. beim Erstarren der Schmelze, zu konservieren. Diese Elektrete sind also elektrische Analoga zu den Permanentmagneten; ihre Eigenschaften beruhen auf den Wirkungen der dielektrischen Hysteresis.

Thermo-dielektrischer Effekt

Bei der Untersuchung der Eigenschaften von Carnaubaharz hatte J. Costa de Ribeiro 1942 in Rio de Janeiro einen allgemein auftretenden Effekt gefunden: *Bei Veränderung des physikalischen Zustandes eines Dielektrikums tritt ein Strom auf.*

Betrachten wir z.B. ein Dielektrikum, das gerade schmilzt (Abb. 78). Bei einer höheren Schmelzgeschwindigkeit tritt ein größerer Strom auf. Beim Erstarren ändert sich die Richtung des Stromes. Die Größenordnung der freiwerdenden Ladungen beträgt 10^{-12} As für ein Gramm erstarrende oder schmelzende Materie. Bei Substanzen mit nichtpolaren Molekülen ist der Effekt am stärksten, so liegt er z.B. für Naphthalin bei $3{,}9 \cdot 10^{-9}$ Coulomb pro Gramm, für Carnaubaharz bei $-0{,}3 \cdot 10^{-9}$ (das entsprechende Pluszeichen gilt für den Übergang in den festen Zustand, bei dem der Strom von der Flüssigkeit zur erstarrten Substanz fließt). Dieser Effekt, der bei 10^{11} bis 10^{12} ihren Zustand ändernden Molekülen eine Ladung freiwerden läßt, konnte noch nicht definitiv erklärt werden. Man hat weiterhin festgestellt, daß Substanzen aus Molekülen mit Doppelbindung einen sehr großen Effekt zeigen.

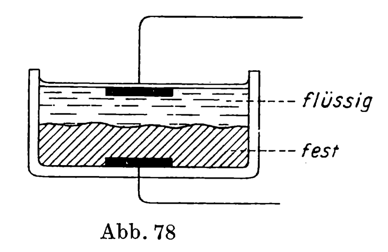


Abb. 78

VI. KAPITEL

Das elektrische Feld der Atmosphäre. Der Blitz

Obgleich man das elektrische Feld der Atmosphäre erst seit ein oder zwei Jahrhunderten genauer untersucht hat, waren seine Auswirkungen schon seit langer Zeit bekannt. Wir haben bereits das *St.-Elms-Feuer* erwähnt (Spitzenentladung).

So waren zu allen Zeiten die Blitzerscheinungen Gegenstand kritischer Beobachtungen. Ctesias de Cnide, ein Zeitgenosse Xenophons, erhielt von König

ARTAXERXES zwei geheimnisvolle Degen: „Wenn man diese Degen so in die Erde steckt, daß die Spitze in die Luft ragt", sagte er, „so können sie Wolken, Hagel und Gewitterstürme verjagen."

Erst im 18. Jahrhundert versuchte man, das elektrische Feld der Atmosphäre genauer zu untersuchen. Im Jahre 1747 begann FRANKLIN, sich mit dem Blitz zu beschäftigen, beschränkte sich jedoch vorerst auf theoretische Überlegungen.

Am 7. Juni 1753 gelang es DE ROMAS in Nerac, einen Papierdrachen während eines Gewitters steigen zu lassen. Zur Befestigung diente ein 260 m langer Kupferdraht, an dessen Ende eine 1,15 m lange, um einen Stein gewickelte isolierte Seidenschnur geknüpft war. DE ROMAS hatte in einer Hand einen Blechzylinder an einem isolierten Glasgriff, mit dem es ihm gelang, aus dem Kupferdraht Funken von mehr als 30 cm Länge zu ziehen. Der Blechzylinder hatte eine Länge von 35 cm und einen Durchmesser von 3 cm. Der Experimentator wurde durch eine besonders heftige Entladung zu Boden geworfen. Strohhalme, die in der Nähe auf der Erde lagen, wurden von dem Kupferdraht angezogen und stiegen an ihm bis zu einer Höhe von mehr als 100 m empor.

Seltsamerweise verschwanden während des Experimentes von DE ROMAS an der Stelle des Himmels, an der sich der Drachen befand, die schwarzen Wolken.

Ein Jahr später wiederholte FRANKLIN diese Experimente, und ihm gebührt das Verdienst, die Bedeutung des Blitzableiters erkannt zu haben. Bei diesem wird die Spitzenentladung ausgenutzt, um die Ladungen aus der Atmosphäre abzuziehen, die das elektrische Feld der Atmosphäre verursacht, sowie die Entladung auf sich zu ziehen, wenn sie trotzdem stattfindet.

Weitere Untersuchungen zeigten, daß der Schutz durch einen Blitzableiter nur auf einer *kleinen* Fläche von wenigen Quadratmetern wirksam war.

Im Jahre 1783 verteidigte MAXIMILIAN DE ROBESPIERRE, ein Advokat in Arras, in einem Prozeß einen gewissen DE BOISVALLÉ aus Saint-Omer, der einen Blitzableiter angebracht hatte. Unter dem Druck der öffentlichen Meinung hatte der Bürgermeister dieses Ortes einen Haftbefehl gegen DE BOISVALLÉ erlassen, und ROBESPIERRE erreichte, daß der Arrestant freigelassen wurde.

Erst seit wenigen Jahren hat man durch die Möglichkeit, mit einem Kathodenstrahloszillographen schnellablaufende Vorgänge zu registrieren, bessere und erweiterte Kenntnisse über die Natur des Blitzes erworben.

Das elektrische Feld der Atmosphäre kann sehr stark sein. Es wird mit Elektrometern gemessen, die die Potentialdifferenz zwischen Punkten mit bekannten Höhenunterschieden anzeigen. Dieses Feld liegt oft in der Größenordnung von 300 Volt/m, was jedoch normalerweise nur geringen Ladungen entspricht, die keine Entladung hervorrufen.

Es können sich jedoch einerseits in der Luft schwebende Körper elektrisch aufladen (so wurde die Explosionskatastrophe des Luftschiffes „Hindenburg" durch einen Funken hervorgerufen, der bei der Landung übersprang, als das Luftschiff den Landemast berührte), anderseits bilden sich bei sogenannten Kumuluswolken starke aufsteigende Luftströmungen. Unter diesen Umständen werden die Regentropfen beim Herabfallen positiv aufgeladen, die Luft lädt sich negativ auf. Die Kumuluswolke wird negativ aufgeladen, da sie durch die aufsteigenden Luftströme ebenfalls hochgetrieben wird. Die Wolke elektrisiert sich also einige Minuten, bevor der Blitzschlag erfolgt. Sie ist nur einige Sekunden vor dem Blitz-

schlag durch eine intensive Ionisierung in ihrem Innern leitend. Der Blitz selbst wird durch eine Entladung zwischen der Wolke und der Erde hervorgerufen (Abb. 79).

Man hat festgestellt, daß die Höhe der Gewitterwolken über der Erde zwischen 150 und 1000 m liegt. Andererseits beobachtete man bei Laboratoriumsversuchen, daß das zur Entladung erforderliche elektrische Feld in der Größenordnung von 500 kV/m liegt. Diese Messungen wurden jedoch in völlig trockener Luft durchgeführt. In feuchter Luft dagegen genügt bereits ein Feld von 300 kV/m.

Wenn die Wolke in einer Höhe von 500 m steht, beträgt die Potentialdifferenz

$$500 \cdot 300000 = 1{,}5 \cdot 10^8 \text{ V}.$$

Man kann nun die Veränderungen des elektrischen Feldes mit Hilfe von Meßapparaten untersuchen, die sich am Fuß eines Stahlmastes befinden, auf den

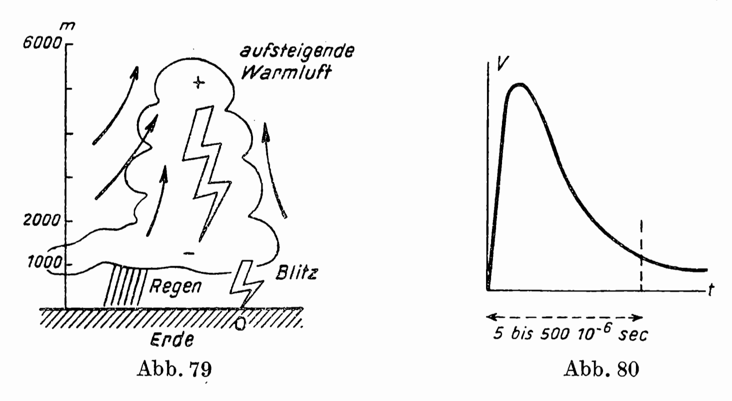


Abb. 79 Abb. 80

der Blitz trifft. Man kann so feststellen (Abb. 80), daß sich die beim Blitz vorhandene Spannung während eines sehr kurzen Zeitintervalls zwischen 5 und 500 Mikrosekunden sehr rasch entlädt. Die Stromstärke im Stahlmast kann 10^4 bis $5 \cdot 10^5$ Ampere betragen, was einer Elektrizitätsmenge von nur 5–20 Coulomb entspricht. Nach sehr heftigen Entladungen kann noch einige Millisekunden lang ein Strom von 1000 Ampere fließen.

Einen indirekten Nachweis dieser Tatsache kann man wie folgt führen: Wenn der Blitz auf eine Antenne trifft und diese schmilzt, so kann die erforderliche Stromstärke berechnet werden, um diesen Vorgang in dem kurzen Zeitraum der Entladung zu verursachen. Die berechneten Stromstärken entsprechen den angegebenen Werten. Die Entladungen im Innern einer Wolke rühren davon her, daß der Kopf einer kalten Kumuluswolke (—20° C) Eiskristalle enthält, die sich positiv aufladen. Die Entladungen im Innern der Wolke werden sehr viel häufiger sein als die Entladungen zwischen Wolke und Erde.

Schutz von Überlandleitungen

Es ist immer günstiger, wenn der Blitz in den Leitungsmast einschlägt, als in die Leitung selbst. Den besten Schutz bietet eine geerdete Verbindung der Mastenspitzen untereinander (Abb. 81). Trotzdem kann es natürlich vorkommen, daß ein

Blitz in die Leitung schlägt. Es breitet sich dann eine Welle entlang der Leitung aus und zerstört die in der Leitung befindlichen Transformatoren, Verbraucher und Generatoren. Eine möglichst schnelle Ableitung dieses hohen Stromes von der Überlandleitung ist also erforderlich. Durch die Entwicklung des Thyrits, einem leitenden Porzellan, dessen Widerstand bei einer Spannungsverdoppelung auf $^1/_{12}$ seines ursprünglichen Wertes zurückgeht, wurde dieses Problem gelöst. Die Leitung wird an einem Thyritisolator und einer Funkenstrecke aufgehängt. Die Funkenstrecke legt die Leitung über den Stahlmast an Masse, wenn die Spannung sehr stark anwächst. Der Lichtbogen bricht jedoch wieder zusammen, wenn die Spannung ihren Normalwert erreicht hat, da das Thyrit dann wieder einen sehr großen Widerstand besitzt.

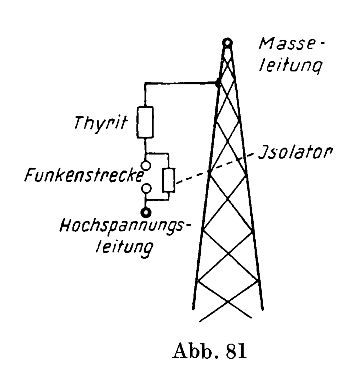


Abb. 81

Vergleich zwischen Blitz und Atombombe

Die 150 Millionen Volt in einem Blitz sind vergleichbar mit den 200 Millionen Volt, die bei der Spaltung eines Uranatoms frei werden. Ein Blitz von 10 Coulomb jedoch betrifft nur 10^{-4} Grammoleküle (FARADAYsches Gesetz), die Atombombe liefert dagegen 10^4 bis 10^5mal soviel Energie wie ein mittlerer Blitz.

VII. KAPITEL

Elektrometer

Elektrostatische Kräfte zwischen Leitern

1. Wir wollen n isolierte Leiter betrachten, von denen wir einen um den Abstand dx verschieben. X sei die Projektion der auf diesen Leiter ausgeübten Kraft entlang der Verschiebung. Die entsprechende Arbeit ist dann $X dx$. Sie entspricht einer Verringerung der elektrostatischen Energie, da die Ladungen selbst die gleichen bleiben und die Gesamtenergie erhalten bleiben muß:

$$X dx = -dW;$$

folglich ist

$$X = -\frac{dW}{dx} = -\frac{\partial W}{\partial x}.$$

Das gleiche gilt, wenn der Leiter um eine Achse beweglich ist. Wir bezeichnen mit D das von den Ladungen ausgeübte Drehmoment und erhalten für eine kleine Drehung $d\Theta$

$$D d\Theta = -dW,$$

$$D = -\frac{\partial W}{\partial \Theta}.$$

In diesen beiden Beziehungen drückt man W als Funktion der Ladungen und der geometrischen Parameter aus.

Wir können z.B. die Kraft berechnen, die zwischen den beiden Platten eines Plattenkondensators wirkt. Die elektrostatische Energie beträgt

$$W = \frac{1}{2}\frac{Q^2}{C}$$

(tatsächlich ergibt sich W als Funktion der *Ladungen*).

Es sei x die zu den beiden Platten senkrechte Koordinatenachse:

$$X = -\frac{\partial W}{\partial x} = \frac{1}{2}\frac{Q^2}{C^2}\frac{\partial C}{\partial x}.$$

Da

$$C = \frac{F}{4\pi d};$$

$$X = -\frac{1}{2}\frac{Q^2}{C^2}\cdot\frac{F}{4\pi}\cdot\frac{1}{d^2} = -\frac{Q^2}{2Cd} = -\frac{CU^2}{2d},$$

folgt

$$X = -\frac{\varepsilon F}{8\pi d^2}U^2.$$

Das Minuszeichen in dieser Formel bedeutet, daß es sich um eine Anziehungskraft handelt. Die Tatsache, daß die Kraft dem Quadrat der Ladung proportional ist, wurde im Jahre 1772 von CAVENDISH experimentell nachgewiesen.

2. Wir wollen annehmen, daß sich die betrachteten n Leiter auf einem *konstanten Potential* befinden. Verschieben wir jetzt einen dieser Leiter um dx, so ist die Arbeit $X\,dx$ jetzt nicht mehr a priori $-dW$, da auch die neuen Ladungen berücksichtigt und die Energie berechnet werden muß, die notwendig ist, um diese neuen Ladungen auf die verschiedenen Potentiale U zu bringen:

$$X\,dx + dW = \Sigma U dQ$$

oder

$$X\,dx = \Sigma U dq - dW;$$

dq ist der Ladungszuwachs.

Nun gilt

$$W = \frac{1}{2}QU,$$

und

$$dW = \Sigma\frac{1}{2}U dQ,$$

da die Potentiale konstant sind.

$$X\,dx = \Sigma\frac{1}{2}U dq = dW,$$

$$X = +\frac{\partial W}{\partial x}.$$

Das gleiche gilt für das Drehmoment

$$D = + \frac{\partial W}{\partial \Theta}.$$

In diesen beiden Gleichungen wurde vorausgesetzt, daß W als Funktion der Potentiale und der geometrischen Parameter definiert ist. Der zwischen diesem und dem vorigen Abschnitt auftretende Unterschied in der Schreibweise von W rechtfertigt die verschiedenen Vorzeichen der Formel, da in beiden Fällen W eine unterschiedliche Funktion der verschiedenen Variablen ist.

Unter dieser Annahme erhalten wir für X bei einem Plattenkondensator den gleichen Wert wie oben:

$$W = \frac{1}{2} C U^2.$$

Für diesen Fall ist es nötig, W als Funktion der Potentiale zu berechnen:

$$X = \frac{1}{2} U^2 \frac{\partial C}{\partial x} = - \frac{\varepsilon F}{8 \pi d^2} U^2.$$

Diese Kraft wird zur Bestimmung von Potentialdifferenzen mit Hilfe von absoluten Elektrometern benutzt. Absolute Elektrometer sind solche, bei denen die Kapazität C als Funktion von x berechenbar ist und daher die einmal durch eine Waage gemessene Kraft den Wert der angelegten Potentialdifferenz U ergibt, ohne daß eine Eichung notwendig wäre.

Plattenelektrometer

1. *Elektrometer von* ABRAHAM. Dieses Elektrometer besteht aus einer Waage, deren eine Schale einen Teil eines Plattenkondensators darstellt, während der andere Leiter durch eine feste ebene Scheibe gebildet wird. Durch das Aufbringen

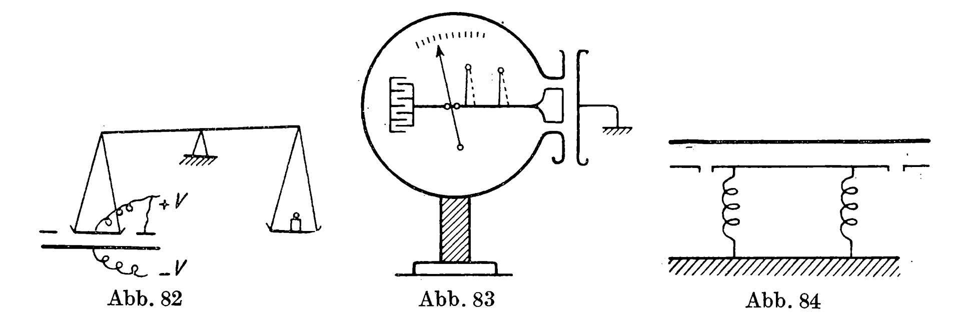


Abb. 82 Abb. 83 Abb. 84

von geeichten Gewichten kann man das Gleichgewicht der Waage einstellen. Es ist ein *absolutes Elektrometer*, da wegen des Schutzringes die Kapazität des Kondensators mit einem beweglichen Leiter berechenbar ist (Abb. 82).

2. *Das Elektrometer von* ABRAHAM-VILLARD erlaubt Relativmessungen. Die Verschiebung des beweglichen Leiters wird auf einen Zeiger übertragen, dessen Aus-

schlag auf einer Skala abzulesen ist. Die Rückstellkraft wird durch die Schwerekomponente des als Pendel ausgebildeten beweglichen Systems gebildet. Der Anwendungsbereich liegt zwischen 100000 und 500000 Volt (Abb. 83).

3. *Elektrometer von Lord Kelvin*. In diesem Elektrometer wird die Anziehungskraft durch vorher geeichte Federn kompensiert. Die Meßgenauigkeit bei 3000 V beträgt ± 3 V (Abb. 84).

Zylinderelektrometer von Bichat und Blondlot

Dieses Elektrometer besteht aus zwei koaxialen Zylindern, von denen der innere bis zur Hälfte in den äußeren hineinragt (Abb. 85).

Wenn wir mit x die Länge des Kondensators bezeichnen, so gilt für seine Kapazität

$$C = \frac{x}{2 \ln \frac{R_2}{R_1}}.$$

R_1 und R_2 sind dabei die Radien des äußeren bzw. inneren Zylinders. In Wirklichkeit hat die Kapazität nicht diesen angeführten Wert, da an den Enden der Zylinder Feldverzerrungen vorhanden sind. Wenn die Zylinder lang genug sind, so verändert eine kleine Verschiebung die Ladungsverteilung an den Enden der Zylinder jedoch nicht, d. h., diese Störungen lassen sich durch eine konstante Zusatzkapazität C_0 ausdrücken:

$$C = \frac{x}{2 \ln \frac{R_2}{R_1}} + C_0 .$$

Die Kraft, die den inneren Zylinder in den äußeren Zylinder hineinzieht, ist gegeben zu

$$P = \frac{U^2}{2} \frac{\partial C}{\partial x} = \frac{U^2}{4 \ln \frac{R_2}{R_1}}.$$

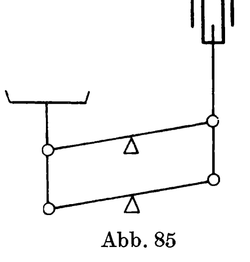


Abb. 85

Diese Kraft kann man durch Verringern der Gewichte auf der Waagschale ausgleichen. Das ursprüngliche Gleichgewicht der Waage entsprach einer Spannung Null. Auch dieses Elektrometer kann man als absolutes Elektrometer ansehen.

Goldblattelektrometer

Das Goldblattelektroskop kann auch als Elektrometer verwendet werden, wenn man eine Skala so anbringt, daß die Auslenkung des Blättchens abgelesen werden kann. Die zu messende Potentialdifferenz wird dann zwischen Gehäuse und Kugel gelegt. Diese Anordnung stellt kein absolutes Elektrometer dar, d.h., die Potentialdifferenz kann nur dann durch den Ausschlag zahlenmäßig angegeben werden, wenn vorher eine Eichung erfolgt ist.

Wir wollen nun versuchen, den allgemeinen Verlauf der Eichkurve zu finden. Dazu nehmen wir an, daß das Goldblatt steif und um eine horizontale Achse drehbar sei. Mit G bezeichnen wir seinen Schwerpunkt und mit l die Entfernung zwischen G und der Drehachse. Im Gleichgewichtszustand sind die Momente der elektrischen Abstoßung und der Schwerkraft mg des Goldblatts in bezug auf die Drehachse gleich. Es gilt also

$$\frac{U^2}{2}\frac{\partial C}{\partial \alpha} = mgl\sin\alpha .$$

Wir wollen annehmen, daß U und α klein seien. $\frac{\partial C}{\partial \alpha}$ hat dann einen beliebigen Wert $\left(\frac{\partial C}{\partial \alpha}\right)_0$. Wir erhalten also

$$\alpha = \frac{U^2}{2mgl}\left(\frac{\partial C}{\partial \alpha}\right)_0 .$$

Abb. 86

Der Ausschlag des Elektrometers ist also dem Quadrat der Potentialdifferenz proportional.

Anderseits hat die Kapazität ihren Maximalwert, wenn sich das Goldblatt um 90° hebt. Wenn also die Potentialdifferenz unendlich anwächst, nähert sich der Elektrometerausschlag einem Winkel von 90°.

Daraus folgt, daß die Eichkurve eine Form haben wird, wie sie in Abb. 87 dargestellt ist. Diese Kurve zeigt, daß das Goldblattelektrometer wenig empfindlich ist für kleine und große Spannungen. Die Eichkurve enthält einen Umkehrpunkt, der dem Maximum der Empfindlichkeit des Elektrometers entspricht, so daß kleine Spannungsunterschiede in der Nähe von U_0 sehr genau gemessen werden können. Der Anwendungsbereich des Goldblattelektrometers liegt nur in der Nähe dieses Maximums (U_0, α_m). Um in diesem Bereich zu arbeiten, benutzt man folgende, etwas andere Anordnung.

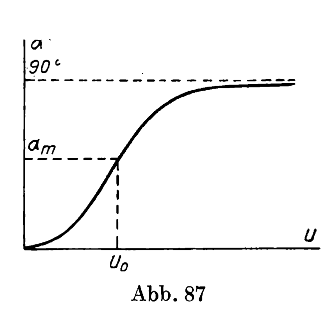


Abb. 87

Heterostatische Anordnung

In dieser Anordnung, die in Abb. 88 dargestellt ist, bedeutet P eine Metallplatte, die mit Hilfe einer Anodenbatterie so hoch gegenüber dem Gehäuse aufgeladen wird, daß das Goldblatt, das zuerst mit dem Gehäuse verbunden ist, den Ausschlag α_m zeigt, d.h. den Ausschlag der maximalen Empfindlichkeit vor dem Anlegen der zu messenden Potentialdifferenz zwischen Kugel und Gehäuse. Dadurch wird erreicht, daß man sich bei der Messung im Bereich maximaler Empfindlichkeit befindet.

Von dieser Art des Goldblattelektrometers werden noch andere Elektrometer abgeleitet, bei denen die *heterostatische Methode* angewandt wird, d.h. die Methode, bei der eine Hilfsspannung U_1 anzulegen ist.

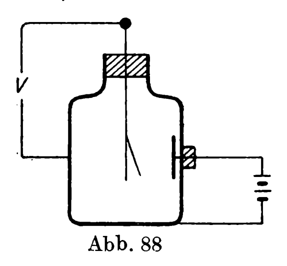


Abb. 88

Elektrometer von C. T. R. Wilson

Dieses Elektrometer besteht aus einem geneigten Gehäuse, in dem sich eine Metallplatte P und ein biegsames Metallblättchen befinden (Abb. 89).

Die Anordnung wird mit Hilfe einer Stellschraube justiert, und das Hilfspotential V_0 wird so eingestellt, daß man sich im Bereich der größten Empfindlichkeit befindet.

Dieses Instrument hat eine sehr geringe Kapazität, was oft recht vorteilhaft ist.

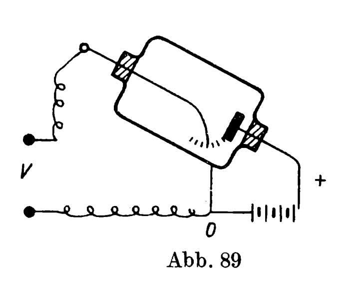


Abb. 89

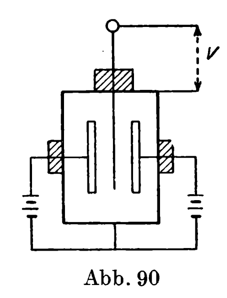


Abb. 90

Fadenelektrometer von Hankel

Es besteht aus einem dünnen Platindraht von 1–2 μ Durchmesser, der zwischen zwei auf entgegengesetzten Potentialen befindlichen Platten gespannt ist.

Die Fadenauslenkung wird mit Hilfe eines Okularmikrometers beobachtet. Durch eine entsprechende Einstellung kann man noch eine Potentialdifferenz von $^1/_{200}$ V pro Skaleneinheit messen.

Quadrantenelektrometer

Prinzip. Wir wollen einen Drehkondensator betrachten, der aus einem beweglichen Leiter zwischen zwei festen Kreisausschnitten besteht und an einem Torsionsdraht hängt (Abb. 91).

Im Gleichgewichtszustand entspricht das Moment der elektrischen Kräfte dem der Torsion in bezug auf die Achse:

$$\frac{U^2}{2}\frac{\partial C}{\partial \Theta} = D\Theta .$$

Dabei bezeichnet U die Potentialdifferenz zwischen beweglichem und festem Leiter.

Die Kapazität ist jedoch proportional zu Θ, und aus $\frac{\partial C}{\partial \Theta} = K$ folgt also

$$\Theta = \frac{K}{D}\frac{U^2}{2} .$$

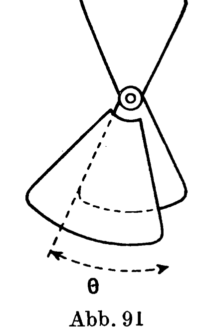


Abb. 91

In der Praxis kann man ein solches Instrument nicht als absolutes Elektrometer ansehen; da die Feldverzerrungen in der

Nähe der Plattenkanten und die Anwesenheit von Ladungen auf dem Teil der Nadel (beweglicher Leiter), der dem festen Leiter nicht gegenüber steht, lassen das oben dargestellte Gesetz nur beschränkt gelten. Eine vorherige Eichung ist also unerläßlich.

Das sehr vereinfachte Prinzip, das wir beschreiben wollen, ist in industriellen Geräten, den sogenannten elektrostatischen Voltmetern, tatsächlich realisiert.

Das Instrument besteht aus zwei Paaren von Quadranten, die durch sehr kleine Zwischenräume voneinander getrennt sind. Sie bilden so eine elektrische Abschir-

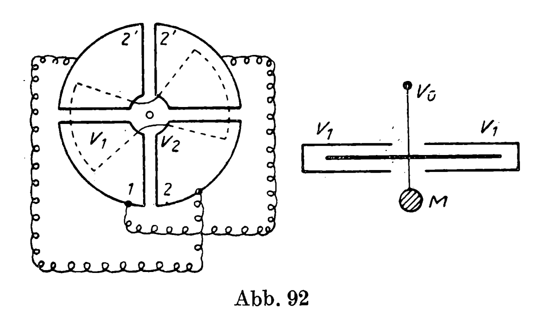


Abb. 92

mung und verhindern, daß die Nadel durch äußere Einflüsse abgelenkt wird (Abb. 92).

Die gegenüberliegenden Quadranten sind jeweils untereinander verbunden; ein Paar liegt auf dem Potential V_1, das andere auf dem Potential V_2. Die Nadel hat das Potential V_0. Das Moment, das die Nadel in das Innere der Quadranten (1) zieht, beträgt

$$\frac{K}{2}(V_0 - V_1)^2.$$

Das entgegengesetzte Moment $\frac{K}{2}(V_0 - V_2)^2$ und das Torsionsmoment sind dieser Drehung entgegen gerichtet. Für den Gleichgewichtszustand ergibt sich also

$$\frac{K}{2}[(V_0 - V_1)^2 - (V_0 - V_2)^2] = D\Theta$$

und

$$\frac{K}{2}(V_1 - V_2)(V_1 + V_2 - 2V_0) = D\Theta.$$

Zur Ausführung der Messung benutzt man im allgemeinen die Methode von Poggendorf. Dabei wird ein Lichtstrahl an einem an der Nadel sitzenden Spiegel reflektiert und ergibt auf einer Skala, die sich in einer bestimmten Entfernung befindet, eine Lichtmarke.

Erste heterostatische Schaltung. Man bringt die Quadranten (1) auf das zu messende Potential V und legt die Quadranten (2) an Masse.

Die Nadel legt man auf ein Potential V_0, das groß ist im Vergleich zu V (Beispiel $V_0 = 200$ V, V klein). Die obenstehende Formel lautet dann

$$\frac{K}{2} V (V - 2 V_0) = D \Theta$$

oder, bei Berücksichtigung der obigen Annahmen,

$$V = \frac{D \Theta}{K V_0}$$

bis auf das Vorzeichen.

Je größer V_0 ist, um so größer ist auch Θ für das gleiche zu messende Potential. Wenn man V_0 groß genug wählt, kann man die Empfindlichkeit der Anordnung sehr weit steigern (Abb. 93).

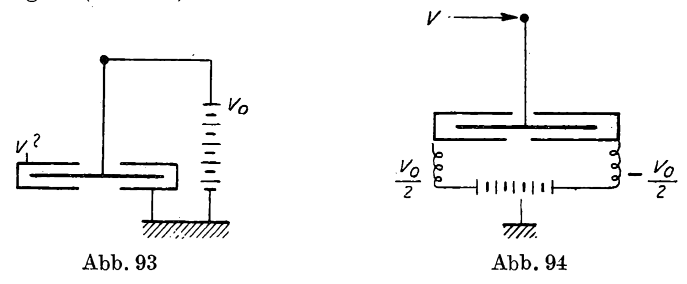


Abb. 93 Abb. 94

Zweite heterostatische Schaltung. Man bringt die Quadranten (1) auf ein Potential $\frac{V_0}{2}$, die Quadranten (2) auf ein Potential $-\frac{V_0}{2}$ (mit Hilfe einer Anodenbatterie, deren Mittelanzapfung an Masse liegt) und legt die zu messende Potentialdifferenz U zwischen Nadel und Masse.

Wir erhalten dann

$$U = \frac{D \Theta}{K V_0}.$$

Diese Anordnung ist also bei gleicher Empfindlichkeit befriedigender als die erste.

Wenn man annimmt, daß man eine Verschiebung des Lichtpunktes um 1 mm auf einer Skala in 2 m Entfernung noch ablesen kann, so ist mit einem guten Quadrantenelektrometer bei dieser heterostatischen Schaltung auf $^1/_{1000}$ V genau zu messen. Dies gilt für jede beliebige Größe der zu messenden Spannung, da nach der Formel

$$U = \frac{D \Theta}{K V_0}$$

der Ausschlag Θ linear mit U verläuft (Abb. 94).

Idiostatische Schaltung. Die Quadranten (2) und die Nadel werden an Masse gelegt, die Quadranten (1) dagegen bringt man auf das zu messende Potential V. Die Gleichung für den Gleichgewichtszustand lautet hierfür

$$\Theta = \frac{K V^2}{2 D}.$$

Diese Methode ist jedoch wegen ihrer geringen Empfindlichkeit ohne Interesse. (Ausgenommen sind sehr große Potentiale.)

Messung von Ladungen. Wenn die Nadel des Elektrometers ausschlägt, verändert sich die Kapazität. Bei Potentialmessungen macht sich dieser Effekt nicht störend bemerkbar, da diese durch die Spannungsquelle konstant gehalten wird. Dies ist jedoch bei Ladungsmessungen nicht möglich.

Wir müssen daher vorher alle Influenzerscheinungen ausschalten. Zu diesem Zweck umgeben wir die gesamte Anordnung, d.h. das mit einem FARADAY-Becher verbundene Elektrometer, mit einer „Abschirmung" (geerdeter FARADAY-Käfig) (Abb. 95).

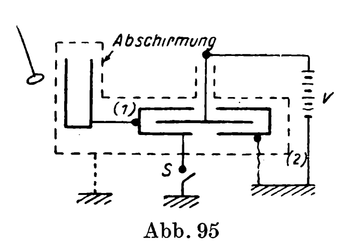


Abb. 95

Beträgt das Potential der Quadranten (1) v, das der Nadel V und das der Quadranten (2) Null, so ist die Ladung der positiven Quadranten (1) gegeben zu

$$Q = cv - c' V.$$

Die Quadranten (1) waren vorher über einen Schalter S an Masse gelegt; daher ergab sich ihre Ladung zu

$$Q_0 = -c' V \quad (v = 0).$$

Jetzt wird der Schalter geöffnet und die zu messende Ladung q in den FARADAY-Becher gebracht (z.B. mit Hilfe einer Prüffläche zur Messung der Oberflächendichte). Die Ladung hat jetzt den Wert

$$Q_0 + q = cv - c' V;$$

also ist

$$q = cv.$$

Der Ausschlag Θ ist sowohl für v als auch für q ein Maß.

Bei dem oben Gesagten muß man sich darüber im klaren sein, daß wir die Ladung des aus den Quadranten (1), dem Draht und dem FARADAY-Becher gebildeten Leiters betrachten müssen, wenn wir von der Ladung der Quadranten (1) sprechen.

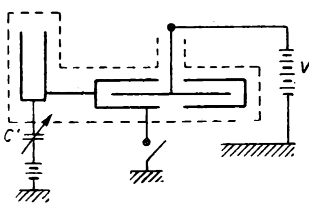


Abb. 96

Diese Meßmethode ist jedoch nicht zu empfehlen, denn c und c' hängen von geometrischen Veränderungen des Elektrometers ab. Trotzdem wird die Methode bei Elektrometern geringer Kapazität angewendet. Wir wollen jetzt noch eine Methode betrachten, die diese Nachteile eliminiert.

Nullmethode. Der FARADAY-Zylinder wird über einen regelbaren Kondensator C' und eine Batterie mit der elektromotorischen Kraft E geerdet (Abb. 96).

Die Ladung Q des Leiters, der durch die obere Platte des Kondensators C', den FARADAY-Becher und die Quadranten (1) gebildet wird, ergibt sich zu

$$Q = -C'E + cv - c' V,$$

wobei v das Potential dieses Leiters ist. (Die Minuszeichen vor $C'E$ und $c' V$ treten deshalb auf, weil es sich um Influenzkoeffizienten handelt.)

Man hat also im ersten Versuch den Kondensator an Masse zu legen, wobei die Nadel keinen Ausschlag zeigt:
$$Q = -C_0 E - c' V .$$

Nun unterbricht man die Masseleitung und bringt die Ladung q in den FARADAY-Becher. Die Nadel wird einen Ausschlag Θ zeigen:

$$Q_0 + q = -C_0 E + c_\Theta V - c'_\Theta V .$$

Man kompensiert diesen Nadelausschlag wieder auf Null durch einen Abgleich mit C'; v ist dann Null, und $c'(\Theta)$ nimmt wieder den Anfangswert an:

$$Q_0 + q = -C_1 E - c' V .$$

Folglich ist

$$q = E(C_0 - C_1) .$$

Wir haben also die Veränderungen von c und c' mit Θ eliminiert.

Experiment. Ohne genaue Messungen durchführen zu wollen, stellt man mit einem Elektrometer, das mit einem FARADAY-Becher verbunden ist, fest, daß die Ladung eines geriebenen Glasstabes und die Ladung eines geriebenen Hartgummistabes entgegengesetzte Vorzeichen haben. Der Ausschlag wird dabei nach der POGGENDORFschen Methode gemessen. Man kann dabei ein heterostatisches Potential von 100 V anlegen.

Messung von schwachen Strömen

Man kann die Elektrometer auch zu Messungen von echten Strömen benutzen, indem man Ladungen oder Ströme mißt, die sich zeitlich verändern. Gegenüber den Galvanometern haben sie den Vorteil, daß sie keine Energie verbrauchen und darüber hinaus bedeutend empfindlicher sind. (Die maximale Empfindlichkeit der Galvanometer liegt bei 10^{-11} bis 10^{-12} A.) Da es sich jedoch bei diesen um eine Messung von Spannungen von wenigstens 10^{-3} V handelt, kann die Strommessung nur bei sehr hohen Innenwiderständen des Galvanometers durchgeführt werden.

Die Anordnung, die wir für die Ladungsmessung angegeben haben, kann in manchen Fällen ohne Veränderung benutzt werden. Nehmen wir z. B. an, daß die elektrischen Ladungen kontinuierlich in den FARADAY-Becher fließen.

Die Messung der Ladungsveränderung mit der Zeit gibt uns die Stromstärke $i = \frac{dq}{dt}$ an. Wenn, wie im vorangegangenen Beispiel 10^{-3} V 1 mm Skalenausschlag entsprechen und das Elektrometer eine Kapazität von 100 cm, d. h. $\frac{1}{9} \cdot 10^{-9}$ Farad besitzt, so erhält man eine Ladung

$$q = \frac{1}{9 \cdot 10^{12}} \approx 10^{-13} \text{ Coulomb} .$$

Wenn man eine Verschiebung des Lichtpunktes auf der Skala um 1 mm in 10 sec erhält, so entspricht dies einer Stromstärke von 10^{-14} A. Dabei ist zu beachten, daß 10^{-14} A einer Entladung über einen Widerstand von 10^{11} Ohm ent-

sprechen, da $10^{11} \cdot 10^{-14} = 10^{-3}$. Durch geeignete Ausführungen der Nadel kann man noch 10^{-16} A messen.

In Abb. 97 ist eine Anordnung angegeben, die die Messung des Ionisationsstromes mit Hilfe einer Nullmethode gestattet.

Die Ionisationskammer wird von zwei metallischen Leitern gebildet. Auf dem unteren Leiter befindet sich Uranoxyd, das die Luft ionisiert, d. h., die positiven und die negativen Ladungen, die zwischen den beiden Leitern wandern, erzeugen einen Ionisationsstrom.

Der obere Leiter wird zuerst an Masse gelegt, dann isoliert man ihn und stellt fest, daß der durch die Ionisationskammer gebildete Kondensator sich nach und nach auflädt und das Elektrometer einen Ausschlag zeigt.

Um diesen Ladungsstrom zu bestimmen, kompensiert man den Ausschlag durch einen genau definierten Strom umgekehrter Richtung. Dazu wird ein piezo-

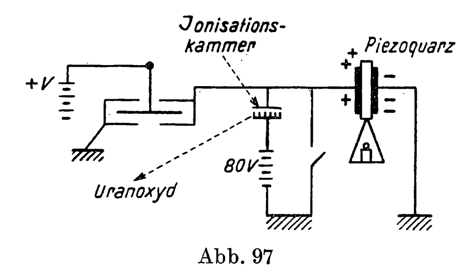


Abb. 97

elektrischer Quarz benutzt. Man weiß, daß bei einer Zugbeanspruchung des Quarzes in zu einer seiner elektrischen Achsen senkrechten Richtung elektrische Ladungen auf den zu dieser Achse senkrechten Flächen auftreten.

Diese Ladungen sind der Zugkraft proportional. Es zeigt sich z. B., daß bei 1000 g Belastung auf jeder Fläche eine Ladung von 6,57 elektrostatischen CGS-Einheiten auftritt.

Jetzt entfernt man die angebrachte Belastung und mißt die Zeit, nach der der Lichtpunkt durch eine genau definierte Skalenstelle hindurchgeht (20 sec). So erhalten wir die Zeit, die der Ionisationsstrom benötigt, um gerade die Ladung zu transportieren, die der piezoelektrischen Ladung entspricht. In unserem Fall hat der Strom also in 20 sec 6,57 el. stat. CGS-Einheiten transportiert, d. h., wir erhalten $6{,}57/3 \cdot 10^9 = 2{,}19 \cdot 10^{-9}$ Coulomb. Dies entspricht einer Stromstärke von $1{,}09 \cdot 10^{-9}$ Ampere.

Moderne elektrometrische Verfahren

Der Anodenstrom einer Triode ist eine Funktion des Gitterpotentials gegenüber der Kathode.

Wenn der Strom bei einer Veränderung des Gitterpotentials um 1 Volt sich um 2 mA ändert, so erhält man bei einer Potentialveränderung um 10^{-3} V eine Änderung des Anodenstroms von $2 \cdot 10^{-6}$ A. Diese ist leicht mit einem Galvanometer zu messen und ebenfalls leicht zu verstärken.

Befindet sich das Gitter gegenüber der Kathode auf einem negativen Potential und ist die Röhre vollständig evakuiert, so tritt kein Gitterstrom auf. Man kann

also die Potentialdifferenz zwischen Gitter und Kathode messen, ohne daß Ladungsverluste auftreten, indem man die isolierten Leiter mit dem Gitter verbindet.

Es ist prinzipiell möglich, die Empfindlichkeit auf 10^{-6} Volt zu erhöhen. In den gewöhnlichen Trioden tritt jedoch ein geringer Gitterverluststrom auf (z. B. durch endlichen Widerstand des Isolierfußes, Oberflächenleitfähigkeit von Glas, Vorhandensein von positiven Ionen in der Röhre, die sich auf dem Gitter entladen). Um diese Methode zu vervollkommnen, benutzt man besonders konstruierte Röhren, sogenannte Elektrometerröhren. Durch diese Röhren werden die gewöhnlichen Elektrometer mehr und mehr verdrängt.

VIII. KAPITEL

Elektrostatische Maschinen

Allgemeines

Elektrostatische Maschinen sind solche Maschinen, die Bewegungsenergie in Elektrizität, oder, genauer gesagt, mechanische in elektrische Leistung umwandeln (oder wegen der Reversibilität auch in umgekehrter Richtung) durch Methoden, die aus der Elektrostatik bekannt sind, und unter Bedingungen, die der Elektrostatik entsprechen, d. h. hohen Spannungen (10 bis einige Hunderttausend Volt) und sehr schwachen Stromstärken (mA oder weniger).

Eine charakteristische Eigenschaft dieser Maschinen ist, daß sie eine begrenzte (und meist geringe) Ladungsmenge gebrauchen (siehe weiter unten die Ladung eines Elektrophors) und daß sie die mechanische Leistung dazu benutzen, diese Ladungen auf ein theoretisch unbegrenztes, auf jeden Fall aber sehr hohes[1]) Potential zu bringen, wobei die potentielle Energie der Ladungen vergrößert wird.

Man erhält die Anfangsladungen entweder durch Reibung oder durch Influenz, d. h., wir müssen zwei verschiedene Arten von elektrostatischen Maschinen unterscheiden.

Reibungsmaschinen

Hierfür wollen wir nur ein einziges Beispiel angeben, das von historischer Bedeutung ist.

Maschine von Ramsden

Eine Glasscheibe wird um ihre Achse in Rotation versetzt. Durch Reibung an zwei Polstern F werden auf der Glasscheibe Ladungen erzeugt, die mehr oder weniger fest auf dieser Scheibe haften. Dann wird die Scheibe durch die Spitzen einer Bürste P entladen (Spitzenentladung). Diese Bürste sammelt die Ladun-

---

[1]) Bei elektrodynamischen Maschinen dagegen werden wir sehen, daß man immer ein begrenztes (und meist geringes) elektrisches Feld benutzt, das auf eine nahezu unbegrenzte Ladungsreserve (die freien Elektronen des Leiters) wirkt, um ihr eine bestimmte kinetische Energie und eine praktisch unbegrenzte Bewegungsgröße zu übertragen, d.h., sehr große Ströme hervorzurufen.

gen auf einem großen isolierten Konduktor, der eine große Kapazität besitzt und *Kollektor* genannt wird. Diese Anordnung ist bereits auf Bildern des Abbé NOLLET dargestellt, wo ein junger Geistlicher die Scheibe dreht, während eine vornehme Dame die Reibung mit ihren vermutlich trockenen Händen verursacht (Abb. 98).

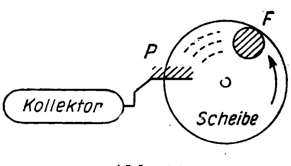


Abb. 98

Influenzmaschinen

Bei Influenzmaschinen wird das Potential durch ein Verfahren vergrößert, das uns an das Hebelgesetz aus der Mechanik erinnert. Die Ladung eines isolierten Leiters bleibt erhalten: $Q = C\,V$. Es wächst jetzt V entsprechend einer Verringerung von C an, und die Bewegung der Maschine, die mit einem speziellen Kommutator ausgerüstet ist, hat den Zweck, diese Verringerung von C immer dann hervorzurufen, wenn der Leiter, der *Transporteur* genannt wird, aufgeladen ist.

Die jetzt folgende Betrachtung des Elektrophors macht dieses Prinzip verständlich.

Elektrophor

Ein Elektrophor besteht aus einem in ein metallisches Gehäuse G, das geerdet ist, gepreßten Paraffinkuchen. Ein Metallbolzen befindet sich in der Mitte des Gehäuses und ragt etwas über die Paraffinoberfläche hinaus (Abb. 99).

Man lädt jetzt das Paraffin durch Reiben mit einem Katzenfell negativ auf und deckt das Gehäuse so mit einer Metallplatte T, dem Transporteur ab, daß dieser in Kontakt mit dem Metallbolzen ist. An der Metallplatte befindet sich ein Isoliergriff. Auf der Platte T, die sich in diesem Moment auf dem Potential Null in bezug zur Masse befindet, treten durch Influenz positive Ladungen auf. Wenn man nun diese Platte entfernt, behält sie ihre Ladung Q. Beim Entfernen der Platte verringert sich ihre Kapazität, bis sie den Wert der ursprünglichen Kapazität C_0 des isolierten Leiters im Raum erreicht hat. Die Platte hat jetzt ein höheres Potential V_0 entsprechend $V_0 C_0 = Q$. Mit ihr ist es möglich, einen FARADAY-Zylinder auf das Potential V_0 zu bringen, da man diesen Vorgang beliebig oft wiederholen kann, ohne daß sich die Ladung des Dielektrikums verändert. Eine solche Anordnung arbeitet sehr zuverlässig.

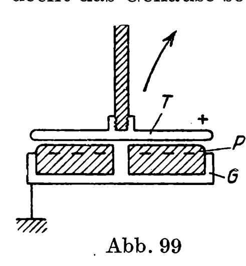


Abb. 99

Bei den *Influenzmaschinen* findet man die gleichen Elemente wieder wie beim Elektrophor (Ladungsgenerator, Transporteur, Kollektor).

Während einer mehr als hundert Jahre dauernden Entwicklung wurden die Versuchsergebnisse falsch gedeutet. Die mechanischen Vervollkommnungen der Maschinen erreichten nicht, daß die durch fundamentale Fehler in der Grundannahme auftretenden Schwierigkeiten beseitigt wurden. Erst vor kurzer Zeit haben die französischen Physiker N. FILICI und R. MOREL in Grenoble die korrekten und sehr einfachen Prinzipien der Gestaltung der Influenzmaschinen erkannt.

Die elektrostatische Maschine von Grenoble

Bei allen elektrostatischen Maschinen wird die Energie im Dielektrikum in der Form $\varepsilon E^2/8\pi$ pro cm³ gespeichert. Die Energiedichte ist durch die Überschlagspannung begrenzt. Im Gegensatz zu allen älteren Maschinen wird heute die Absaugung durch metallische Spitzen nicht mehr angewandt, durch die das Potential herabgesetzt wurde: Wir haben heute keine Bürsten mehr, der Transporteur ist *aus Metall*, und Ladungserzeuger und Kollektor haben durchweg abgerundete Formen.

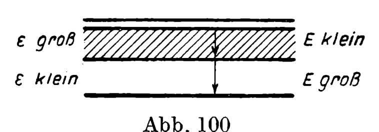


Abb. 100

1. *Die komprimierte Luft.* Man kann nun versuchen, ein Dielektrikum mit einer höheren Dielektrizitätskonstanten zu wählen (Abb. 100). Dann wird jedoch die zwischen dem Transporteur und dem Generator vorhandene Potentialdifferenz ein schwaches Feld im festen Dielektrikum und wegen der Erhaltung des Induktionsflusses εE ein stärkeres (z. B. bei einem Plattenkondensator, bei dem ein Teil des Dielektrikums fest ist) in dem von der Luft eingenommenen Raum hervorrufen, der für die Bewegung des Transporteurs notwendig ist. Es ergibt sich, daß *komprimierte Luft* das vorteilhafteste Dielektrikum ist (die Durchschlagsspannung wächst ungefähr wie der Druck an, Gesetz von PASCHEN), und die Idee liegt nahe, eine elektrostatische Maschine bei einem Druck der Luft von 30 Atm arbeiten zu lassen, um dann $30 \cdot 30 = 900$mal mehr Energie zu erzeugen.

Die ideale Maschine erhält, jetzt allerdings in komprimierter Luft, wieder den Aufbau der alten TOPLERschen Maschine.

Die Abb. 101 zeigt uns eine bipolare Maschine; d. h., es sind zwei Statorplatten vorhanden. Tatsächlich ist jedes dieser Plattenpaare dreifach, d. h., sie bestehen

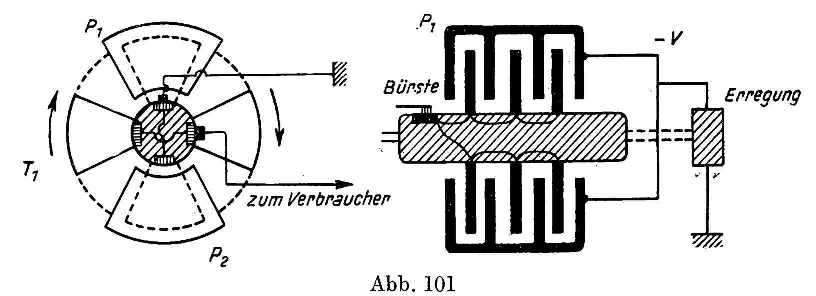


Abb. 101

aus 3 parallelgeschalteten Transporteurquadranten (die im Längsschnitt zu sehen sind).

Im Gegensatz dazu erkennt man im Längsschnitt 4 Rotorplatten, die nacheinander durch jede der Generatorplatten hindurchlaufen.

2. *Beschreibung.* Die beweglichen *metallischen* Sektoren T_1, T_2, T_3, T_4 stellen die Ladungsträger dar. Sie sind auf einer isolierten Achse befestigt und drehen sich zwischen Metallplatten P_1 und P_2, die Generatoren genannt werden und auf dem Potential $-V$ liegen. Die Ladespannung wird durch einen getrennten Hochspannungsgenerator geliefert, der auf derselben Achse sitzt.

Befindet sich T_1 zwischen den Platten von P_1, so wird T_1 durch eine Bürste auf dem Kollektor an Masse gelegt. (Diese Bürste spielt die dem Bolzen des Elektrophors entsprechende Rolle.) Durch Influenz nimmt T_1 die Ladung $Q = C_{\max} V$ auf, wobei $C_{\max}$ die Kapazität in bezug auf den Rotor ist. Dreht sich nun T_1 aus P_1 heraus, so wird der Massekontakt unterbrochen; die Kapazität von T_1 verringert sich und wird $C_{\min}$, d.h. die Kapazität des sich isoliert im Raum befindenden Quadranten T_1. Das Potential des Rotorsektors T_1 ist in bezug auf Masse Null und in bezug auf den Generator $+V$, wenn C den Wert $C_{\max}$ annimmt. Das Endpotential in bezug auf P_1 ergibt sich also zu

$$U' = V \frac{C_{\max}}{C_{\min}}$$

und das Potential in bezug auf Masse

$$U = U' - V = V \frac{C_{\max} - C_{\min}}{C_{\min}} \gg V.$$

Dieses Potential wird groß sein, wenn sowohl $\frac{C_{\max}}{C_{\min}}$ (man kann bereits bemerken, daß die Streukapazitäten die Leistung begrenzen) als auch V groß sind. Aus diesen Gründen verwendet man eine separate Erregung $-V$ und verwendet zweitens komprimierte Luft als Dielektrikum, um U' bis auf die Durchschlagsspannung zu vergrößern. Im Augenblick, in dem das Potential von T_1 seinen Maximalwert erreicht hat, wird es über einen zweiten Kontakt an den Verbraucher abgeleitet.

Wir stellen also fest, daß es in einer solchen Maschine außer den Stützen der Platten P und T keine festen Dielektrika gibt; die elektrostatische Energie sammelt sich in der Druckluft, in der die Maschine durch einen kleinen Motor angetrieben wird. Die ganze Anordnung nennt man auch „*Druckluftelektrophor*".

3. *Einfluß der Plattenstärke.* In der Praxis werden nun die Elektroden nicht die Form dünner Scheiben haben. Nehmen wir an, daß ein Rotorsektor T sich innerhalb des Stators P befindet, so besitzt das elektrische Feld auf T zwei Komponenten, deren eine in Richtung Oy verläuft und mechanische Kräfte verursacht (elektrostatischer Druck), die bei der Bewegung (in diesem Fall entlang Ox) keine Arbeit leisten. Die andere Komponente in Ox-Richtung verbraucht oder leistet Arbeit, je nachdem, ob die Maschine als Generator oder als Motor arbeitet. Diese Kräfte sind zu $2\pi\sigma^2$ pro cm² der Fläche T und damit proportional zum Quadrat der Feldstärke E gegeben. Bei einer Maschine mit endlichen Dimensionen ist man daran interessiert, daß diese Kräfte ihren Maximalwert annehmen, weshalb man E etwas unterhalb der Durchbruchsfeldstärke wählt und in jedem Punkt von T daher konstantes E erhält. Weiterhin wird sich der Druck in Bewegungsrichtung auf die größte mögliche Normalfläche ausbreiten können, woraus eine maximale Dicke für den Rotor und abgerundete Formen für den Stator folgen. Die Forderung der maximalen Scheibendicke steht jedoch im Widerspruch zu der des konstanten Feldes; die korrekte Lösung stellt einen Kompromiß dar (Abb. 102).

In dem gewählten Koordinatensystem ergeben sich für das Profil, durch das für die gesamte Oberfläche von T_1 ein konstantes Feld gegeben ist, folgende Gleichungen:

$$\frac{x_1}{d} = -\frac{2}{\pi} \log \sqrt{2(1-\cos 2\varphi)},$$

$$\frac{y_1}{d} = 1 - \frac{2\varphi}{\pi}.$$

Der Parameter φ läuft dabei von $-\pi/2$ bis $+\pi/2$, und man sieht, daß man die Dicke R von T gleich $2d$ wählen muß, um dieses konstante Feld mit dem anzupassen, das zwischen dem Kondensator (P, T) existiert.

Wenn es nicht unbedingt notwendig ist, das günstigste Profil zu verwenden, benutzt man für einen solchen Aufbau dicke Platten. Dadurch erhält man Maschinen mit einem ausgezeichneten mechanischen Wirkungsgrad, da die auftretenden Kräfte groß gegenüber den Reibungskräften der Bürste sind und die von den Funken und den Bürsten usw. hervorgerufenen schädlichen Kräfte vernachlässigt werden können.

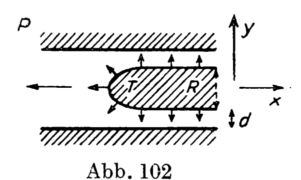


Abb. 102

4. *Reversibilität.* Eine nach diesen Prinzipien gebaute Maschine ist *vollkommen reversibel.* Die Arbeit $X\,dx$ der Kraft auf den beweglichen Teil ($X\,dx$ oder $D\,d\Theta$) entspricht genau der elektrostatischen Energie $dW = V\,dQ$, wenn die Maschine neue Ladungen dQ beim Potential V erzeugt und umgekehrt. Die im Kapitel VII „Elektrometer" abgeleiteten Beziehungen können auch hier angewendet werden. Legen wir an den Rotor unserer beschriebenen Grenobleschen Maschine über die Verbraucherleitung eine Spannung V (wobei V zwischen Masse und Bürste gemessen wird), so ist sehr leicht zu sehen, daß die Rotation der Maschine in umgekehrter Richtung erfolgt; wir haben also einen *elektrostatischen Motor.* Diese Reversibilität, die auch für die alten Influenzmaschinen gilt, wurde wegen der auftretenden großen Reibungskräfte meistens nicht erkannt. Experimentell kann man die Reversibilität nachweisen, wenn man mit einem Generator eine zweite Maschine in Bewegung versetzt, indem die von dem Generator erzeugte Spannung über die Bürste an den Rotor der zweiten Maschine gelegt wird.

5. *Erregung.* Im Prinzip genügen die Restladungen, die sich bei Stillstand auf den gut isolierten Rotoren oder auf den Generatoren befinden, um die *Selbsterregung* einer Influenzmaschine hervorzurufen. Man kann beobachten, daß sich eine gut konstruierte Maschine immer in der gleichen Richtung dreht und damit immer ein Potential gleichen Vorzeichens an der Bürste zum Verbraucher erzeugt. Bei den klassischen Maschinen erleichtert das Verhalten der Spitzen in der Bürste oder der Schneide des Leiters die Übertragung von Anfangsladungen, bewirkt eine Selbsterregung, gibt aber der Maschine einen schlechten Wirkungsgrad. Eine Maschine vom Typ Grenoble besitzt dieses Hilfsmittel nicht und benötigt einen *Hilfsgenerator.* Dieser besteht zweckmäßig aus einer kleinen Maschine gleicher Art, die sich auf der gleichen Achse dreht und deren Kollektor durch den Stator P_1, P_2 der großen Maschine gebildet wird. Es tritt nun das Problem auf,

diesen Hilfsgenerator zu erregen. Je geringer die Spannung ist, die der Generator zur Erregung braucht $\left(\text{in der Größenordnung } V\,\frac{C_{\min}}{C_{\max}}\right)$, um so größer ist die Wahrscheinlichkeit, daß die Restladungen zur Erregung ausreichen, und überdies kann die Reibung der Bürste zum Verbraucher auf den Kollektor ausreichen, um die notwendigen Anfangsladungen zu erzeugen.

Fassen wir noch einmal zusammen: Dank ihres Wirkungsgrades von 80% und mehr ist die Grenoblesche Maschine sehr brauchbar. Sie läßt sich mit der gleichen Sicherheit wie die gebräuchlichen elektrodynamischen Maschinen berechnen. Alle zu ihrer Berechnung notwendigen Elemente haben wir bereits in den vorherigen Kapiteln behandelt (Berechnung der Kapazitäten und der Kräfte). Auf jeden Fall ist die Leerlaufspannung dieser Maschine durch den Funkenüberschlag an den Abnahmebürsten begrenzt.

Die Wimshurst-Maschine

Diese Maschine, die noch in fast allen physikalischen Instituten zu finden ist, wird bald nur noch von historischem Interesse sein. Es handelt sich um eine Influenzmaschine unzweckmäßiger Auslegung, die jedoch dank empirisch gefundener Kunstgriffe leicht in Betrieb genommen und bei Vorlesungsexperimenten bequem verwendet werden kann.

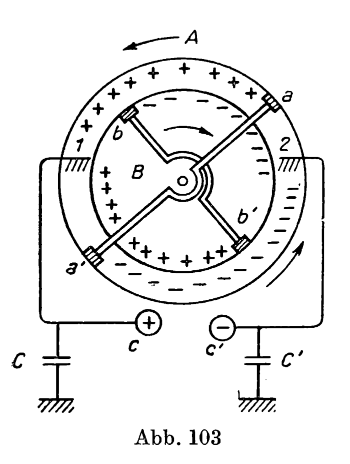


Abb. 103

Sie wird im Prinzip aus zwei koaxialen Glasscheiben gebildet (in der nebenstehenden Zeichnung sind die Glasscheiben der Übersichtlichkeit halber als konzentrische Hohlzylinder gezeichnet), auf denen Sektoren aus Staniolpapier geklebt sind und als Ladungsträger wirken. Die beiden Scheiben drehen sich in entgegengesetzten Richtungen. Zwei Leiter, die die Bürsten a, a' bzw. b, b' diametral an ihren Enden tragen, sind so angebracht, daß sie auf der Platte A bzw. B schleifen. Die metallischen Kämme 1 und 2 dienen zur Ableitung der erzeugten Elektrizität auf die Kugeln c und c'. Diese Kugeln nehmen mehr Ladung auf und geben größere Funken, wenn man ihre Kapazität durch Kondensatoren vergrößert (in der Abbildung C und C').

Betrachten wir nun die Maschine während der Bewegung. Die Influenz der Scheibe B auf dem diametralen Leiter a, a' ruft auf den Teilen der Scheibe A, die sich unter den Bürsten dieses Leiters befinden, elektrische Ladungen hervor, und zwar negative Ladungen in a und positive Ladungen in a'.

Entsprechend entstehen durch Influenz der Scheibe A auf dem Leiter b, b' auf der Scheibe B negative Ladungen in b und positive Ladungen in b'. Durch die gegenläufige Bewegung der beiden Scheiben wird die angegebene Ladungsverteilung aufrechterhalten. Die Scheiben entladen sich an den Abnehmern 1 und 2. Der Abnehmer 1 leitet von beiden Platten positive Elektrizität, der Abnehmer 2 dagegen negative Elektrizität ab.

Die einzige Schwierigkeit liegt im Anlaufen der Maschine. In trockener Luft reicht dazu die Reibung aus; in der vom Atem vieler Zuhörer feuchten Luft eines Hörsaales dagegen ist es zweckmäßig, die Maschine vorher auf einem Heizkörper zu erwärmen, damit sie funktioniert.

Bemerkung: Die elektrische Influenzwirkung der durch Reibung an den Bürsten geladenen Sektoren der Scheibe B (oder A) auf die Sektoren der zweiten Scheibe A (oder B) ist Null, da diese Sektoren *klein* und *isoliert* sind. Die Influenz wird nur auf den transversalen Leitern a, a' und b, b' hervorgerufen, die groß genug sein müssen, damit sie gleiche Ladungen entgegengesetzten Vorzeichens auf ihren Enden tragen können.

Van de Graff-Generator

Der van de Graff-Generator ist eine sehr große Influenzmaschine, die erst in den Jahren seit 1932 in den Vereinigten Staaten für Zwecke der Kernphysik entwickelt wurde. Obgleich die Spannungserzeugung dieses Generators auf einige Millionen Volt begrenzt ist (durch die Anordnung zweier Generatoren mit entgegengesetzten Spannungsvorzeichen kann man diese Spannung verdoppeln), erweisen sich die großen Typen, die unter Gasdruck arbeiten (z. B. unter Freon CF_2Cl_2 bis 5 Atm Druckoder mehr), bei einem Vergleich mit anderen Spannungserzeugern als vorteilhafter, da die erzeugten Spannungen sehr stabil sind. Der van de Graff-Generator beruht auf rationelleren Prinzipien als die Wimshurst-Maschine, da die verschiedenen erforderlichen Funktionen getrennt sind. Bei diesem Generator bestehen jedoch *zwei Schwierigkeiten,* die im allgemeinen seine Spannungserzeugung begrenzen. Erstens muß man einen isolierten Ladungsträger haben, der die Ladungen transportiert, und zum zweiten müssen die Bürsten in der Kugel des Generators geeignet sein, die Ladungen von diesem Isolator abzuziehen.

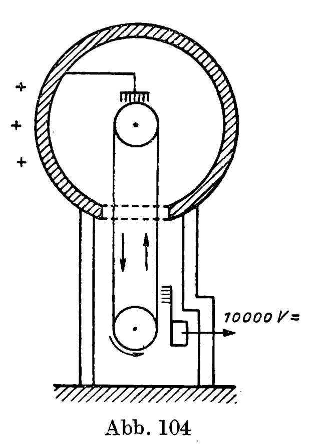


Abb. 104

Beschreibung. Die durch einen Hilfsgenerator erzeugten Spannungen (z. B. 10000 V) werden über ein gummiertes Band in das Innere einer metallischen Kugel übertragen. Durch Influenz treten dann auf der äußeren Oberfläche der Kugel Ladungen *gleichen Vorzeichens* auf, während entgegengesetzte Ladungen (in unserem Fall negative) auf der inneren Oberfläche in Erscheinung treten. Die Ladungen auf der inneren Oberfläche neutralisieren die Bandladungen und fließen über einen Leiter mit Bürste auf das Band ab. Der aus der Generatorkugel herauslaufende Riemen ist also nahezu neutral.

Man hat Generatoren dieser Art mit sehr großen Ausmaßen gebaut und erreichte mit Kugeln von 9 m Radius in einer Gashülle von 8 Atm Druck eine Spannun g von 10^7 Volt. Die Energie dieser Kugel kann man berechnen zu

$$W = \frac{1}{2} C U^2 = 50\,000 \text{ Joule}.$$

Wenn man 1 Funken pro Sekunde erhält, beträgt die Leistung der Maschine 50 kW. Dies entspricht einem Strom von 5 mA bei 10^7 V.

In Grenoble wurde 1952/53 eine dem van de Graff-Generator ähnliche Maschine konstruiert, bei der der Ladungsträger aus einem rotierenden *dielektrischen Zylinder* besteht.

Erzeugung hoher Spannungen durch nichtelektrostatische Verfahren

Es gibt eine ganze Reihe von modernen Apparaten, die in der Lage sind, hundert Millionen Elektronenvolt auf Elektronen zu übertragen. Die Zyklotrons und ähnliche Apparate können z.B. ein α-Teilchen auf 600 Millionen eV beschleunigen. Diese sehr hohen Spannungen werden jedoch in diesen Apparaturen nicht elektrostatisch erzeugt.

Theoretisch ist es einfach, sehr hohe Spannungen zu erzeugen, indem man Wechselströme in Hochspannungstransformatoren hochtransformiert und sie dann gleichrichtet. In der Praxis jedoch sind diese Möglichkeiten begrenzt, da beim Isolieren der Transformatorwicklungen sehr große Schwierigkeiten auftreten und weil anderseits riesige Gleichrichter gebraucht würden, während die Endstromstärken sehr gering wären. Es ist also günstiger, wenn man eine Anzahl kleinerer Anordnungen in Reihe schaltet, um die gleiche „Spannung zu halten". Wir werden weiter unten sehen, daß die *Induktionsspule* in dieser Hinsicht vorteilhaft verwendet werden kann.

Eine andere, elegantere Lösung ist durch den Impulsgenerator gegeben, der erstmals von Greinacher entwickelt wurde.

Der Funkengenerator

Ein Gleichstromgenerator mit der Spannung U lädt einen Kondensator C über einen Widerstand R auf, alle anderen Kondensatoren C' über die Widerstände R' (Abb. 105). Nach der Aufladung tritt an jeder Funkenstrecke ε ein Funke auf. (Es genügt, daß ein Funke überspringt; durch den Stromstoß werden auch die anderen Funkenstrecken zur Entladung gebracht.) In diesem Augenblick liegen alle Kondensatoren C' durch die leitenden Funkenstrecken ε in Reihe. Wenn man die geringen elektrischen Verluste vernachlässigt, die wir in den n Kondensatoren haben, so kann man die Spannung $n\,U$ an der Funkenstrecke des Verbrauchers E annehmen. Die Spannungsentnahme ist allerdings auf die kurze Zeitspanne der Funkenentladung beschränkt. Sind die Kondensatoren einmal entladen, so laden sie sich wieder auf, und der gleiche Vorgang wiederholt sich. Die erhaltene Spannung besteht also nur aus kurzzeitigen Impulsen. Mit einer großen Anzahl hintereinandergeschalteter Kaskaden kann man leicht eine Million Volt erzeugen.

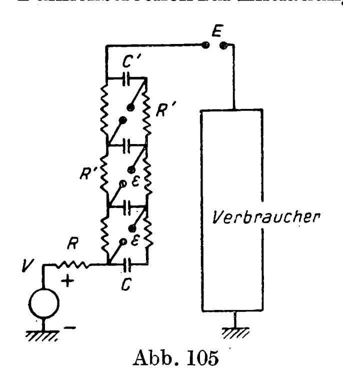


Abb. 105

MAGNETISMUS

I. KAPITEL

Wiederholung der Grundlagen

Wir wollen uns zunächst auf eine kurze Zusammenfassung der dem Leser bereits bekannten Tatsachen beschränken. Auf die einzelnen interessierenden Punkte werden wir im Laufe dieses Abschnitts zurückkommen.

Magnete. Magnetisierung

Es gibt eine Anzahl von Mineralien, wie z.B. das magnetische Fe_3O_4 (Magnetit oder Magneteisenstein genannt), die die Eigenschaft besitzen, Eisen anzuziehen. Diese Körper nennt man *natürliche Magnete.*

Wir können feststellen, daß mit einem Magneten bestrichenes Eisen selbst magnetisch wird; man sagt, daß es magnetisiert wurde. Wir müssen hier zwei Fälle unterscheiden:

1. Materialien wie z.B. Weicheisen, die ihre Magnetisierung nur so lange aufrecht erhalten, wie sie unter der Wirkung eines natürlichen Magneten stehen. Wird dieser Magnet entfernt, so nehmen sie sofort ihren unmagnetischen Ausgangszustand wieder an. Diese Körper nennt man *Weicheisenmagnete*; sie besitzen eine *induzierte Magnetisierung.*

2. Materialien wie z.B. gehärteter Stahl, die ihre Magnetisierung wenigstens teilweise aufrecht erhalten, auch wenn sie nicht mehr unter der Wirkung des natürlichen Magneten stehen und die so selbst zu Dauer- oder Permanentmagneten werden, wie die natürlichen Magnete selbst. Man spricht dabei von einer *remanenten Magnetisierung.*

Es gibt nur wenige Materialien, die unter der Wirkung starker magnetischer Felder eine Magnetisierung zeigen. Man nennt sie Ferromagnetika. Ihre Hauptvertreter sind Eisen, Nickel, Kobalt und deren Legierungen. Nähere Erklärungen zu diesem Phänomen werden wir beim weiteren Studium des Magnetismus geben.

Betrachten wir einen Eisenstab, den man auf der nördlichen Halbkugel bewegt. Dieser Eisenstab nimmt nun sowohl eine induzierte als auch eine *remanente* Magnetisierung an, die wie das magnetische Feld der Erde nach unten gerichtet sind. Außerdem besitzt der Eisenstab eine horizontale Magnetisierung, die ihr Vorzeichen mit der Stabrichtung ändert. Wird der Eisenstab in die südliche Halbkugel gebracht, in der das magnetische Feld der Erde nach oben gerichtet ist, ändert sich das Vorzeichen der induzierten Magnetisierung; es dauert jedoch Wochen und Monate, bis sich die remanente Magnetisierung umkehrt. Diese Eigenschaften sind bei der Konstruktion von *Magnetminen* von großer Bedeutung (siehe weiter unten).

Magnetisches Feld

An den Punkten des Raumes, die magnetischen Wirkungen unterworfen sind, spricht man von der Existenz eines magnetischen Feldes. Experimentelle Untersuchungen zeigen uns, daß die magnetischen Wirkungen aus Anziehungs- oder Abstoßungskräften und aus Richtwirkungen bestehen.

Wir können leicht beobachten, daß sich ein magnetischer Körper auf jedem Punkt der Erdoberfläche (mit Ausnahme weniger Punkte) parallel zu einer ganz bestimmten Richtung in konstanter Zeit einzustellen versucht. Diese Richtung charakterisiert das Magnetfeld der Erde; der Vorgang ist jedoch nicht von Anziehungs- oder Abstoßungskräften begleitet. Eine Erklärung für diese Tatsachen werden wir besser erst dann geben, wenn uns die Ergebnisse der COULOMBschen Versuche mit Stabmagneten bekannt sind und wenn wir die wichtige Unterscheidung zwischen *Feld* und *magnetischer Induktion* getroffen haben.

Magnetische Pole

Wir wollen nun einen Magneten betrachten, der ungefähr 10mal so lang wie breit ist. Die diese Wirkungen dieses Magnetstabs hervorrufenden Ursachen scheinen an den Stabenden lokalisiert. So werden z.B. Eisenfeilspäne nur an den Enden des Magnetstabes angezogen (Abb. 106).

Wir führen nun die Definition des *magnetischen Pols* ein: Dies sei der Bereich eines Magnetstabes, in dem sein magnetisches Verhalten konzentriert zu sein scheint. Diese Pole erscheinen beinahe fest lokalisiert und von konstanter Stärke, wenn man sie verschiedenen Feldern unterwirft. Die verschiedenen Feldstärken erhält man durch Annähern bzw. Entfernen eines Hilfsmagneten. Die Annahme der Konstanz von Lage und Stärke der Pole erlaubt nur eine erste Annäherung, die jedoch schon recht interessante Resultate ergibt.

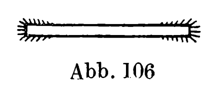


Abb. 106

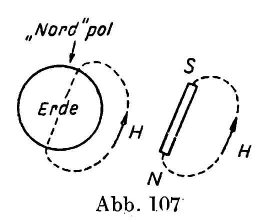


Abb. 107

Weiterhin können wir feststellen, daß auf einem Magnetstab niemals ein einziger Pol existiert. Sobald man einen Pol den beiden Enden eines Hilfsmagneten nähert, erhält man eine Anziehung oder eine Abstoßung, je nachdem, um welches Ende des Hilfsmagneten es sich handelt. Es existieren also zwei verschiedene „Magnetismen", die an den Enden eines Magneten konzentriert sind, und die man „*Nordmagnetismus*" und „*Südmagnetismus*" nennt. Wenn man einen Magnetstab so aufhängt, daß er sich im magnetischen Feld der Erde ausrichten kann, so stellt sich ein Ende des Magneten in Richtung des Nordpols und das andere in Richtung des Südpols ein. Man spricht im ersten Fall von „Nordmagnetismus" und im zweiten von „Südmagnetismus".

Wichtige Bemerkung: Aus dem eben Gesagten können wir schließen, daß der Nordpol der Erde einem magnetischen Südpol entspricht. Die geographischen Bezeichnungen Nord und Süd müßten umgekehrt sein, wenn sie in Übereinstimmung mit dem Magnetismus wären.

Wir können also folgendes qualitative Gesetz aufstellen: *Zwei gleichnamige Magnetpole stoßen sich ab, zwei verschiedene ziehen sich an.*

Experimente von Coulomb

Coulomb hat quantitative Untersuchungen der Stabmagneten mit einer Torsionswaage angestellt, die er bei diesen Versuchen einführte. Wir können leicht einen analogen Versuchsaufbau herstellen, indem wir einen Stabmagneten mit Hilfe eines Bügels an einem Torsionsdraht aufhängen. Ein an diesem Torsionsdraht befestigter Spiegel gestattet die Anwendung der Poggendorfschen Methode (Abb. 108).

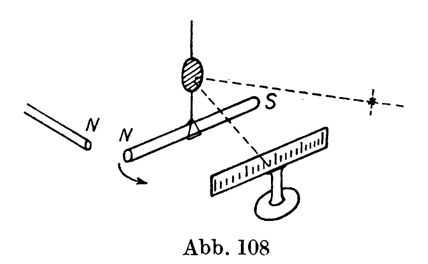


Abb. 108

Coulomb hat nun gefunden, daß die Anziehungs- bzw. Abstoßungskräfte zwischen zwei Polen in sehr starkem Maße von ihrer Entfernung abhängen, und zwar *genau umgekehrt dem Quadrat der Entfernung proportional* sind. Diese Entfernungsabhängigkeit gestattet, die einander genäherten Pole zu untersuchen, ohne daß die Genauigkeit durch die beiden anderen, entfernteren Pole beeinflußt wird.

Coulomb hat weiter gefunden, daß die Effekte, die durch den Südpol eines Stabmagnetes hervorgerufen wurden, die gleiche Stärke hatten, wie die vom Nordpol des gleichen Stabmagneten. Mit anderen Worten, ein Stabmagnet enthält die gleiche Menge „Nordmagnetismus" wie „Südmagnetismus".

Wir können also ohne Schwierigkeiten die Wirkungen des Magnetfeldes der Erde auf einen Stabmagneten erklären (Abb. 109). Wir wollen annehmen, daß das Erdfeld in einem genügend großen Bereich einer in Größe und Richtung konstanten Kraft entspricht. Die auf einen Magneten wirkende Kraft hängt dann von der Stärke des Magneten ab und hat für „Nord"- und „Südmagnetismus" verschiedene Vorzeichen. Wirkt auf den Nordpol des Magneten eine Kraft K, dann wirkt auf den Südpol eine Kraft $-K$. Diese beiden Kräfte wirken wie ein Drehmoment, und ihre Resultante ist Null. Wir erhalten also nur eine Orientierung, keine Translation.

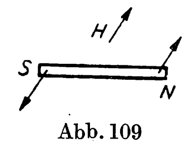


Abb. 109

Dies Experiment zeigt uns, daß ein Magnet, von *welcher Art und welcher Form er auch sein möge, immer nur eine Orientierung im Erdfeld* erleiden wird. Daraus können wir schließen, daß „Nordmagnetismus" (oder „Südmagnetismus") niemals allein existiert, sondern gleichzeitig immer die gleiche Menge „Südmagnetismus" (oder „Nordmagnetismus") auftritt. Der Einfachheit halber kennzeichnet man den „Nordmagnetismus" durch positives, den „Südmagnetismus" dagegen durch negatives Vorzeichen. Diese Summe beider „Magnetismen" ergibt also bei einem Magneten Null.

Bemerkung: Es führt zu einer grundsätzlich falschen Auffassung, wenn man annimmt, daß auf jedem Magneten nur ein Südpol und nur ein Nordpol existieren und daß diese Pole lokalisiert sind. Es ist durchaus möglich, daß sich bei der Magnetisierung eines Körpers ein Nordpol und drei Südpole bilden (Abb. 110).

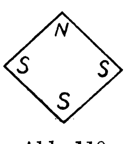


Abb. 110

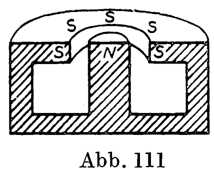


Abb. 111

Elektromagnetische Lautsprecher sind dafür ein gutes Beispiel: (Abb. 111). Sie bestehen aus einem runden Eisenkern mit einem Nordpol in der Mitte und einem Südpol um den Nordpol herum. Die bewegliche Spule taucht in den Spalt.

Für alle diese Magnete ist jedoch die Summe ihrer „Magnetismen" immer Null. Diese Tatsache entspricht einer zwingenden Notwendigkeit, die wir noch genauer untersuchen werden (siehe Experimente mit einem zerbrochenen Magneten).

Magnetische Massen. Coulombsches Gesetz

Das gefundene Kraftgesetz stellt eine Analogie zum Kraftgesetz in der Elektrostatik dar. Die magnetischen Massen werden in völlig analoger Weise zu den elektrischen Massen definiert. Wählt man nun noch eine Einheit, so ergibt sich experimentell das Coulombsche Gesetz.

Zwei magnetische Pole, die man als punktförmig annehmen kann und die die magnetischen Massen m und m′ tragen, ziehen sich an oder stoßen sich ab mit einer Kraft

$$k = \frac{1}{\mu_0} \frac{m \cdot m'}{r^2},$$

wobei r die Entfernung der beiden Pole voneinander ist.

Diese Formel gilt algebraisch, d.h., wenn m und m' gleiches Vorzeichen haben, ist das Produkt $m \cdot m'$ positiv. Die Kraft hat also positives Vorzeichen. Dies entspricht einer Abstoßung.

μ_0 ist ein physikalischer Proportionalitätsfaktor, dessen numerischer Wert von den gewählten Einheiten abhängt. Wir wollen annehmen, daß die Experimente im Vakuum durchgeführt wurden, damit eine magnetische Polarisation der Materie nicht berücksichtigt zu werden braucht. (Später werden wir sehen, daß diese Polarisation die *Magnetisierung* darstellt.)

Dieses Wechselwirkungsgesetz der magnetischen Massen hat die gleiche Form wie das der elektrostatischen Massen. Wir können daraus schließen, daß *alle allgemeinen Gesetze der Elektrostatik ein magnetisches Analogon haben werden.* Die Theoreme von Gauss, Coulomb und die Poissonsche Gleichung sind dann gültig und können ohne nochmalige Ableitung übernommen werden.

Magnetisches Feld

Wir wählen $m' = 1$. Dann ist

$$H = \frac{1}{\mu_0} \frac{m}{r^2}$$

die Kraft, die die magnetische Masse m auf einen magnetischen positiven Einheitspol in der Entfernung r ausübt. H ist das magnetische Feld, das durch die Masse m aufgebaut wird.

Allgemeiner können wir sagen, daß das magnetische Feld in jedem Punkt des Raumes, in dem eine magnetische Wirkung existiert, durch die Kraft definiert ist, die auf eine positive magnetische Einheitsmasse wirken würde. Die magnetischen Felder sind selbstverständlich *Vektoren*, die z. B. entlang r gerichtet sind, wenn sie aus der Wirkung einer punktförmigen Einheitsmasse resultieren.

Man definiert wieder wie in der Elektrostatik Kraftlinien und Kraftlinienröhren.

Experimentelle Untersuchungen des magnetischen Feldes werden am einfachsten mit Eisenfeilspänen durchgeführt. Diese Eisenfeilspäne werden magnetisiert, und die Teilchen richten sich entsprechend dem Feld aus; sie zeigen die Kraftlinien an. Man erhält so ein magnetisches Spektrum.

Elektromagnetische CGS-Einheiten

Wir können sofort die elektromagnetische CGS-Einheit des „Nord- oder Südmagnetismus" definieren: Sie wird die magnetische Masse sein, die, punktförmig angenommen, von einer zweiten, gleich großen im Abstand von 1 cm mit einer Kraft von 1 dyn abgestoßen wird. Wir sehen also, daß der Koeffizient μ_0 des COULOMBschen Gesetzes gleich der Einheit gewählt werden muß. Das elektromagnetische CGS-System ist ein *kohärentes elektromagnetisches System*. Die Einheit des Magnetismus oder des Pols hat keine besondere Bezeichnung.

Hieraus ergibt sich für das magnetische Feld eine abgeleitete Einheit, die dem Feld entspricht, das in 1 cm Entfernung von der magnetischen Einheitsmasse aufgebaut wird. Das Feld wurde ursprünglich in Gauß gemessen. Es hat sich jedoch als praktisch erwiesen, das durch 1 Gauß gekennzeichnete Feld mit 1 Oersted zu bezeichnen. Man beschränkt den Gebrauch der Kennzeichnung Oersted auf Felder, die magnetische Induktionen hervorrufen (z. B. Felder, die von stromdurchflossenen Spulen aufgebaut werden). Diese Unterscheidung gewinnt in moderneren Maßsystemen an Bedeutung, da hier die Einheit der Induktion nicht die gleiche wie die des Feldes ist. Es gibt jedoch auch Fälle, in denen man die Bezeichnung Gauß für die Induktionseinheit beibehalten könnte.

Die Horizontalkomponente des Erdfeldes beträgt 0,2 Oersted, seine Vertikalkomponente 0,5 Oersted.

Bei den schon zitierten Lautsprechermagneten haben wir im allgemeinen im Ringspalt ein Feld von 7000–14000 Oersted, je nach der Ausführung.

Eine andere abgeleitete Einheit kennzeichnet den magnetischen Fluß oder den Fluß des Vektors $\mathfrak{H}$ durch eine Fläche. Die Einheit, die dem Fluß eines gleichförmigen Feldes von 1 Gauß durch eine zu seiner Richtung senkrechte Fläche von 1 cm^2 Größe entspricht, heißt das *Maxwell*. Eine Zeitlang wurden die Einheiten Gauß und Maxwell auch im praktischen Maßsystem (Volt, Ampere usw.) benutzt. Sie sind jetzt jedoch durch die Einheiten des GIORGIschen Systems ersetzt worden. (Siehe Kapitel über die Einheiten.)

Die Magnetnadel

Die Tatsache, daß sich ein Magnet im Erdfeld ausrichtet, wird bei der Magnetnadel (Schiffskompaß) zugrunde gelegt und wurde zuerst von den Chinesen zu Orientierungszwecken ausgenutzt.

Im Jahre 2637 v. u. Z. verfolgten die Truppen des Kaisers HOANG-TI einen rebellischen Prinzen und verirrten sich dabei in den dichten Nebeln der mandschurischen Ebenen. Dies veranlaßte HOANG-TI, einen Wagen mit einer drehbaren Statue zu konstruieren, deren Arm immer nach Süden zeigte.

1110 v. u. Z. schickte ein Minister Botschafter nach Indochina. Damit sie sich orientieren konnten, gab er ihnen einen solchen Tschi-Nan, d. h. einen „Südwagen", mit. Um die gleiche Zeit finden wir auf den chinesischen Schiffen im Indischen Ozean bereits Magnetnadeln, während der Magnetwagen weiterhin kriegerischen Zwecken diente.

In einem noch heute erhaltenen chinesischen Buch aus dem Jahre 121 u. Z. wird die Magnetisierung einer Nadel durch Reiben mit Magneteisenstein beschrieben.

658 u. Z. wurde in Japan der erste „Magnetwagen" konstruiert, dessen Unterlagen von Korea geliefert wurden.

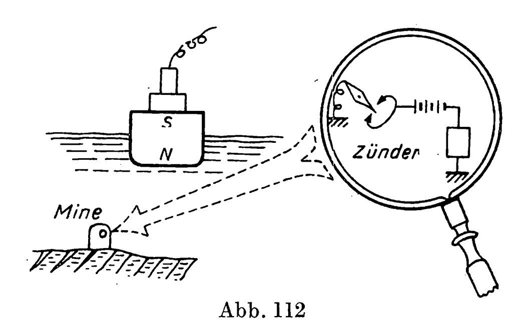


Abb. 112

Im Jahre 1939 fand dann die Magnetnadel in den deutschen Magnetminen eine neue militärische Anwendung. Die Magnetnadel diente zur Schließung eines Stromkreises, der die Explosion der Mine hervorrief, wenn sich die Vertikalkomponente des Erdfeldes veränderte (Abb. 112).

Eine solche Veränderung des Magnetfeldes kann z. B. durch ein eisernes Schiff erfolgen, das in der Nähe vorbeifährt (20 m) und das im Laufe seiner Fahrten über die nördliche Halbkugel eine Magnetisierung erfahren hat, wie sie die Abb. 112 zeigt.

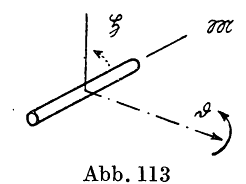
Die Magnetminen sind bereits für kleine Veränderungen des Magnetfeldes der Erde empfindlich, z. B. 0,05 Gauß.

Zum Schutz gegen diese Magnetminen hat man die Schiffe entmagnetisiert, indem man sie einem entgegengesetzten Magnetfeld aussetzte. Dieses Magnetfeld wurde durch einen elektrischen Strom, der in einer Leitung um das Schiff herumverlief, aufgebaut. Die Entmagnetisierung fand entweder laufend statt oder wurde nach gewissen Zeitabständen wiederholt. Zum Entschärfen der Minen zog man z. B. Kabel, durch die ein starker Strom floß und so ein Magnetfeld aufbaute, durch das Meer.

Wirkung eines homogenen Feldes auf einen Magneten

Die positiven magnetischen Massen eines Magneten haben ein gemeinsames Zentrum, das wir Nordpol nennen. Genau so definieren wir den Südpol des Magneten; die Pole entsprechen den magnetischen Größen $+m$ und $-m$.

Wenn man den Magneten in ein homogenes Feld $\mathfrak{H}$ bringt, sind seine Pole parallel zum Feld stehenden Kräften unterworfen:


Abb. 113

$$\mathfrak{K} = m\mathfrak{H},$$

$$\mathfrak{K}' = -m\mathfrak{H},$$

und es ergibt sich ein Drehmoment

$$D = Kl\sin\Theta = mlH\sin\Theta;$$

l ist dabei die Entfernung der Pole voneinander und Θ der Winkel zwischen der Verbindungslinie der Pole und der Richtung des Feldes.

Wir setzen $ml = M$ und bezeichnen M als magnetisches Moment, durch das der Magnet charakterisiert ist. Man stellt M oft als einen Vektor dar, der die Richtung der Verbindungslinie der Pole hat (Abb. 113).

Für das Drehmoment erhalten wir jetzt den Ausdruck

$$D = -MH\sin\Theta.$$

Das Minuszeichen besagt, daß es sich um ein rückdrehendes Moment handelt. In Vektorschreibweise hat diese Gleichung die Form

$$\mathfrak{D} = \mathfrak{M} \times \mathfrak{H}.$$

Vereinbarung über den Drehsinn

Wir wissen, daß die Formeln, die wir entwickeln werden, folgenden Übereinkünften entsprechen: Das Drehmoment D wird durch einen Vektor $\mathfrak{D}$ dargestellt, der senkrecht zur durch M und H definierten Ebene verläuft. Auf dieser Senkrechten wählt man eine positive Richtung, und zwar die, die von den Füßen eines Beobachters, der auf der Ebene liegt, zu seinem Kopf hin verläuft, wenn der Beobachter sieht, daß die Drehung des Magneten umgekehrt zum Uhrzeigersinn ist. Wir werden feststellen, daß die Größe des Drehmoments der Fläche des aus den Seiten M und H gebildeten Parallelogramms gleich ist. Obgleich die Kenntnis dieser Übereinkunft zum Behandeln der magnetischen Orientierungsprobleme nicht unbedingt erforderlich ist, wäre es trotzdem zweckmäßig, sie nicht zu übersehen, da wir sie bei den Problemen der Wechselwirkung zwischen Strömen und magnetischen Feldern wiederfinden werden.

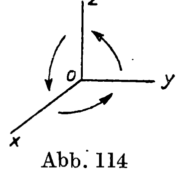


Abb. 114

Die Komponenten des Drehmoments in rechtwinkligen Koordinatensystemen haben die Form

$$D_x = M_y H_z - M_z H_y,$$

$$D_y = M_z H_x - M_x H_z,$$

$$D_z = M_x H_y - M_y H_x.$$

Erinnern wir uns der Herleitung dieser Formeln: Auf den drei Achsen Ox, Oy, Oz haben wir drei Einheitsvektoren $\mathfrak{i}$, $\mathfrak{j}$, $\mathfrak{k}$; $\mathfrak{M}$ und $\mathfrak{H}$ setzen sich also aus der geometrischen Summe ihrer Komponenten zusammen:

$$\mathfrak{M} = M_x \mathfrak{i} + M_y \mathfrak{j} + M_z \mathfrak{k},$$

$$\mathfrak{H} = H_x \mathfrak{i} + H_y \mathfrak{j} + H_z \mathfrak{k}.$$

Das Vektorprodukt einer Vektorensumme mit einem anderen Vektor ist gleich der Summe der Produkte. Wir erhalten also

$$\mathfrak{M} \times \mathfrak{H} = (M_x \mathfrak{i} + M_y \mathfrak{j} + M_z \mathfrak{k}) \cdot (H_x \mathfrak{i} + H_y \mathfrak{j} + H_z \mathfrak{k})$$

$$= M_x H_x (\mathfrak{i} \times \mathfrak{i}) + M_y H_x (\mathfrak{j} \times \mathfrak{i}) + M_z H_x (\mathfrak{k} \times \mathfrak{i}) + \cdots.$$

Da

$$\mathfrak{i} \times \mathfrak{i} = 0; \quad \mathfrak{j} \times \mathfrak{i} = -\mathfrak{k}; \quad \mathfrak{k} \times \mathfrak{i} = \mathfrak{j}$$

usw. gilt, ist

$$\mathfrak{M} \times \mathfrak{H} = -M_y H_x \mathfrak{k} + M_z H_x \mathfrak{j} + \cdots,$$

und wir erhalten

$$\mathfrak{M} \times \mathfrak{H} = \mathfrak{i} (M_y H_z - M_z H_y) + \mathfrak{j} (M_z H_x - M_x H_z) + \mathfrak{k} (M_x H_y - M_y H_x),$$

woraus sich die drei Komponenten D_x, D_y, D_z ergeben.

II. KAPITEL

Wirkungen und Feld eines kleinen Magneten

Energie eines kleinen Magneten in einem Magnetfeld

Wir wollen annehmen, daß wir einen kleinen Magneten haben (magnetischen Dipol), d.h. zwei kleine punktförmige Massen $+m$ und $-m$, die sich in einem festen Abstand l voneinander befinden; l sei gegenüber den anderen noch zu betrachtenden Längen unendlich klein.

Diesen kleinen Magneten bringen wir nun in ein magnetisches Feld, das von einem Potential V abgeleitet wird. Wir nehmen an, daß das Feld durch magnetische Massen gebildet wird. Dies muß jedoch nicht so sein, da sich das Potential V aus den gefundenen Formeln eliminieren läßt. V_1, V_2 und V_∞ seien die Werte des Potentials in 1, in 2 und im Unendlichen.

Wenn wir diesen kleinen Magneten ins Unendliche bringen, so muß gegen die magnetischen Kräfte eine Arbeit geleistet werden:

$$WA = m(V_1 - V_\infty) - m(V_2 - V_\infty) = m(V_1 - V_2).$$

Diese Arbeit ist nach Definition die potentielle Energie des kleinen Magneten im Feld.

1 und 2 mögen sehr nahe beieinander liegen:

$$V_1 = V_2 + l\frac{\partial V}{\partial l}.$$

Wir wissen, daß das Feld gegeben ist zu

$$\mathfrak{H} = -\frac{\partial V}{\partial n};$$

$-\frac{\partial V}{\partial l}$ ist die H_l-Komponente des Feldes in Richtung der Achse des Dipols. Wir erhalten also

$$W = -mlH_l;$$

ml nennen wir magnetisches Moment M des Dipols. Dann gilt

$$W = -MH_l = -MH\cos\Theta.$$

Dabei ist Θ der Winkel, den das Feld mit der Achse des Dipols bildet.

Für die potentielle Energie des kleinen Magneten im Feld $\mathfrak{H}$ erhalten wir also

$$W = -MH\cos\Theta = -\mathfrak{M}\cdot\mathfrak{H}.$$

$\mathfrak{M}\cdot\mathfrak{H}$ bezeichnet das skalare Produkt der beiden Vektoren $\mathfrak{M}$ und $\mathfrak{H}$.

Wenn wir nun einen größeren Magneten haben, so können wir ihn in eine Anzahl gleich großer Dipole, wie den eben betrachteten, zerlegen. Jeder dieser Dipole hat dann ein magnetisches Moment dM und befindet sich in einem Feld $\mathfrak{H}$. Diese Zerlegung ist offensichtlich immer möglich, da

$$\Sigma m = 0.$$

Für die potentielle Energie des Magneten ergibt sich

$$W = -\Sigma\mathfrak{H}\cdot d\mathfrak{M}.$$

Wenn das Feld homogen ist, so ist $\mathfrak{H}$ an jedem Punkt gleich, und wir erhalten

$$W = -\mathfrak{H}\Sigma d\mathfrak{M} = -\mathfrak{H}\cdot\mathfrak{M}.$$

Kräfte und Drehmomente eines kleinen Magneten in einem Feld

Dieser kleine Magnet besitze die potentielle Energie W. Verschieben wir ihn nun um dx parallel zu Ox. Es sei X die Projektion der auf diesen Magneten ausgeübten Kraft auf die Achse. Die Arbeit dieser Kraft beträgt Xdx.

Nach dem Prinzip der Energieerhaltung gilt

$$Xdx = -dW.$$

Dabei ist dW die Änderung der potentiellen Energie des kleinen Magneten.

Also ist

$$X = -\frac{\partial W}{\partial x}.$$

Man erhält analoge Ausdrücke für Y und Z.

Wir haben gesehen, daß

$$-W = \mathfrak{M} \cdot \mathfrak{H}$$

ist. Bei einer Parallelverschiebung ändert sich $\mathfrak{M}$ nicht:

$$X = \mathfrak{M} \cdot \frac{\partial \mathfrak{H}}{\partial x} = M_x \frac{\partial H_x}{\partial x} + M_y \frac{\partial H_y}{\partial x} + M_z \frac{\partial H_z}{\partial x}$$

(mit den üblichen Bezeichnungen).

Die Kraftkomponenten im rechtwinkligen Koordinatensystem ergeben sich zu

$$X = M_x \frac{\partial H_x}{\partial x} + M_y \frac{\partial H_y}{\partial x} + M_z \frac{\partial H_z}{\partial x},$$

$$Y = M_x \frac{\partial H_x}{\partial y} + M_y \frac{\partial H_y}{\partial y} + M_z \frac{\partial H_z}{\partial y},$$

$$Z = M_x \frac{\partial H_x}{\partial z} + M_y \frac{\partial H_y}{\partial z} + M_z \frac{\partial H_z}{\partial z}.$$

In einem homogenen Feld ist H konstant, d.h., es ist $X = Y = Z = 0$. Dies bedeutet, daß der Magnet keiner Kraft unterworfen ist, wie wir bereits gesehen hatten. Eine Kraft tritt also nur bei inhomogenen Feldern auf.

Um das auf den kleinen Magneten ausgeübte Moment berechnen zu können, betrachten wir eine kleine Rotation $d\alpha$. Die Arbeit des Drehmomentes beträgt $D\,d\alpha$. Also gilt

$$D\,d\alpha + dW = 0;$$

daraus folgt

$$D = -\frac{\partial W}{\partial \alpha}.$$

Wenn wir den Magneten um eine zu der durch M und H definierten Ebene senkrecht stehenden Achse drehen, geht der Winkel α in den Winkel Θ über, und wir erhalten mit

$$W = -\mathfrak{M} \cdot \mathfrak{H} = -MH\cos\Theta,$$

$$D = -\frac{\partial W}{\partial \Theta} = -MH\sin\Theta$$

einen Ausdruck, den wir schon direkt erhalten haben. Das Minuszeichen zeigt, daß es sich um ein Rückdrehmoment handelt, das den Magneten in eine Gleichgewichtslage zurückdreht, in der seine Richtung mit der des Feldes übereinstimmt, d.h., $\mathfrak{M}$ liegt in der Richtung von $\mathfrak{H}$.

Potential eines kleinen Magneten

Wir betrachten einen kleinen Magneten und wollen das Potential, das in einem Punkt P in einer im Verhältnis zur Länge des Dipols relativ großen Entfernung erzeugt wird, berechnen. Dieses Potential ist die algebraische Summe der von den Ladungen $+m$ und $-m$ erzeugten Potentiale und hat die Form

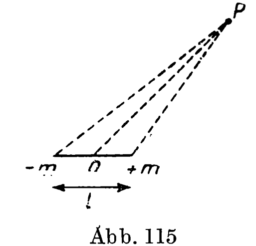


Abb. 115

$$V = m\left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2}\right) = m\,\frac{r_2 - r_1}{r_1 r_2},$$

und bis auf sehr kleine Größen gilt

$$r_2 - r_1 = l\cos\Theta$$

und

$$r_1 r_2 = r^2.$$

Dabei sind r und Θ die Polarkoordinaten von P. Der Pol ist das Zentrum des Dipols. Folglich ist

$$V = \frac{m l \cos\Theta}{r^2}.$$

ml ist wieder das magnetische Moment M des Magneten. Daraus folgt:

$$V = \frac{M\cos\Theta}{r^2}.$$

Die Äquipotentialflächen haben die Formel:

$$\frac{\cos\Theta}{r^2} = \text{const};$$

man erkennt also sofort ihre Form.

Bemerkung: Diese Resultate haben offensichtlich Analogien in der Elektrostatik, wo die Elektrete den betrachteten Magneten entsprechen.

Durch einen kleinen Magneten hervorgerufenes Feld

Das Feld ist durch die vektorielle Beziehung $\mathfrak{H} = -\operatorname{grad} V$ gegeben:

$$\mathfrak{H} = -\frac{\partial V}{\partial n}.$$

In irgendeinem Punkt P wollen wir nun die Komponenten H_r des Feldes auf den Radiusvektor $\overrightarrow{OP}$ und H_t auf die Senkrechte zu diesem Radiusvektor berechnen (Abb. 116):

$$H_r = -\frac{\partial V}{\partial r} = 2\,\frac{M\cos\Theta}{r^3},$$

$$H_t = -\frac{1}{r}\,\frac{\partial V}{\partial\Theta} = \frac{M\sin\Theta}{r^3}.$$

Es sei φ der Winkel zwischen Feld und Radiusvektor. Dann ergibt sich nach Abb. 116

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{1}{2}\operatorname{tg}\Theta .$$

Dieses Feld besitzt besonders einfache Werte, wenn der Punkt auf einer der Symmetrieachsen des Dipols liegt.

Im Punkt A ist die Feldrichtung durch OA gegeben und hat den Wert $H_1 = \frac{2M}{r^3}$; H_t ist dann Null.

Im Punkt B steht das Feld senkrecht auf OB und hat den Wert $H_2 = H_t = \frac{M}{r^3}$, und H_r ist Null (Abb. 117).

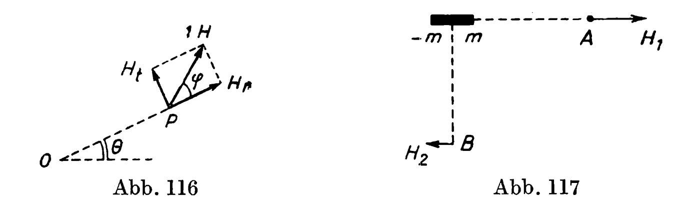


Abb. 116 Abb. 117

Die Tatsache, daß $H_1/H_2 = 2$ ist, folgt aus dem COULOMBschen Gesetz und wurde von GAUSS im Jahre 1840 auf $^1/_{1000}$ genau nachgewiesen. Diese Genauigkeit ist jedoch nicht ausreichend, um das sich ergebende magnetische Moment zur Berechnung des Feldes verwenden zu können (l/r ist nicht klein genug).

Messung magnetischer Größen

Die Messungen magnetischer Größen beschränken sich auf Messungen des Feldes und des magnetischen Momentes. Die direkt experimentell meßbaren Größen sind das Produkt $M \cdot H$ und der Ausdruck $\frac{M}{H}$, die bei der Anwesenheit eines Magneten in einem magnetischen Feld auftreten. Aus diesen Ausdrücken kann man M und H folgern.

Messung von $M \cdot H$

In einem magnetischen Feld $\mathfrak{H}$ befinde sich ein Magnet. Diesen Magneten drehen wir um den Winkel Θ aus seiner Gleichgewichtslage. Dabei tritt ein Rückdrehmoment $-MH\sin\Theta$ auf.

Die Bewegungsgleichung des Magneten hat dann die Form

$$I \cdot \frac{d^2\Theta}{dt^2} + MH \cdot \sin\Theta = 0.$$

I ist dabei das Trägheitsmoment des Magneten. Wenn Θ sehr klein ist, lautet die Bewegungsgleichung

$$I \cdot \frac{d^2\Theta}{dt^2} + MH\Theta = 0.$$

Dies ist aber die Gleichung einer sinusförmigen Bewegung mit der Periode

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{I}{MH}}.$$

Bei bekanntem I ergibt die Messung von T den Wert von MH. Meist ist jedoch I nicht mit genügender Genauigkeit bekannt. Man bestimmt es in einem zweiten folgenden Experiment. Dazu bringt man in einer Entfernung r von der Achse zusätzlich die *nichtmagnetischen metallischen* Massen m auf dem Magneten an (Abb. 118) und erhält dann ein Trägheitsmoment

$$I' = I + 2\,m\,r^2.$$

Die Schwingungsperiode lautet dann

$$T' = 2\pi \sqrt{\frac{I + 2\,m\,r^2}{MH}}.$$

Abb. 118

Wenn man I eliminiert, so ergibt sich

$$MH = 2\,m\,r^2 \cdot \frac{4\pi^2}{T'^2 - T^2}.$$

Messung von $\frac{M}{H}$

Abb. 119

Zur Messung dieser Größe benutzt man ein Magnetometer. Dies besteht aus einer kleinen magnetisierten Nadel, die an einem untordierten Draht hängt. An dem Draht befindet sich ein Spiegel S, mit dem man die Auslenkungen nach der POGGENDORFschen Methode messen kann (Abb. 119). Dieses Magnetometer wird in das Magnetfeld H gebracht. Man erzeugt mit dem Magneten, dessen magnetisches Moment man messen will, ein Feld h senkrecht zu H. Das Magnetometer zeigt einen Ausschlag um den Winkel α. Es gilt

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{h}{H}.$$

Wenn sich das Magnetometer auf der Verlängerung der durch beide Pole gehenden Symmetrieachse befindet (d.h. in der 1. GAUSSschen Stellung), so erhalten wir

$$h = \frac{2M}{r^3}$$

und daraus

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{2}{r^3}\,\frac{M}{H}.$$

Im allgemeinen ist das Feld H das Magnetfeld der Erde, mit dem wir uns noch näher befassen werden.

Das Magnetfeld der Erde

Die Senkrechte in einem Punkt und die Richtung einer Magnetnadel im gleichen Punkt definieren eine Ebene, die man *magnetischen Meridian* nennt.

Den Winkel zwischen diesem und dem geographischen Meridian nennt man *Deklination*. Er ist für einen gegebenen Ort zeitlich veränderlich.

Die Veränderung der Deklination entlang eines Meridians wurde zuerst von CHRISTOPH COLUMBUS auf seiner ersten Amerikareise festgestellt.

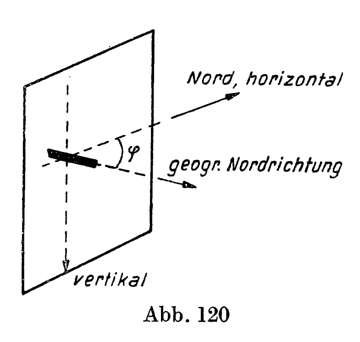


Abb. 120

Sie unterliegt jährlichen Schwankungen von 2° bis 12° und ist zur Zeit westlich. Ihr Wert beträgt in Nizza z.B. 6° 10′, in Brest 12°.

Außerdem unterliegt die Deklination auch Säkularvariationen. So hatte sie im Jahre 1556 in Paris einen Wert von 10° östlich. Seit 1660 ist sie westlich und hatte 1814 einen Maximalwert von 22° 14′.

Die Magnetisierungsrichtung von Lavamassen gestattet uns, Aussagen über die Veränderung der magnetischen Deklination in lange zurückliegenden Epochen zu machen. Wir können daraus feststellen, daß die Säkularvariationen sinusförmig waren und ihre Periode mehrere Jahrhunderte betrug. (Diese Methode beruht auf der bekannten Tatsache, daß sich Lavamassen im Moment ihrer Erstarrung magnetisieren.)

Wenn man anderseits eine Magnetnadel in ihrem Schwerpunkt aufhängt, so kann man eine bestimmte Inklination gegen die geographische Nordrichtung feststellen.

Der Winkel I zwischen der Nord-Süd-Richtung und der Horizontalen heißt *Inklination*. Er ist ebenfalls zeitlich veränderlich und hat z. B. in Perpignan z. Zt. einen Wert von 60°, in Dünkirchen 66°.

Aufgabe

Zur Übung wollen wir folgende Aufgabe behandeln: *Wie richten sich zwei einander gleiche Magnete aus, die jeder frei um sein Zentrum drehbar unter dem Einfluß ihrer gegenseitigen Wirkungen und unter der Wirkung eines gleichförmigen, zur Verbindungslinie ihrer Zentren senkrechten magnetischen Feldes H stehen?*

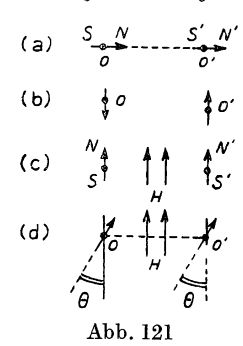


Abb. 121

Es seien O und O' die Rotationszentren dieser beiden Magnete. Wenn kein äußeres Feld H existiert, so richten sich die Magnete entlang der Geraden OO' aus, wobei ihre magnetischen Momente gleichgerichtet sind (Abb. 121a).

Ist die Orientierung der beiden Magnete nicht völlig frei, so stellen sie sich natürlich verschieden ein. Nehmen wir z.B. den Magneten $N'S'$ und stellen ihn senkrecht zu OO'; der Magnet NS wird sich nun parallel zu dem in O durch $N'S'$ erzeugten Feld einstellen, d.h. parallel, aber mit entgegengesetztem Sinn zu $N'S'$. (Tatsächlich befinden wir uns im Punkt O in bezug auf den wie in der Zeichnung gelegenen Magneten $N'S'$ in der zweiten GAUSSschen Stellung, d.h. senkrecht zu der Verbindungslinie der

beiden Pole.) In solchen Fällen spricht man von *antiparallelen* magnetischen Momenten (Abb. 121b).

Nehmen wir weiter an, daß die beiden Magnete frei beweglich seien, nun aber unter der Wirkung eines Feldes H stehen. Ist dieses Feld sehr groß, so stellen sich die beiden Magnete parallel zueinander ein (Abb. 121c). Ist H dagegen Null, so haben wir wieder den ersten Fall, d.h., die beiden Magnete liegen auf einer gemeinsamen Achse. Für ein beliebiges Feld H stehen die beiden Magnete parallel zueinander und schließen mit der Feldrichtung einen von der Feldstärke abhängigen Winkel Θ ein (Abb. 121d).

Man sieht tatsächlich sofort, daß alle diese Orientierungen in der Ebene (H, OO') verlaufen, und kann durch eine einfache Rechnung nachweisen, daß der gleiche Orientierungswinkel Θ für beide Magnete die geringste potentielle Energie erfordert.

Wir werden nun jedoch eine Diskontinuität der Orientierung feststellen müssen: Wenn das Feld H einen gewissen kritischen Wert überschreitet, so bleiben die beiden Magnete trotzdem parallel zu H ($\Theta = 0$). Nur für Werte von H unterhalb dieses kritischen Wertes verändert sich Θ kontinuierlich von 0 bis $\pi/2$.

Das Gleichgewicht des Systems bleibt erhalten, da die potentielle Energie einen Minimalwert hat. (Wir erinnern an die Analogie des Schwerefeldes, ein Gewicht nimmt die tiefstmögliche Lage ein.) Diese potentielle Energie ist die Summe zweier Terme W_1 und W_2; W_1 rührt von dem Feld H her, W_2 von der Wechselwirkung der zwei Magnete aufeinander:

$$W = W_1 + W_2.$$

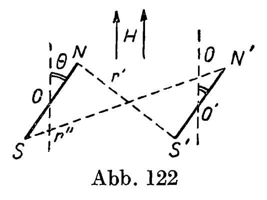


Abb. 122

Es sei Θ der Winkel der Polverbindungslinie eines Magneten im Gleichgewicht mit der Richtung des Feldes. Jeder Magnet mit einem magnetischen Moment M ist einem Rückdrehmoment

$$D = -MH \sin\Theta$$

unterworfen, d.h., er besitzt die potentielle Energie $-MH\cos\Theta$. Es ist also

$$W_1 = -2MH\cos\Theta.$$

Weiterhin seien m die magnetische Masse jedes Pols, $2l$ die Länge eines Magneten, r der Abstand zwischen zwei Polen gleichen Vorzeichens, r' die Entfernung zwischen N und S' und r'' die Entfernung zwischen N' und S (Abb. 122).

Die potentielle Energie des Magneten $N'S'$ in dem durch den anderen Magneten aufgebauten Feld ist die Summe der potentiellen Energie seiner Pole:

$$W_2 = m^2\left[\frac{2}{r} - \frac{1}{r'} - \frac{1}{r''}\right].$$

Da $2l$ sehr klein gegen r ist, gilt

$$r' = \sqrt{(r - 2l\sin\Theta)^2 + 4l^2\cos^2\Theta} = r\sqrt{1 - \frac{4l}{r}\sin\Theta + 4\frac{l^2}{r^2}},$$

$$r'' = \sqrt{(r + 2l\sin\Theta)^2 + 4l^2\cos^2\Theta} = r\sqrt{1 + \frac{4l}{r}\sin\Theta + 4\frac{l^2}{r^2}}.$$

Da für sehr kleine Größen ε

$$\frac{1}{\sqrt{1+\varepsilon}} = 1 - \frac{\varepsilon}{2} + \frac{3}{8}\,\varepsilon^2$$

gilt, finden wir entsprechend

$$W_2 = \frac{m^2}{r}\left(\frac{4l^2}{r^2} - \frac{12l^2}{r^2}\sin^2\Theta\right)$$

und $M = 2ml$. Folglich erhalten wir (bis auf konstante und sehr kleine Größen)

$$W = -2MH\cos\Theta - \frac{3\,M^2}{r^3}\cdot\sin^2\Theta;$$

dann ist

$$\frac{\partial W}{\partial\Theta} = 2MH\sin\Theta\left(1 - \frac{3M}{Hr^3}\cdot\cos\Theta\right).$$

Das Gleichgewicht ist gegeben durch $\frac{\partial W}{\partial\Theta} = 0$.

Daraus erhalten wir $\sin\Theta = 0$ (1. Lösung) und $\cos\Theta = \frac{Hr^3}{3M}$ (2. Lösung).

1. Wenn $\frac{Hr^3}{3M} > 1$, gibt es nur für $\Theta = 0$ ein Gleichgewicht. In diesem Fall hat W einen Minimalwert, wovon sich der Leser durch Rechnung überzeugen möge.

2. Wenn $\frac{Hr^3}{3M} < 1$ ist, entspricht $\Theta = 0$ einem Maximalwert von W, und wir haben ein instabiles Gleichgewicht.

Dagegen ist die durch $\cos\Theta = \frac{Hr^3}{3M}$ definierte Lage ein stabiles Gleichgewicht. (Die Berechnung bleibt dem Leser überlassen.)

Wir konnten also die bereits zu Anfang ausgesprochene Diskontinuität in der Orientierungsveränderung als Funktion von H feststellen. Die modernen Theorien des Magnetismus nehmen Wechselwirkungsphänomene an, die wie das einfache Problem zu behandeln sind, das wir bei der Betrachtung von Elementarmagneten fanden, die die Struktur der ferromagnetischen Körper bilden. Wir werden auf diese Frage noch zurückkommen.

III. KAPITEL

Untersuchung der magnetischen Materie

Experiment mit einem zerbrochenen Magneten

Wir haben bereits weiter oben gesehen, daß bei der Aufbringung einer magnetischen Menge auf einen Körper auf diesem immer die gleiche Menge von entgegengesetztem Magnetismus auftritt.

Versucht man z. B. zwei Pole eines Magneten so zu trennen, daß jeder auf einem anderen Körper weiter existiert, so stellt man fest, daß dies nicht möglich ist.

Zerbrechen wir eine Magnetnadel, so müssen wir erkennen, daß an der Bruchstelle neue Magnetpole auftreten und daß wir zwei Magnete erhalten, die genau wie der erste aus „Nord- und Südmagnetismus" gebildet werden. Zum Nachweis dieser Pole verwenden wir wieder einfachheitshalber Eisenfeilspäne.

Diesen Vorgang können wir nun beliebig oft wiederholen, bis wir in die Größenordnung von Molekülen kommen. Es zeigt sich also, daß die Magnetisierung eine molekulare Eigenschaft ist und daß die „Moleküle" magnetische Dipole sind.

Diese Tatsache ist durchaus mit der scheinbaren Existenz magnetischer Massen an den Magnetenden vereinbar. Bringen wir nämlich die Enden eines Magneten aneinander, so heben sich die Effekte der einzelnen Pole (Potentiale, Felder usw.) gegenseitig auf.

Es ist also klar, daß isolierte magnetische Massen nicht existieren und daß nur die magnetischen Momente eine Realität darstellen; es ist jedoch kein Grund vorhanden, auf die bequeme mathematische Hilfe zu verzichten, die die magnetische Masse für die Theorie darstellt.

Eine weitere Konsequenz der Tatsache, daß magnetische Massen in freiem Zustand nicht existieren, ist *das Fehlen jeglicher für den Magnetismus leitender Materialien,* in denen sich die magnetischen Massen frei bewegen und so das Potential ausgleichen könnten. Die magnetische Materie ist also ein Analogon zum Dielektrikum.

Magnetisierungsstärke

Die magnetischen Wirkungen, die von einem Magneten ausgehen, sind die Resultanten der Wirkungen, die von den Elementarmagneten ausgehen würden, aus denen man sich den Magneten aufgebaut denkt.

Wir betrachten ein kleines Volumenelement, das den Punkt P enthält. Dieses Volumenelement bildet einen Magneten mit dem magnetischen Moment $d\mathfrak{M}$, und die von ihm oder auf ihn ausgeübten Wirkungen entsprechen, wie wir schon gesehen haben, diesem $d\mathfrak{M}$. Andererseits ist $d\mathfrak{M}$ proportional dv, d. h., das magnetische Moment eines Magneten entspricht der Summe der magnetischen Momente aller seiner Elemente.

Wir können also

$$\frac{d\,\mathfrak{M}}{d\,v} = \mathfrak{J}$$

setzen. $\mathfrak{J}$ heißt *Vektor der Magnetisierung im Punkt P* und entspricht der *Polarisation* in der Elektrostatik.

Die von einem Magneten ausgehenden Wirkungen kann man berechnen, wenn die Magnetisierungsstärke in jedem Punkt bekannt ist.

Eine von Poisson durchgeführte Rechnung, deren Resultate wir bereits in der Elektrostatik benutzt haben, erlaubt uns, die Wirkungen des Magneten als Folge einer magnetischen Massenverteilung auf der Oberfläche und im Inneren des Magneten zu betrachten, die nur eine Funktion des Vektors $\mathfrak{J}$ ist.

Diese Rechnung wollen wir nun durchführen.

Äquivalenz der Verteilung magnetischer Massen und der Magnetisierungsverteilung $\mathfrak{J}$ eines Magneten

Wir wollen das Volumenelement dv betrachten, das der Wirkung eines Magnetfeldes $\mathfrak{H}$ unterliegt. Es besitzt eine potentielle Energie

$$dW = -d\mathfrak{M} \cdot \mathfrak{H} = d\mathfrak{M} \cdot \operatorname{grad} V = \mathfrak{J} \cdot \operatorname{grad} V \cdot dv.$$

Die potentielle Energie des Magneten beträgt

$$W = \iiint\limits_V \mathfrak{J} \operatorname{grad} V\, dv = \iiint\limits_V \left(I_x \frac{\partial V}{\partial x} + I_y \frac{\partial V}{\partial y} + I_z \frac{\partial V}{\partial z}\right) dx\,dy\,dz.$$

Durch partielle Integration erhalten wir

$$W = \iint\limits_F I_x V\, dy\, dz - \iiint\limits_V V \cdot \frac{\partial I_x}{\partial x} \cdot dx\, dy\, dz + \iint\limits_F I_y V\, dz\, dx$$

$$- \iiint\limits_V V \cdot \frac{\partial I_y}{\partial y} \cdot dx\, dy\, dz + \iint\limits_F I_z V\, dx\, dy - \iiint\limits_V V \frac{\partial I_z}{\partial z}\, dx\, dy\, dz$$

$$= \iint\limits_F V (I_x dy\, dz + I_y dz\, dx + I_z dx\, dy) - \iiint\limits_V V \left(\frac{\partial I_x}{\partial x} + \frac{\partial I_y}{\partial y} + \frac{\partial I_z}{\partial z}\right) dx\, dy\, dz$$

$$= \iint\limits_F V \mathfrak{J} \cdot d\mathfrak{F} - \iiint\limits_V V \operatorname{div} \mathfrak{J}\, dv.$$

Der Vektor $d\mathfrak{F}$ steht senkrecht auf der Oberfläche. Die Normale sei positiv gegen das Äußere der Oberfläche gerechnet.

Mit I_n bezeichnen wir die Projektion von $\mathfrak{J}$ auf diese positive Normale:

$$\mathfrak{J} \cdot d\mathfrak{F} = I_n\, dF,$$

und wir erhalten

$$W = \iint\limits_F V I_n\, dF - \iiint\limits_V V \operatorname{div} I\, dv.$$

Für die Energie eines Systems von magnetischen Massen, die auf der Oberfläche (F) mit der Dichte σ und im Innern der magnetisierten Materie mit der Dichte ϱ verteilt sind, ergibt sich

$$W = \iint\limits_F V \sigma\, dF + \iiint\limits_V V \varrho\, dv,$$

wobei V in jedem Fall das Potential darstellt.

Die Verteilung der magnetischen Momente in einer magnetisierten Materie entspricht also einer Verteilung mit der Dichte $\sigma = I_n$ auf der Oberfläche des Magneten und $\varrho = -\operatorname{div} I$ im Innern des Magneten. Dies ist gerade das Resultat, das wir bereits in der Elektrostatik zum Studium der polarisierten Dielektrika benutzt haben. Die Magnetisierungsstärke entsprach in der Elektrostatik der Polarisation P.

Potential in einem Punkt

Da das in einem Punkt P durch einen Magneten erzeugte Potential gleich der potentiellen Energie des Magneten in einem durch eine magnetische Masse $+1$ in P hervorgerufenen magnetischen Feld ist, so haben wir

$$V = \iint_F \frac{\sigma\, dF}{r} + \iiint_V \frac{\varrho\, dv}{r}$$

und

$$V = \iint_F \frac{I_n\, dF}{r} - \iiint_V \frac{\operatorname{div} I\, dv}{r}\,.$$

Damit ist bewiesen, daß der Magnet dem gleichen System magnetischer Massen entspricht, wie wir es soeben betrachteten, und zwar sowohl in bezug auf die von ihm ausgehenden als auch bezüglich der auf ihm wirkenden Phänomene.

Gleichförmige Magnetisierung

Wir wollen einen zylindrischen gleichförmig magnetisierten Stab betrachten, in dem also I konstant und parallel zur Zylinderachse ist (Abb. 123).

Die Dichte im Innern des Stabes ist Null, da $\operatorname{div} I = 0$ ist.

Auf der Mantelfläche tritt kein Magnetismus auf, da die magnetischen Massen in den Bereichen des Stabes lokalisiert sind, wo die Dichten $\sigma = I$ und $\sigma' = -I$ vorhanden sind.

$\sigma = +i$ $\sigma = -i$

Abb. 123

Tatsächlich ist das nur eine Annäherung, und das Experiment zeigt, daß die Pole nicht auf den Endflächen lokalisiert sind.

Dies ist dadurch bedingt, daß die auftretenden magnetischen Massen ein dem Feld $\mathfrak{H}$ entgegengerichtetes aufbauen, das man Entmagnetisierungsfeld nennt. In der Nähe der Stabenden ist dieses Feld sehr beträchtlich, wie es auch nach dem Coulombschen Gesetz erwartet werden muß.

Ist der betrachtete Stab sehr lang, so wird der Bereich, in dem das Entmagnetisierungsfeld stark ist, im Verhältnis zur Gesamtlänge des Stabes sehr klein sein, und die Annahme der Pollokalisierung in den Stabenden ist eine recht gute Annäherung.

Wir werden uns noch genauer mit dem Entmagnetisierungsfeld im Abschnitt über den Ferromagnetismus beschäftigen.

Magnetische Felder und Induktionen

Man kann keine experimentelle Definition des magnetischen Feldes im Innern der magnetisierten Materie geben, vielmehr nur jeweils eine theoretische Definition, die vom Potential ausgeht. (Wir haben in der Elektrostatik gesehen,

daß das Potential keine Diskontinuität besitzt, wenn man durch die geladene Fläche, d. h. in unserem Fall durch die magnetisierte Fläche, hindurchgeht.)

Andererseits ist

$$\operatorname{div}\mathfrak{H} = 4\pi\varrho$$

und

$$\varrho = -\operatorname{div}\mathfrak{J},$$

also

$$\operatorname{div}\mathfrak{H} + 4\pi\operatorname{div}\mathfrak{J} = 0.$$

Wenn wir den Vektor $\mathfrak{B} = \mathfrak{H} + 4\pi\mathfrak{J}$, den sogenannten *magnetischen Induktionsvektor*, betrachten, so erhalten wir

$$\operatorname{div}\mathfrak{B} = 0.$$

Wir wollen nun versuchen, diesen Induktionsvektor experimentell zu deuten.

Dazu betrachten wir einen länglichen zylindrischen Hohlraum, der parallel zum Magnetisierungsvektor verläuft (Abb. 124).

Das Feld in einem Punkt P im Innern dieses Hohlraumes ist die Summe des Feldes H und des durch die Verteilung des Magnetismus auf den Wänden des

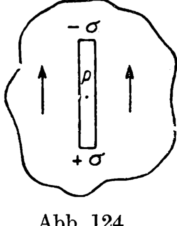


Abb. 124

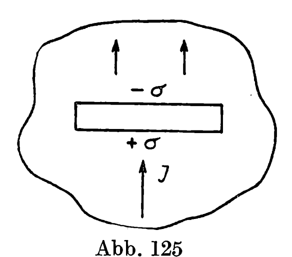


Abb. 125

Hohlraumes aufgebauten Feldes. Tatsächlich sind aus Symmetriegründen die Elementardipole im Magneten so angeordnet, daß das Feld im Mittel Null ist. Verringert man nach und nach die Länge des Hohlraumes, so sieht man, daß das in P gemessene Feld den Wert H hat, vorausgesetzt, man kann die Meßinstrumente dort anbringen, da das durch die kleinen magnetischen Massen $\sigma\, dF$ hervorgerufene Feld klein ist und wegen der Länge des Hohlraumes vernachlässigt werden kann.

Nehmen wir jetzt an, der Hohlraum sei so breit, daß er als senkrecht zum Vektor $\mathfrak{J}$ angesehen werden kann. Das Feld, das man nun in P mißt (Abb. 125), hat den Wert

$$H + 4\pi\sigma.$$

Jede der Flächen ruft ein Feld $2\pi\sigma$ hervor (entsprechendes Theorem in der Elektrostatik). Nun ist

$$\sigma = I_n = \mathfrak{J}.$$

Also ist das in P vorhandene Feld gegeben durch

$$\mathfrak{H} + 4\pi\mathfrak{J} = \mathfrak{B}.$$

$\mathfrak{B}$ ist dabei der Induktionsvektor, der von gleicher Art wie ein Feld zu sein *scheint*. In elektromagnetischen Einheiten jedoch drückt man diesen Vektor in Gauß aus; eine Einheit, die den gleichen Wert wie das Oersted hat (siehe im Kapitel „Einheiten"). Wir werden noch näher darauf eingehen.

Eigenschaften des Induktionsvektors

Der Fluß des Induktionsvektors durch eine beliebige geschlossene Fläche ist Null. Dieser Satz wird durch die vektorielle Beziehung

$$\iint_F \mathfrak{B}\, d\mathfrak{F} = 0$$

oder durch den skalaren Ausdruck

$$\iint_F B_n\, dF = 0$$

dargestellt. B_n ist dabei die Projektion des Induktionsvektors auf die Normale zur Oberfläche. Diese wird positiv nach außen gerechnet.

1. Wir wollen annehmen, daß es keine Magnete im Innern der geschlossenen Fläche (F) gibt. Nach dem GREENschen Satz gilt dann

$$\Phi = \iint_F \mathfrak{B}\, d\mathfrak{F} = \iiint_V \operatorname{div} \mathfrak{B}\, dv,$$

dabei ist v das durch die Fläche (F) begrenzte Volumen, und wegen des Fehlens magnetisierter Materie ist $B \equiv H$ und $\operatorname{div} H = 4\pi\varrho = 0$. Es ist also

$$\Phi = 0.$$

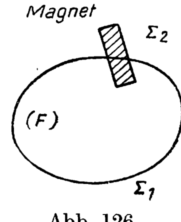


Abb. 126

2. Wenn im Innern der geschlossenen Fläche (F) Magnete existieren, so ist in jedem Punkt der magnetischen Materie nach Definition $\operatorname{div} \mathfrak{B} = 0$, genau wie im Innern der Magnete, und die vorstehende Darstellung bleibt gültig.

3. Wenn die Fläche (F) einen Magneten schneidet, können wir nicht mehr den GREENschen Satz direkt anwenden, da die geschlossene Fläche jetzt einen Teil des Magneten umfaßt. Dieser Teil des Magneten ist für den Induktionsvektor eine diskontinuierliche Fläche (Abb. 126).

Wir zerlegen nun zweckmäßig den Fluß in zwei Teile: in den Fluß durch den Teil Σ_1 der Fläche (F), der den Magneten nicht enthält, und in den Fluß durch Σ_2, d.h. durch diesen Magneten:

$$\Phi = \iint_{\Sigma_1} H_n\, dF + \iint_{\Sigma_2} B_n\, dF.$$

Es gilt nun

$$\mathfrak{B} = \mathfrak{H} + 4\pi\mathfrak{J}.$$

Folglich ist

$$\Phi = \iint_{\Sigma_1} H_n\, dF + \iint_{\Sigma_2} H_n\, dF + 4\pi \iint_{\Sigma_2} I_n\, dF = \iint_F H_n\, dF + 4\pi \iint_{\Sigma_2} I_n\, dF.$$

Nun ist $\mathfrak{H}$ das durch die Ladungsverteilungen $\varrho = -\operatorname{div}\mathfrak{J}$ und $\sigma = I_n$ im Magneten hervorgerufene Feld. (F_0) ist die innerhalb von (F) liegende Fläche des Magneten und (V_0) das Volumen des Magneten zwischen (F_0) und (F).

Nach dem GAUSSschen Satz ist

$$\iint_F H_n dF = -4\pi \iiint_{V_0} \operatorname{div} I\, dv + 4\pi \iint_{F_0} I_n dF$$

und

$$\Phi = -4\pi \iiint_{V_0} \operatorname{div} I\, dv + 4\pi \iint_{F_0 + \Sigma_2} I_n dF.$$

Nach dem GREENschen Satz ($\mathfrak{J}$ ist in der Fläche $F_0 + \Sigma_2$ gleichförmig) gilt:

$$\iint_{F_0 + \Sigma_2} I_n dF = \iiint_{V_0} \operatorname{div} I\, dv.$$

Daraus folgt

$$\Phi = 0.$$

Grenzbedingungen für eine magnetisierte Fläche. 1. *Die Tangentialkomponente eines magnetischen Feldes besitzt keine Diskontinuität.* Wir betrachten zwei Punkte A und B in einem Medium, die dicht beieinander liegen und in der Nähe der Grenzfläche angeordnet sind. A' und B' seien ihnen entsprechende Punkte, die im angrenzenden anderen Medium ebenfalls in der Nähe der Grenzfläche liegen (Abb. 127).

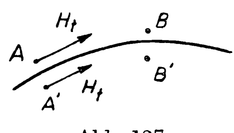


Abb. 127

Wenn H_t die Tangentialkomponente im ersten Medium ist, dann folgt für die Potentialdifferenz zwischen A und B

$$V_A - V_B = H_t \cdot \overline{AB}$$

und entsprechend

$$V_{A'} - V_{B'} = H_t' \cdot \overline{A'B'}.$$

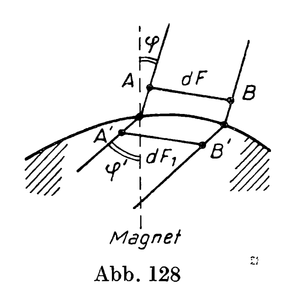


Abb. 128

Nun wissen wir, daß das Potential keine Diskontinuität beim Durchgang durch die Genzfläche zeigt. Also sind die Ausdrücke

$$V_A - V_B \quad \text{und} \quad V_{A'} - V_{B'}$$

bis auf unendlich kleine Größen gleich. Andererseits sind $\overline{AB}$ und $\overline{A'B'}$ auch bis auf diese Größen gleich und daraus folgt

$$H_t = H_t'.$$

2. *Die Normalkomponente der Induktion verändert sich beim Durchgang durch die Grenzfläche zwischen einem magnetisierten und einem nichtmagnetisierten Medium nicht.* Wir wählen eine geschlossene Fläche, die von einer „Induktionsröhre" gebildet und von zwei zur Grenzfläche parallelen Flächen dF und dF_1 begrenzt wird (Abb. 128). Der Fluß durch diese Fläche ist Null:

$$-dF \cdot B_{n(\text{Luft})} + dF \cdot B_{n(\text{Magnet})} = 0$$

und

$$B_{n(\text{Luft})} = B_{n(\text{Magnet})}.$$

Allgemein lautet diese Beziehung

$$B_{n(1)} = B_{n(2)}.$$

Wird das erste Medium durch Luft gebildet, so gilt

$$B_{n(\text{Luft})} = H_n.$$

Für den Magneten ergibt sich

$$B = \mu H$$

nach der Definition der Permeabilität μ (Kapitel XII).

Folglich ist

$$H_n = \mu H_n'.$$

Wenn man nun

$$\frac{H_t}{H_n} = \operatorname{tg}\varphi \quad \text{und} \quad \frac{H_t'}{H_n'} = \operatorname{tg}\varphi'$$

setzt, wobei φ und φ' die Winkel zwischen Induktionslinie und Flächennormale sind, erhält man

$$\operatorname{tg}\varphi' = \mu \operatorname{tg}\varphi.$$

Dieser Effekt wird *Brechung der Kraftlinien* genannt. Man kann die Kraftlinien durch die Induktionslinien im Innern des Magneten fortsetzen (Abb. 129).

Der Fluß des Induktionsvektors bleibt unverändert (der Fluß durch eine geschlossene Fläche ist Null). Das Produkt eines Querschnitts der Induktionsröhre mit dem Induktionswert ist in der gesamten Röhre konstant. Man kann also den Wert der Induktion berechnen, wenn man den Verlauf der Induktionslinien qualitativ kennt.

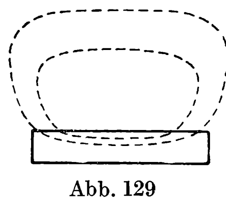


Abb. 129

Die gleichen Eigenschaften $H_t = H_t'$ und $B_n = B_n'$ sind für das *elektrostatische* Feld und die *elektrostatische* Induktion gültig. Die Erklärungen sind die gleichen, wie wir sie eben gegeben haben.

Diese Grenzbedingungen sind sehr wichtig. Sie gelten auch für veränderliche elektromagnetische Felder und geben eine Erklärung für alle Verteilungs- oder Ausbreitungsprobleme in verschiedenen Medien.

Wichtige Bemerkung: Die in diesem Kapitel angegebenen Beziehungen für $\mathfrak{B}$ und $\mathfrak{H}$ gelten nur dann, wenn wir die magnetische Permeabilität des Vakuums μ_0 gleich 1 setzen, d.h., wenn wir sie als physikalisch dimensionslos ansehen. Dies ist die *klassische Art der Darstellung.* Es gibt jedoch immer Gründe, um von dieser Betrachtungsweise abzugehen (siehe das Kapitel „Einheiten" am Ende des Bandes) und Einheitssysteme einzuführen, in denen μ_0 von 1 verschieden ist. Magnetisches Feld und Induktion haben dann nicht mehr die gleichen physikalischen Dimensionen. Dann ist es zweckmäßig, sich wieder dieses III. Kapitels zu erinnern und sich zu vergegenwärtigen, daß alle *mechanischen Kräfte,* die von magnetischen Wirkungen herrühren, durch die *Induktion* gegeben sind. $\mathfrak{B}$ in diesem Kapitel stellt die Induktion in magnetisierter Materie dar, und $\mathfrak{H}$ (wenn man z.B. in

Luft $B_n = H_n$ setzt) scheint ohne Interesse zu sein. Man kann es als Induktion im Vakuum ansehen. Um das zu begründen, wird immer ein bestimmter Vektor $\mathfrak{H}$, der von einem Potential abhängt, eingeführt. $\mathfrak{B}$ hängt dagegen von diesem Potential nicht ab. Das ist im Moment der einzige Grund, der uns an dem bequemen Begriff des magnetischen Feldes festhalten läßt, wodurch die Induktion im Vakuum die Form $B = \mu_0 H$ und in einem Medium mit der relativen Permeabilität μ die Form $B = \mu\mu_0 H$ annimmt. Weiter unten werden wir es praktischer finden, das Vermögen des elektrischen Stromes, eine Induktion in der ihn umgebenden Materie hervorzurufen, in Oersted zu messen. Ein Oersted wird definiert zu $\frac{4\pi}{10}$ Amperewindungen pro Längeneinheit der Spule. Es erweist sich als zweckmäßig, im Giorgischen MKS-System das magnetische Feld durch die *Amperewindungszahl pro Meter* zu ersetzen.

Wir dürfen jedoch nicht vergessen, daß *immer die magnetische Induktion und nicht das Feld die mechanischen Wirkungen hervorruft.*

Diese Betrachtungen gelten auch für die folgenden Kapitel.

IV. KAPITEL

Induzierte Magnete. Magnetische Medien

Paramagnetismus. Diamagnetismus

Wir wollen uns jetzt mit den bereits kurz gestreiften Phänomenen der induzierten Magnetisierung beschäftigen: Ein magnetisierbarer Körper nimmt in einem magnetischen Feld sämtliche Eigenschaften eines Magneten an; er verliert sie jedoch wieder außerhalb des Feldes.

Wir werden diese Phänomene genauer untersuchen, das Eisen und einige andere Materialien, die ein besonderes Verhalten zeigen (ferromagnetische Stoffe), jedoch ausschließen.

Im allgemeinen hat die Magnetisierung eines Körpers in einem Magnetfeld die gleiche Richtung wie das Feld selbst:

$$\mathfrak{J} = \chi \mathfrak{H};$$

χ ist dabei die *magnetische Suszeptibilität* des Körpers und liegt zwischen 10^{-4} und 10^{-7}, wenn $\mathfrak{J}$ und $\mathfrak{H}$ in den gleichen Einheiten gemessen werden, wie wir es in diesem ganzen Kapitel durchführen wollen. χ ist also das Verhältnis des Momentes pro Volumeneinheit zum Magnetfeld.

Wir erhalten dann

$$\mathfrak{B} = \mathfrak{H} \cdot (1 + 4\,\pi\chi) = \mu \mathfrak{H};$$

μ ist die *magnetische Permeabilität* und hat den Wert $1 + 4\,\pi\chi$.

Das von den magnetischen Massen herrührende Feld ist, wie man leicht sieht, vernachlässigbar.

1. Wenn χ negativ ist, dann ist der Magnetisierungsvektor gegen das Feld gerichtet, und wir sprechen von einem *diamagnetischen Körper*. Einige Beispiele dafür sind

$$\text{Wismut: } \chi = -12 \cdot 10^{-6},$$
$$H_2O\text{: } \chi = -0{,}72 \cdot 10^{-6},$$
$$C_2H_5OH\text{: } \chi = -0{,}6 \cdot 10^{-6}.$$

Zu den diamagnetischen Körpern gehören fast alle organischen Substanzen.

2. Wenn χ positiv ist, nennt man die Körper *paramagnetisch*. Dazu gehören

$$\text{Sauerstoff unter Normalbedingungen: } \chi = 0{,}16 \cdot 10^{-6},$$
$$\text{Luft: } \chi = \frac{0{,}16}{5}\, 10^{-6} = 0{,}32 \cdot 10^{-7}$$

(Stickstoff ist diamagnetisch und hat ein verschwindend geringes χ),

$$\text{Eisen(II)-chlorid: } \chi = 2{,}6 \cdot 10^{-4}$$

und einige Metalle.

Bemerkung: Die Beziehung $\mathfrak{J} = \chi \mathfrak{H}$ ist nur dann gültig, wenn es sich um eine *isotrope Substanz* handelt.

In einem Kristall z. B. hängt die Magnetisierung von der Orientierung ab, und $\mathfrak{J}$ ist im allgemeinen nicht parallel zu $\mathfrak{H}$. Wir haben jedoch immer eine Proportionalität zwischen beiden.

Magnetische Wirkungen auf eine isotrope para- oder diamagnetische Substanz

Das magnetische Moment

$$\mathfrak{M} = \iiint \mathfrak{J} dv = \chi \mathfrak{H} v$$

ist parallel zum Feld ausgerichtet. Der Körper ist also keinem Drehmoment durch das Feld unterworfen.

Die auf ihn ausgeübten Wirkungen beschränken sich daher auf eine Kraft mit den Komponenten

$$X = \mathfrak{M} \frac{\partial \mathfrak{H}}{\partial x}; \quad Y = \mathfrak{M} \frac{\partial \mathfrak{H}}{\partial y}; \quad Z = \mathfrak{M} \frac{\partial \mathfrak{H}}{\partial z}.$$

Nun ist

$$\mathfrak{M} = \chi \cdot \mathfrak{H} \cdot v;$$
$$X = \chi \cdot \mathfrak{H} \cdot v \cdot \frac{\partial \mathfrak{H}}{\partial x} = \frac{1}{2} \chi v \frac{\partial \mathfrak{H}^2}{\partial x};$$

also gilt

$$X = \frac{1}{2} \chi v \frac{\partial H^2}{\partial x},$$
$$Y = \frac{1}{2} \chi v \frac{\partial H^2}{\partial y},$$
$$Z = \frac{1}{2} \chi v \frac{\partial H^2}{\partial z}.$$

Bringen wir nun den Körper in ein Feld, z.B. zwischen die konischen Pole eines Elektromagneten, so werden wir feststellen, daß er sich, wenn er paramagnetisch ist, gegen den Punkt maximaler Feldstärke hin verschiebt. Ist der Körper dagegen diamagnetisch, so entfernt er sich von diesem Punkt.

Führt man z.B. einen Wismutstab zwischen die konischen Magnetpole, so stellt er sich so ein, daß im Bereich der größten Feldstärke möglichst wenig Wismut vorhanden ist. Dieses Experiment wird häufig in Vorlesungen durchgeführt (Abb. 130).

N S Bi

Abb. 130

Energie eines magnetischen Körpers in einem Magnetfeld

Die Kraft, die auf das Volumen v des Körpers wirkt, beträgt

$$X = \chi v H \frac{\partial H}{\partial x}.$$

Die Arbeit, die für eine Verschiebung um dx erforderlich ist, ergibt sich zu

$$dA = \chi v H \frac{\partial H}{\partial x} \cdot dx = \frac{1}{2} \chi v \frac{\partial H^2}{\partial x} dx.$$

Die potentielle Energie des Volumens v hat dann die Form

$$W = \frac{1}{2} \chi v \int_x^\infty \frac{\partial H^2}{\partial x} dx = -\chi v \frac{H^2}{2}.$$

Experiment

Bringt man in den Spalt eines Elektromagneten eine Röhre mit einer Eisen(II)-chloridlösung, so stellt man fest, daß der Flüssigkeitsspiegel gegen den Bereich großer Feldstärke hin ansteigt, d.h., die potentielle Energie nimmt ein Minimum an, um die Gleichgewichtsbedingung zu erfüllen.

Es seien dz der Anstieg der Flüssigkeit und F der Querschnitt der Röhre. Dann entspricht der Anstieg einem Druck P auf die Flüssigkeit, der dem elektrostatischen Druck analog ist. Aus dem Ausdruck für die Energie können wir diesen Druck berechnen:

$$W = -F dz \cdot \chi \frac{H^2}{2}.$$

Diese Energie ist der Arbeit $P \cdot F \cdot dz$ des Druckes gleich. Also entspricht der Absolutwert des Druckes gerade der Energie pro Volumeneinheit:

$$P = \chi \frac{H^2}{2}.$$

Suszeptibilitätsmessung

Wir bringen den zu untersuchenden Körper in ein Magnetfeld mit bekanntem Gradienten und messen die auf ihn während des Experimentes wirkenden Kräfte.

Diese Messung wird im allgemeinen mit einer Torsionswaage durchgeführt. Das Feld wird durch einen Elektromagneten mit sehr unsymmetrischen Polschuhen aufgebaut.

Wenn wir die Suszeptibilität der Luft mit χ_0 bezeichnen, so erhalten wir für die Kraft den Ausdruck

$$X = \frac{1}{2} (\chi - \chi_0) \left(\frac{\partial H}{\partial x}\right)^2 .$$

Verschiebt man den Körper, so entspricht dies einer gleichzeitigen inversen Verschiebung des von ihm verdrängten Luftvolumens; folglich muß die Kraft die Form $-\frac{1}{2}\chi_0\left(\frac{\partial H}{\partial x}\right)^2$ haben.

Magnetisierungskoeffizient

Die Suszeptibilität χ wird auf die Volumeneinheit eines Körpers bezogen. Es kann mitunter zweckmäßig sein, die Magnetisierungsstärke auf die Masseneinheit zu beziehen. Wenn man mit ϱ das spezifische Gewicht des Körpers bezeichnet, so erhält man

$$\lambda = \frac{\chi}{\varrho};$$

λ heißt dabei *Magnetisierungskoeffizient.*

Curiesches Gesetz: *Für diamagnetische Substanzen ist der Magnetisierungskoeffizient λ eine konstante Zahl, die von der Temperatur unabhängig ist und im allgemeinen nur wenig vom physikalischen Zustand abhängt.*

Für paramagnetische Substanzen ist das Produkt des Magnetisierungskoeffizienten mit der absoluten Temperatur konstant:

$$\lambda \cdot T = \text{const.}$$

Es gibt jedoch eine Reihe paramagnetischer Substanzen, bei denen dieses Gesetz eine kompliziertere Form hat.

Ferromagnetismus

Die ferromagnetischen Stoffe sind im Prinzip paramagnetische Stoffe mit großer Suszeptibilität. Daraus folgen neue Konsequenzen:

Entmagnetisierungsfeld

Betrachten wir einen zylindrischen Stab mit der Länge l und dem Querschnitt F, der parallel zum Feld liegt (Abb. 131). Auf seinen Endflächen treten magnetische Massen mit der Dichte $\sigma = I_n$ auf.

Jeder Pol besitzt eine Stärke FI_n. Im Zentrum des genügend langen Magneten hat das von diesen Massen herrührende Feld den Wert

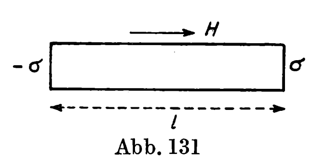


Abb. 131

$$H' = \frac{2FI_n}{\left(\frac{l}{2}\right)^2} = 8\,\frac{FI_n}{l^2}$$

und ist H entgegengerichtet.

I kann nun einen Wert von $100 \cdot H$ bis $1000 \cdot H$ besitzen.

Nehmen wir an $I = 100\,H$, dann ist

$$H' = \frac{800\,FH}{l^2}.$$

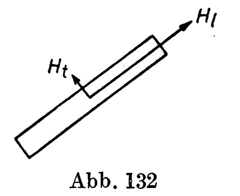


Abb. 132

Dieses Feld ist nur dann schwach, wenn der Stab *lang* und *dünn* ist.

Wenn wir einen solchen Stab in ein magnetisches Feld bringen, dann verhindert das in der Längsrichtung sehr starke Entmagnetisierungsfeld eine Polbildung an den Seitenflächen. Dies erklärt auch die Bildung der magnetischen Spektren, da sich die dazu verwendeten Eisenfeilspäne in der Längsrichtung orientieren (Abb. 132).

Für einen im Verhältnis zu seinem Durchmesser sehr langen Magnetstab ist das Entmagnetisierungsfeld Null. Tatsächlich schneidet der Vektor $\mathfrak{J}$ keine freie Fläche, und es treten keine Dichten $\pm\,\sigma$ auf.

Erstmagnetisierungskurve

Die Magnetisierung ferromagnetischer Substanzen ist dem angelegten Feld nicht proportional.

Dies stellen wir sofort fest, wenn wir die Induktion B nach den weiter unten beschriebenen Verfahren als Funktion des Feldes H messen und in einem Diagramm das Feld H als Abszisse und die Größe $\dfrac{B - H}{4\,\pi} = I$ als Ordinate auftragen. H ist dabei das in dem Metall auftretende Feld. Es stimmt mit dem äußeren Feld überein, wenn kein Entmagnetisierungsfeld vorhanden ist. Anders gesagt, die Messungen beruhen auf der Magnetisierung eines Stabes. In jedem anderen Fall ist eine Korrektur durch Berechnung des entmagnetisierenden Feldes notwendig.

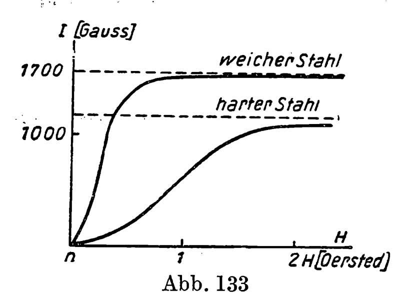


Abb. 133

Wenn man nun einen *niemals vorher magnetisierten Probestab* verwendet, so erhält man Kurvenformen, wie sie in Abb. 133 für einen bestimmten gehärteten Stahl und für einen bestimmten weichen Stahl gezeigt sind. Die Neigung der Tangente in jedem Punkt der Kurve gibt uns die differentielle Suszeptibilität $\chi = \dfrac{\partial I}{\partial H}$ an. Man sieht, daß sie nicht proportional mit der Feldstärke anwächst.

Die in der Abbildung dargestellten Kurven geben eine Vorstellung von der Größenordnung der Effekte. Die Phänomene hängen jedoch so von der Probe ab, d.h. von seiner Zusammensetzung und seiner Vorbehandlung, daß es uns notwendig erscheint, sie ausführlicher zu betrachten.

Hysteresis

Wenn wir, nachdem der Stab magnetisiert worden ist, das Feld verringern, nimmt auch die Magnetisierung ab. Die Abnahme erfolgt jedoch weniger stark als der bei der Erstmagnetisierung erfolgte Anstieg. Diesen Effekt nennt man *Hysteresis*. Seine Untersuchung ist sehr kompliziert. Wir werden uns vorläufig darauf beschränken, das Feld zwischen zwei bestimmten Grenzwerten $-H_1$ und $+H_1$ zu verändern.

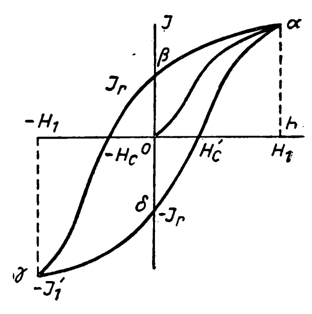


Abb. 134

Die graphische Darstellung (Abb. 134) zeigt uns, daß der Stab eine remanente Magnetisierung I_r besitzt, wenn das Feld Null ist. Hat das Magnetisierungsmaximum des Zyklus den Sättigungswert erreicht, bleibt diese Remanenz sehr groß und liegt in der Größenordnung des Maximums.

Wir kehren nun die Richtung des Feldes um. Um die Remanenz zum Verschwinden zu bringen, müssen wir ein Feld $-H_c$ anlegen, das wir *Koerzitivfeld* nennen. Den jeweiligen Materialien und ihrer Vorbehandlung entsprechend, ist die Größe der Koerzitivkraft sehr unterschiedlich.

Wenn man den absoluten Wert des Feldes vergrößert, ändern sich Sinn und Größe der Magnetisierung. Für ein $-H_1$ äquivalentes Feld wird die Magnetisierung $-I_1'$ sein, wobei I_1' von der gleichen Größenordnung wie I_1 ist.

Verringert man dagegen die Feldstärke, so wird auch der Absolutwert der Magnetisierungsstärke kleiner und nimmt einen Wert $-I_2'$ an (von der gleichen Größenordnung wie I_2), wenn das Feld Null ist.

Verändern wir die Richtung der Magnetisierung und vergrößern diese, so stellen wir fest, daß beim Wert H_c (Koerzitivfeld) die Magnetisierungsstärke Null wird und dann ihr Vorzeichen verändert und bis I_1 anwächst. Wir haben hiermit einen Zyklus beschrieben, der sich nach oftmaliger Wiederholung kaum noch verändert. Dies ist die *Hysteresis-Schleife*. Sie hängt von dem größten angelegten Feld ab. Bei größeren Induktionswerten nimmt die Hysteresis ab.

Fassen wir noch einmal zusammen: Bei abnehmender Feldstärke bewegen wir uns im *I-H*-Diagramm auf dem Kurvenast α, β, γ. Bei wachsender Feldstärke beschreiben wir den unteren Ast der Schleife γ, δ, α. Einer folgenden Ummagnetisierung setzt das Metall einen Widerstand entgegen, der nur bei einer genügend großen Feldstärke überwunden werden kann. Natürlich nimmt die Bedeutung der Hysteresis bei einer Annäherung an den Sättigungszustand ab, da das Metall andererseits nur nahezu gesättigt sein kann.

Experiment. Man kann diese Hysteresisschleife leicht durch folgendes Experiment aufnehmen.

Von einem Lichtbogen geht ein sehr feiner Lichtstrahl aus und trifft auf einen Galvanometerspiegel S_1, der um die Vertikalachse drehbar ist. Nach Reflexion an diesem Spiegel fällt der Strahl auf einen zweiten horizontalen Spiegel S_2 und wird von diesem auf einen Leuchtschirm geworfen. Die Rotation der Spiegel S_1 und S_2 rufen Auslenkungen in Abszissen- bzw. Ordinatenrichtung hervor.

Der zu magnetisierende Stab wird mit einer Spule umgeben, wie es in Abb. 135 dargestellt ist. Durch ein Potentiometer R kann Richtung und Größe des magnetisierenden Feldes verändert werden. Der im Galvanometer G fließende Strom ist dann durch den Spulenstrom gegeben; die Horizontalverschiebungen des Lichtpunktes sind also dem Feld proportional.

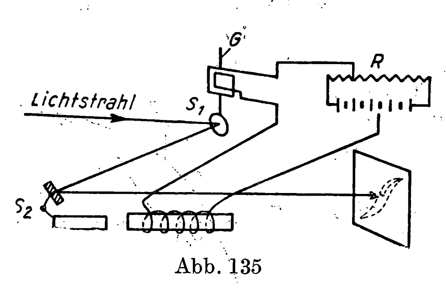


Abb. 135

Der Spiegel S_2 wird durch einen an einem kleinen Magneten befestigten Hebel gesteuert. Die auf den Stab ausgeübte Wirkung ist der Magnetisierungsstärke I proportional; ebenso die vertikalen Verschiebungen des Lichtpunktes.

Verändert man die Potentiometerstellung R, so zeichnet der Lichtstrahl auf dem Schirm die Hysteresisschleife.

Die Hysteresisschleife kann sehr verschiedene Formen, entsprechend den jeweiligen Substanzen, besitzen.

Bei gehärtetem Stahl hat das Koerzitivfeld eine Größe von etwa 50 Oersted, und die Schleife ist sehr ausgeprägt.

Bei weichem Stahl dagegen kann das Koerzitivfeld bis zu 0,35 Oersted zurückgehen, und die Schleife wird sehr schmal.

Elektrolyteisen und Permalloy haben eine noch schmalere Hysteresisschleife. Die Remanenz bleibt in der Größenordnung des angelegten Feldes, während das Koerzitivfeld auf $\pm 0{,}035$ Oersted zurückgeht.

Die Hysteresisschleife ist nicht konstant. Das Koerzitivfeld verändert sich mit der Zeit (Alterung). Beschreibt man eine Hysteresisschleife, so braucht das Koerzitivfeld eine bestimmte Zeit, um sich auszubilden. Dieses Phänomen nennt man *magnetische Viskosität*. Bei einem *schnellen* Kreislauf hat das Koerzitivfeld z.B. eine Größe von 0,5 Oersted, bei einem langsamen Durchlaufen bei derselben Eisenprobe dagegen 3 Oersted. Dieses Phänomen hat jedoch keine sehr große praktische Bedeutung, da die Mehrzahl der Metalle, die dem Eisen zur Verbesserung seiner magnetischen Eigenschaften hinzugefügt werden – so z.B. das *Silizium* –, diese magnetische Viskosität praktisch zum Verschwinden bringen.

Bemerkung: In der Technik ist es üblich, die Hysteresisschleife in einem Diagramm darzustellen, in dem als Ordinate an Stelle von I der Ausdruck $B = H + 4\pi I$ aufgetragen ist. Wenn B sehr viel größer als H ist, ist dies ohne weiteres zulässig (siehe weiter unten die Formel von STEINMETZ).

Bei der Hysteresis freiwerdende Wärme

Die Hysteresis ist von einer Wärmeentwicklung begleitet (Erwärmung von Dynamo- und Transformatorblechen, usw.).

Man kann rechnerisch leicht zeigen, daß bei einem Hysteresiszyklus ein Energieverlust auftritt, der durch die Fläche der Schleife gegeben wird. Das Experiment zeigt, daß diese Energie in Form freiwerdender Wärme auftritt.

Nehmen wir nun an, daß wir *die Magnetisierung durch Verschiebung des Stabes in einem konstanten Feld hervorrufen*. Dazu benötigen wir eine mechanische Arbeit $\int F\,dx$; F ist dabei die Kraft, die auf den Stab in Ox-Richtung wirkt, und hat die Form

$$F = -M\frac{\partial H}{\partial x}.$$

Die von dem Stab aufgenommene Energie beträgt

$$W = \int M\frac{\partial H}{\partial x}\,dx.$$

Nun ist $M = Iv$, wobei v das Volumen des Stabes ist. Wir erhalten also

$$W = v\int I\frac{\partial H}{\partial x}\,dx = v\int I\,dH;$$

H ist dabei die einzige Veränderliche.

Konstruieren wir die Kurve der Abb. 134:

$$I = f(H).$$

Dies ist gerade die Hysteresisschleife (C):

$$\int_C I\,dH = F \qquad (F = \text{Fläche der Schleife}).$$

Folglich ist

$$W = v\cdot F.$$

Das Experiment zeigt uns, daß diese Energie *vollständig* wieder *in Form von Wärme* auftritt. Zur Berechnung dieser Wärme benutzen wir eine von STEINMETZ angegebene empirische Formel, die sich auf B und nicht auf I bezieht und voraussetzt, daß $B = H + 4\pi\cdot I$ praktisch proportional I ist. H kann man dann vernachlässigen. Diese Betrachtungsweise hat den Vorzug, daß wir das direkt gemessene B benutzen können. (Siehe „Fluxmeter" in einem späteren Abschnitt.)

$W = \eta B^{1,6}$ ist die freiwerdende Wärme pro Volumeneinheit, wobei B der Maximalwert der Induktion auf der beschriebenen Schleife ist. η ist dabei ein spezifischer materialabhängiger Faktor.

Die allgemeinere STEINMETZformel lautet

$$W = \eta(B_1 - B_2)^{1,6}.$$

B_1 und B_2 sind dabei die aus der Schleife ersichtlichen Maximal- bzw. Minimalwerte. Diese Formel kann z.B. bei den in Abb. 134 abgebildeten Kurven angewendet werden:

gehärteter Stahl $\eta = 0{,}0337$,

extra weicher Stahl $\eta = 0{,}00054$.

Wir lassen durch die Spule einen Wechselstrom von 50 Hz fließen. Der Energieverlust beträgt

$$L = 50\,\eta B^{1,6}\,\mathrm{erg/sec}\cdot\mathrm{cm}^3 = 5\cdot 10^{-6}\,\eta B^{1,6}\,\mathrm{W/cm}^3.$$

Betrachten wir 1 cm³ weichen Stahl:

$$\eta = 0{,}0015;\quad B = 15000\ \text{Gauß};$$

$$L = 3{,}6\cdot 10^{-2}\,\mathrm{W/cm}^3.$$

Permanentmagnete

Wir haben gesehen, daß ein magnetischer Stab eine Remanenz I_r behält. Er habe ein magnetisches Moment

$$M = v I_r.$$

Um einen guten Permanentmagneten zu erhalten, muß I_r von vornherein groß sein, was sich leicht realisieren läßt.

Benutzt man diesen Magneten zur Magnetisierung anderer Stäbe, so befindet er sich in einem neuen Entmagnetisierungsfeld, das anders als sein eigenes ist. Damit keine Entmagnetisierung auftritt, ist ein starkes Koerzitivfeld erforderlich. Diese Forderung ist bereits schwerer zu befriedigen.

Vor 1925 benutzte man meist Wolframstähle, bei denen H_c in der Größenordnung von 70 Oersted liegt. Man war gezwungen, sehr lange Magnete zu verwenden, damit das Entmagnetisierungsfeld nicht von der gleichen Größenordnung war.

Die Verwendung von Kobaltstählen ab 1925 ergab bereits Koerzitivfelder von 200 Oersted, wenn der Kobaltzusatz 36% betrug.

Seit 1932 wurden dann *Nickel-Aluminium-Stähle* verwendet mit 30% Ni und 10–20% Al. Die Entwicklung dieser Stähle ging von dem Japaner Nishima (1934) aus und ergab Koerzitivfelder zwischen 500 und 1200 Oersted. Diese Stähle gestatteten, sehr kurze und wirksame Magnete herzustellen, die in der Lage waren, auch wesentlich stärkere Entmagnetisierungsfelder zu ertragen.

Eine Stahlsorte mit 7,5% Platin ergibt sogar ein Koerzitivfeld von 1800 Oersted. Diese Legierung wird zur Konstruktion kleiner sehr stabiler Nadeln für Galvanometer und Kompasse verwendet.

Als Besonderheit wollen wir bemerken, daß eine Legierung aus 86,5% Ag, 8,8% Mn und 4,7% Al magnetisch ist und ein Koerzitivfeld von etwa 1000 Oersted besitzt, obgleich sie keine magnetischen Bestandteile enthält.

Seit einigen Jahren werden aus Metallpulver gepreßte Magnete (Sintermagnete) hergestellt, deren Koerzitivfeld in der Größenordnung von 1000 Oersted liegt.

Diese Magnete, bei denen die Eisenteilchen in der Größe von einigen Mikron voneinander durch ein Bindemittel isoliert sind (als Bindemittel wird z. B. Bakelit verwendet), haben den Vorteil, daß bei Wechsel- und veränderlichen Strömen keine Verluste durch Foucaultsche Ströme auftreten.

Diese Sintermagnete werden z. B. aus Eisen-Nickel-Aluminium-Legierungen hergestellt. Ihr Koerzitivfeld liegt in der Größenordnung desjenigen sehr großer Metallmagnete. Man verwendet auch, wie zuerst von L. Néel in Grenoble angewandt,

sehr reine Eisenkörnchen zur Herstellung von Sintermagneten. Diese Körner haben eine längliche Form, damit eine gewisse Anisotropie vorhanden ist. Ihre Dimensionen werden am günstigsten so gewählt, daß sie in der Größenordnung der „WEISSschen Bereiche" liegen (siehe weiter unten „Theorie des Magnetismus"). Die Eisenpreßmagnete besitzen noch nach der Magnetisierung ein beträchtliches Koerzitivfeld. Die günstigste Größe der Körner liegt bei 100 Å $= \frac{1}{100}$ Mikron.

Näherungsformel zur Berechnung eines Permanentmagneten

Wir wollen ein Feld h in dem Spalt eines Magneten mit der Breite l und dem Querschnitt F herstellen (Abb. 136).

Es sei H das Feld im Innern des Magneten, das wir als konstant annehmen wollen. Seine Zirkulation längs einer geschlossenen Linie ist Null, *da das Feld von einem Potential abgeleitet wird:*

$$\int H\,dl = 0$$

und

$$HL + hl = 0.$$

Dabei ist L die Länge der Kraftlinie im Eisen.

Abb. 136

Wir stellen zuerst einmal fest, daß H und h einander entgegengesetzt gerichtet sind. Wir sehen dies sofort, wenn wir annehmen, daß beide Felder H und h von magnetischen Massen herrühren, die auf einander gegenüberstehenden Polen verteilt sind.

Nun ist aber der Induktionsfluß konstant:

$$BF = hf,$$

folglich ist

$$\frac{F}{f} = \frac{h}{B}.$$

Abb. 137

Bei Stählen mit Nickel- und Aluminiumzusätzen ist die Induktion nur halb so groß wie bei Wolframstählen. Diese Magnete werden also größer sein (h und f sind gegeben, d.h. eine geringere Induktion führt zu einem größeren Querschnitt).

Wenn man die Magnetisierungskurve mit Hysteresis betrachtet, ist es klar, daß man sich wegen der Existenz eines Entmagnetisierungsfeldes in einem Arbeitspunkt befindet, in dem H negativ ist (Abb. 137).

Nun ist aber das Magnetvolumen bestimmt durch

$$H \cdot B \cdot F = -\frac{h^2 f l}{L},$$

wobei $f \cdot l = v$ das Spaltvolumen ist. Bezeichnen wir nun mit $F \cdot L = V$ das Metallvolumen, so erhalten wir

$$\frac{V}{v} = -\frac{h^2}{HB}.$$

Der Querschnitt F ist von vornherein festgelegt. $B \cdot H$ dagegen hängt vom Bereich der Hysteresisschleife ab, in dem man sich gerade befindet. Wenn H_c sehr groß ist, kann auch H groß sein, und das Volumen des Magneten kann verringert werden.

Diese sehr vereinfachten Formeln, die wir angegeben haben, vernachlässigen eine ganze Reihe von Details, sie gestatten jedoch das Grundprinzip der Frage zu verstehen.

Theorie des magnetischen Kreises

Wir wählen die in Abb. 138 dargestellte Anordnung, in der das Eisen einen magnetischen Kreis bildet.

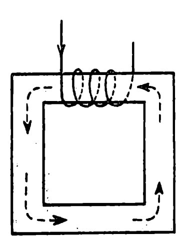


Abb. 138

Durch eine Spule mit N Windungen, in der ein Strom i fließt, erzeugen wir ein magnetisches Feld. Der Induktionsfluß durch den Querschnitt ist dann gegeben zu

$$\Phi = B \cdot F,$$

und das Feld hat die Form

$$H = \frac{B}{\mu} = \frac{\Phi}{\mu F}.$$

Die Zirkulation des Feldes auf einer Kraftlinie des Kreisstroms ist $4\,\pi N i$ (nach einem Satz, den wir weiter unten noch beweisen werden). Die Stromstärke in der Spule wird dabei durch i in elektromagnetischen Einheiten gegeben:

$$\int H\,dl = \int \frac{\Phi}{\mu F}\,dl = \Phi \int \frac{dl}{\mu F} = 4\,\pi N i.$$

In Analogie zur Elektrodynamik können wir

$$\int \frac{dl}{\mu F} = R_{\text{magn.}} \quad \text{und} \quad 4\,\pi N i = E$$

setzen und erhalten

$$E = \Phi\, R_{\text{magn.}}.$$

Dies ist eine Beziehung, die die gleiche Form wie das OHMsche Gesetz in der Elektrodynamik $U = I\,R$ hat, und der Ausdruck magnetischer Kreis ist dadurch gerechtfertigt.

$R_{\text{magn.}}$ ist der *auftretende Widerstand* und E die *magnetomotorische Kraft*. Tatsächlich ist diese Theorie nur eine Annäherung, da noch Flußverluste auftreten, die nicht berücksichtigt wurden. Nichtsdestoweniger ist sie in der Technik sehr gebräuchlich. Man stellt fest, daß die die uns interessierenden Felder erzeugenden „Amperewindungen" $N i$ dem Fluß Φ proportional sind und daß man sie durch die Einführung eines Proportionalitätsfaktors, des Widerstandsfaktors, dem Fluß gleichsetzen kann.

Dieser magnetische Widerstand besitzt wiederum Analogien zum elektrischen Widerstand. Zerlegt man den betrachteten Eisenring in einzelne Teile, so kann

man die einzelnen magnetischen Widerstände als in Reihe geschaltet betrachten und infolgedessen addieren. Für den Fall, daß der Ring einen Luftspalt besitzt, erhält man den Ausdruck

$$R_{\text{magn.}} = \int \frac{\Phi dl}{\mu F} = \frac{\Phi l}{F}\left(\frac{1}{\mu} + \frac{\varepsilon}{l}\right).$$

Dabei sind l die Länge der Kraftlinien im Eisen und ε die Spaltbreite im Magnetkreis. Diese Formel zeigt uns, wie die auftretende Permeabilität durch einen Spalt verändert wird. Man kann die magnetischen Widerstände auch parallel schalten, aber μ verändert sich immer entsprechend H, und die magnetischen Widerstände sind nicht besonders konstant.

Berechnung von Elektromagneten

Wir wollen annehmen, daß dem Leser der Aufbau eines Elektromagneten bekannt ist (Abb. 139). Das Hauptaugenmerk bei einer solchen Anordnung ist darauf gerichtet, eine möglichst große Induktion B zu erzielen. Dem steht jedoch die schnelle Sättigung der Magnetisierungsstärke gegenüber. Bei weichem Stahl z. B. erreicht $4\pi I$ sehr schnell einen Wert von 20000 Gauß. Will man die Induktion darüber hinaus vergrößern, so muß das magnetisierende Feld H sehr stark sein. Dies ist jedoch sehr schwierig, da erstens eine natürliche Grenze durch den Platzmangel beim Anbringen der Spulen auftritt und zweitens die Spulen einen gewissen Widerstand haben und wegen der auftretenden Erwärmung nur eine begrenzte Leistung aufnehmen können; wir haben also eine Begrenzung des Stromes und damit auch des durch ihn erzeugten Feldes.

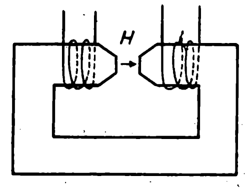


Abb. 139

Durch diese Einschränkungen ist es nicht möglich, bei einem Spaltvolumen von 20 cm³ mehr als etwa 50000 Gauß zu erzielen.

Der Elektromagnet von Bellevue z. B., der von M. COTTON gebaut wurde, erreicht bei einem Spaltvolumen von 20 cm³ ein Feld von 53000 Gauß. Um dieses Feld zu erzielen, werden von den Spulen mit einem Durchmesser von 1,90 m 100 kW aufgenommen. Der gesamte Elektromagnet wiegt 120 Tonnen.

Ausführung und Magnetisierung von Lautsprechermagneten

Das Problem besteht in der Erzeugung eines starken Radialfeldes in einem Magneten mit einem kreisförmigen Spalt von 1–2 mm Stärke und 5–6 mm Höhe.

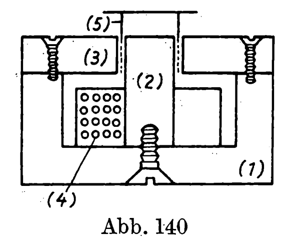


Abb. 140

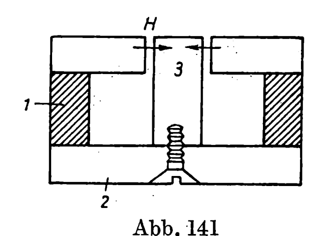


Abb. 141

In diesem Spalt bewegt sich die von dem Sprechstrom durchflossene Tauchspule (5). Je nach dem Verwendungszweck hat das Radialfeld eine Stärke von 7–14000 Gauß.

Man kann diesen Lautsprecher mit einem Elektromagneten ausrüsten, der aus einem „Topf“ (1), einem zentralen „Kern“ (2) und einer Deckplatte (3) besteht. Eine Spule (4), die von einem Gleichstrom durchflossen wird, dient zur „Erregung“, d.h., sie baut das Feld auf (Abb. 140).

Ebenso werden auch Lautsprecher mit einem Permanentmagneten ausgerüstet. Dazu wählt man ein zylindrisches Werkstück aus magnetisierbarem Stahl (1) (z.B.

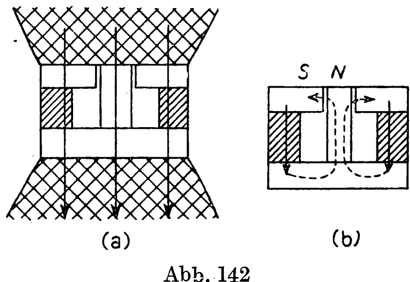


Abb. 142

eine Nickel-Aluminium-Legierung mit einem starken Koerzitivfeld). Die Deckplatten (2) und der Kern (3) bestehen aus einem weichen hysteresislosen Stahl (Abb. 141). Die Art der Magnetisierung ist recht interessant: Der Apparat wird zwischen die beiden Pole eines starken Elektromagneten gebracht. Dadurch bildet sich in ihm ein zur Achse paralleles quasigleichförmiges Feld H, das sowohl in dem legierten als auch in dem weichen Stahl den gleichen Wert hat. Der *Zylinder* (1) *wird so zu einem Permanentmagneten*, und der magnetische Fluß verläuft in einer geschlossenen Kurve auch durch den weichen Stahl, wie es in Abb. 142a, b dargestellt ist.

Wirkung eines Weicheisenkerns auf ein Magnetfeld

Wir vergrößern bei den eben betrachteten Lautsprechermagneten den Durchmesser des Weicheisenkerns; dadurch wird der Spalt verkleinert. Wenn das Feld durch einen Permanentmagneten aufgebaut wird, der einen konstanten oder beinahe konstanten Fluß hervorruft (nach der Art der B-H-Kurve), dann zieht der Kern die Kraftlinien stärker an, und wir erreichen ein stärkeres Feld im Spalt. Diese Verstärkung ist aber nur relativ gering.

Wird das Feld dagegen von einem weichen Metallstab, der durch eine stromdurchflossene Spule magnetisiert ist, aufgebaut, dann haben die Induktionslinien einen größeren Eisenweg. Die Permeabilität μ des Eisens ist größer als die der Luft. Der magnetische Widerstand nimmt also ab, d.h., der magnetische Fluß wird mit wachsendem Feld größer, und das Feld wächst schneller als bei dem Permanentmagneten.

Tragkraft von Magneten und Elektromagneten

Eisen, das man mit einem Magneten anziehen will, nimmt bei einer Berührung mit diesem eine magnetische Oberflächendichte $-I$ an. Das Feld, das durch den

Elektromagneten aufgebaut wird, beträgt $2\pi I/\mu$. Die Tragkraft des Magneten in Analogie zur Elektrostatik pro Flächeneinheit hat den Wert

$$F = \frac{2\pi I^2}{\mu},$$

da die Dichte pro Flächeneinheit nach POISSON I beträgt. In der Praxis, d.h. bei $\mu = 1$ (Luft), gilt

$$I = \frac{B}{4\pi},$$

$$F = \frac{B^2}{8\pi\mu} = \frac{HB}{8\pi} = \frac{B^2}{8\pi}.$$

Wenn z.B. $B = 15000$ Gauß und $F = 9$ kg/cm² betragen, kann man mit diesen Werten die Dimensionierung des Elektromagneten entsprechend den zu hebenden Gewichten durchführen (Hebemagnet). Diese Kraft pro Flächeneinheit ist ein *Druck*. Wir wollen noch bemerken, daß er gleich der *Dichte der magnetischen Energie* ist.

Erzeugung sehr starker Magnetfelder

Die Erzeugung sehr starker Magnetfelder über 50000 Gauß ist, so haben wir bereits gesehen, mit Elektromagneten nicht mehr möglich. Man verwendet dann Kreise, die allerdings nur kurzzeitig von sehr starken Strömen durchflossen werden (um die Zerstörung des Materials durch den JOULEschen Effekt zu verhindern). Man kann so (allerdings nur für sehr kurze Zeit) Felder von einigen 100000 Gauß erzeugen.

Wir wollen hier nur die im Jahre 1932 von KAPITZA durchgeführten Experimente erwähnen. Bei seinen Versuchen entnahm er einem Spezialgenerator 2000 kW, die er während $^1/_{100}$ sec durch ein Solenoid schickte. Die erzeugten Felder lagen bei 300000 Gauß. (Die Stromstärke im Solenoid betrug 72000 A.)

Einfluß der Temperatur auf die Magnetisierung

Wenn wir für einen ferromagnetischen Körper die Sättigungsmagnetisierung als Funktion der Temperatur auftragen, so erhalten wir zuerst einen nahezu geradlinigen horizontalen Teil, dann krümmt sich die Kurve stark nach unten und schneidet die Temperaturachse in einem Punkt P.

Die diesem Punkt entsprechende Temperatur nennen wir CURIE-Temperatur. Unterhalb dieser Temperatur ist der Körper ferromagnetisch, oberhalb ist er nur noch paramagnetisch.

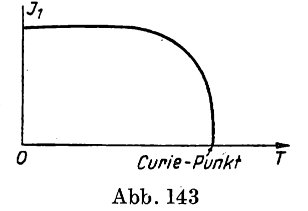


Abb. 143

Für Eisen liegt der CURIE-Punkt bei 775° C. Es scheint, als bestünde ein Zusammenhang zwischen dem Durchgang durch den CURIE-Punkt und einer kristallinen Umwandlung des Eisens. Für Nickel liegt der CURIE-Punkt ungefähr bei 350° C, für Kobalt bei 1100° C. Bei Gadolinium findet sich der CURIE-Punkt etwa bei Zimmertemperatur.

Wir wollen den Einfluß der Temperatur durch das folgende sehr einfache Experiment veranschaulichen:

Ein um eine horizontale Achse drehbarer Eisenstab wird in die Nähe eines Magnetpols gebracht. Wir ordnen einen Bunsenbrenner so an, daß der von dem Magneten angezogene Eisenstab in der Flamme hängt (Abb. 144).

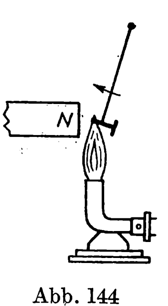


Abb. 144

Nun können wir feststellen, daß diese Anordnung einem Oszillator entspricht. Der Eisenstab wird zuerst vom Magneten angezogen. Nachdem er jedoch eine bestimmte Zeit in der Flamme des Brenners hängt, fällt er zurück (der Ferromagnetismus verschwindet). Ist der Stab genügend abgekühlt, so wird er von neuem angezogen. Diesen Vorgang kann man beliebig oft wiederholen.

Materialien mit hoher Permeabilität

Seit ungefähr 50 Jahren haben die Weiterentwicklungen der chemischen Zusammensetzung und der Behandlung der Materialien die maximal erreichbare Permeabilität laufend erhöht, wie es in Abb. 145 graphisch dargestellt ist.

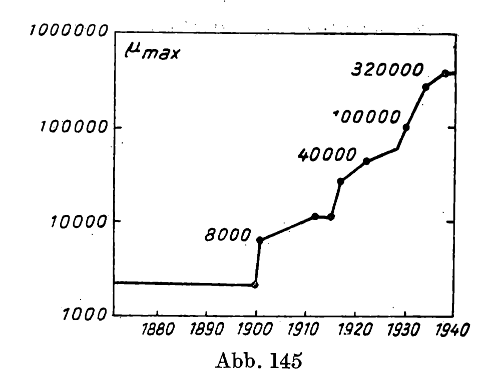


Abb. 145

Reines Eisen

Bei *reinem Eisen* wurden immer höhere Permeabilitätswerte gemessen, je reiner man es herzustellen in der Lage war. Das Eisen ist jedoch hinsichtlich seiner magnetischen Eigenschaften sehr empfindlich und muß sorgfältig ausgeglüht werden.

Im Jahre 1914 stellte Yensen fest, daß die maximale Permeabilität von 8000 auf 19000 ansteigt, wenn man den Gehalt des Eisens an Kohlenstoff von 0,008% auf 0,0045% herabsetzt. 11 Jahre später erhielt er für ein noch reineres Eisen einen Permeabilitätswert $\mu_{\max} = 61000$.

Cioffi erreichte nach einer sehr langen Glühdauer bei 1400° C einen Anfangswert von $\mu_a = 6000$ und einen Maximalwert $\mu_{\max} = 190000$. Später berichtete er sogar über einen Wert $\mu_{\max} = 10^6$.

Man nimmt an, daß sich bei sehr reinem Eisen die Hysteresisverluste bis auf 20 erg pro Umlauf verringern lassen.

Abb. 146 stellt die Erstmagnetisierungskurve und die Permeabilität des von YENSEN 1925 als „rein“ bezeichneten Eisens dar.

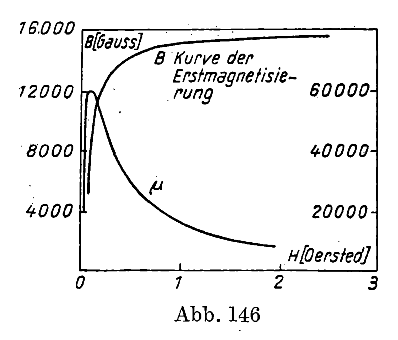


Abb. 146

Legierungen

Bei Legierungen ist nicht nur die Betrachtung der Permeabilitätserhöhung von Interesse, sondern auch die *Hysteresis* und der *spezifische Widerstand*. Dieser letztere bestimmt besonders die Verluste durch FOUCAULTsche Ströme.

Wenn wir uns auf Materialien beschränken wollen, die im allgemeinen benutzt werden, so haben wir vor allen Dingen zu betrachten

a) extra weiche Stähle,
b) Siliziumstähle,
c) Eisen-Nickel-Legierungen.

Extra weiche Stähle

In diese Kategorie kann man das *Armco-Eisen* mit 99,84% Fe zählen, das 5- bis 6mal reiner ist als die gewöhnlichen weichen Stähle, wie z.B. *Schwedenstahl*. Armco-Eisen enthält

0,009% Kohlenstoff,
0,004% Silizium,
0,025% Schwefel.

Die Induktion des Armco-Eisens wird durch Glühen noch gesteigert (z.B. bei 930° C), wie es in der folgenden Tabelle angegeben ist.

Feld	Induktion		
	ungeglüht	*geglüht*	
1 Oersted	—	5300	Gauß
2 Oersted	4500	10200	Gauß
3 Oersted	6800	12000	Gauß
4 Oersted	9400	13400	Gauß
5 Oersted	11000	14100	Gauß

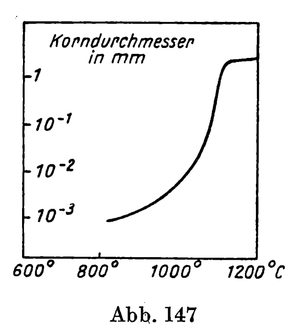


Abb. 147

Durch das Glühen bezweckt man eine Auflösung der inneren Spannungen, da die *Anfangspermeabilität* in sehr starkem Maße von diesen abhängt. Die Abb. 147 stellt die Veränderung der Korngröße als Funktion der Glühtemperatur dar.

Durch langzeitiges Glühen eines Armco-Eisens in einer *Wasserstoffatmosphäre* gelang es, seine Anfangspermeabilität von 250 auf 20000 und seine Maximalpermeabilität von 7000 auf 340000 zu steigern.

Ein guter weicher Stahl hat eine Permeabilität, die ungefähr die Hälfte der des ungeglühten Armco-Eisens beträgt.

Siliziumstähle

Siliziumstähle sind bis zu einem Siliziumgehalt von 5% walzbar und bis zu 7% Silizium schmiedbar. Durch eine Zugabe von Silizium wird die Bruchfestigkeit des Eisens bis zu ihrem doppelten Wert erhöht; die Elastizitätsgrenze steigt bei einem Siliziumgehalt von 4% auf ihren 5fachen Wert. Außerdem bewirkt die Siliziumzugabe eine Verringerung der Hysteresisverluste. Man erhält so eine kommerzielle Stahlsorte, bei der diese Verluste ungefähr 1 W pro Kilogramm (vorausgesetzt 50 Hz Wechselstrom) bei einem Induktionsintervall von ± 10000 Gauß betragen.

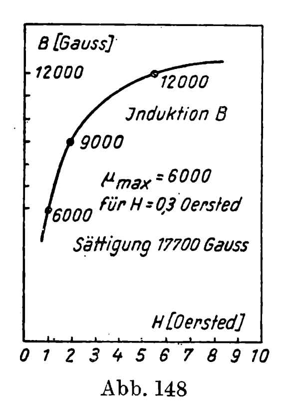


Abb. 148

Die maximale Sättigungsinduktion verringert sich dagegen um 10%. (Bei 3% Siliziumgehalt verringert sie sich von 22300 auf 20200 Gauß.)

Eine weitere wichtige aus dem Siliziumzusatz resultierende Eigenschaft ist die Vergrößerung des spezifischen Widerstandes. Er kann bis auf seinen 3fachen Wert steigen. Dadurch werden die Foucaultschen Ströme nur ein Drittel und die Verluste durch diese Ströme ebenfalls nur ein Drittel der bei den gewöhnlichen weichen Stählen auftretenden Werte betragen.

Die Abb. 148 stellt die Induktionskurve eines guten Siliziumbleches, das bei 920° C geglüht wurde, dar.

Hipersil- und Imphystil-Stähle

(*Hi* von high, *per* von Permeabilität und *sil* von Silizium.)

Hipersil ist eine Stahlsorte der Firma Westinghouse und ein Siliziumstahlblech, *dessen Körner beim Walzen so orientiert werden, daß eine ausgezeichnete Richtung entsteht, die einer leichten Magnetisierung entspricht.* Dies ist eine wichtige Errungenschaft, die die Leistungsfähigkeit der industriellen magnetischen Kreise wesentlich verbessert. Entsprechende Bleche werden auch von einer französischen Firma (Imphystil-Stähle) hergestellt.

Bei einer Verwendung dieser Stähle beträgt die Induktion, und besonders die Sättigung, bei einem konstanten Feld das 1,3- bis 1,5fache wie bei Siliziumstahlblechen. Bei gleicher Induktion liegen die Verluste in der Größenordnung von $^5/_8$ der Verluste in einem Siliziumstahl. Die maximalen Permeabilitäten verhalten sich wie 35000 zu 10000.

Es erfordert eine besondere Technik, diese Bleche zum Bau von Transformatoren zu verwenden. Man rollt den Blechstreifen auf (Abb. 149), um die Orientierung der Körner zu bewahren, und bringt an den Querschnitten AB und CD die Transformatorwicklungen an. Durch diese Anordnung spart man eine beträchtliche Gewichtsmenge ein, wobei die Erwärmung abnimmt. Analoge Möglichkeiten ergeben sich bei der Konstruktion von Elektromotoren, und zwar bei Rotoren und Statoren.

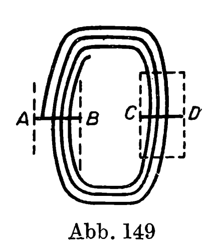


Abb. 149

Eisen-Nickel-Legierungen

Eisen-Nickel-Legierungen sind vom magnetischen Standpunkt aus von sehr großer Wichtigkeit. Sie besitzen die gleichen Eigenschaften wie reines Eisen in bezug auf Permeabilität und schwache Hysteresis. Vom magnetischen Standpunkt aus sind sie indessen sehr viel stabiler als das reine Eisen, erfordern aber eine besondere Behandlung. Sie werden in der Technik sehr viel verwandt. Die Zusammensetzungen, die die oben genannten Eigenschaften besitzen, zeigen einen niedrigeren Sättigungswert. Durch eine Veränderung der Zusammensetzung kann man noch eine beträchtliche Erhöhung des Permeabilitätswertes bei verbesserter Sättigung erreichen. Schließlich ist es möglich, durch eine entsprechende Wärmebehandlung der Hysteresisschleife eine beinahe rechteckige Form zu geben. Durch diese Möglichkeit wird der Anwendungsbereich in der Technik noch vergrößert.

a) *Legierungen mit* 35% *Nickel.* Bekannt sind Anhyster A und B von Imphy und das englische Rhometall. Diese Legierungen besitzen auch bei hohen Frequenzen eine hohe Permeabilität und einen sehr großen spezifischen Widerstand, d.h. also geringe FOUCAULTsche Verluste.

b) *Legierungen mit* 50% *Nickel.* Anhyster C und D, Radiometall, Permenorm und Hypernik.

Die Permeabilität dieser Legierungen ist größer; der Maximalwert von μ beträgt etwa 70000 und wurde bei einem höheren Feld als bei Legierungen mit einem Nickelgehalt von 78% festgestellt. Diese speziellen Bleche werden zur Herstellung von Transformatoren in der Rundfunktechnik verwendet, in deren Primärwicklungen auch die Gleichströme der Röhren fließen und in ihnen ein unerwünschtes Magnetfeld erzeugen. Die Sättigung bleibt ebenfalls sehr hoch und liegt oberhalb von 16000 Gauß.

Permenorm ist eine Verbindung der gleichen Zusammensetzung. Sie wird jedoch nach dem Glühen mehr oder weniger schnell in einem Magnetfeld von etwa 80 Oersted abgekühlt. Dabei erhält man eine Hysteresiskurve, die beinahe rechteckig ist und interessante Anwendungsmöglichkeiten bietet.

In der Abb. 150 wird die Veränderung der Hysteresis bei diesen Legierungen als Funktion des Glühens dargestellt.

c) *Legierungen mit* 80% *Nickel.* Die Eigenschaften dieser Legierungen sind von größtem Interesse.

Das *Mumetall* (76% Ni, 17% Fe, 5% Cu, 2% Cr oder Mn) besitzt einen maximalen Permeabilitätswert von 10^5 und eine Anfangspermeabilität von 15000. Der

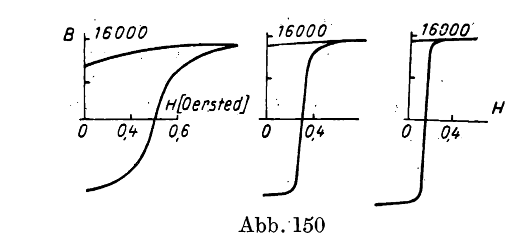


Abb. 150

spezifische Widerstand beträgt $73 \cdot 10^{-6}$ Ohm · cm. Die Verluste betragen 0,1 Watt pro kg bei 50 Hz Wechselstrom. Die maximale Induktion liegt in der Größenordnung von 7000 Gauß.

Permalloy. Diese Legierung wurde zuerst von ARNOLD und ELMEN in den Laboratorien der Bell Telephone entwickelt und stellt einen weiteren Fortschritt dar. Sie enthält 78,5% Ni und 5% Molybdän und etwas Mangan (dem Nickelgehalt

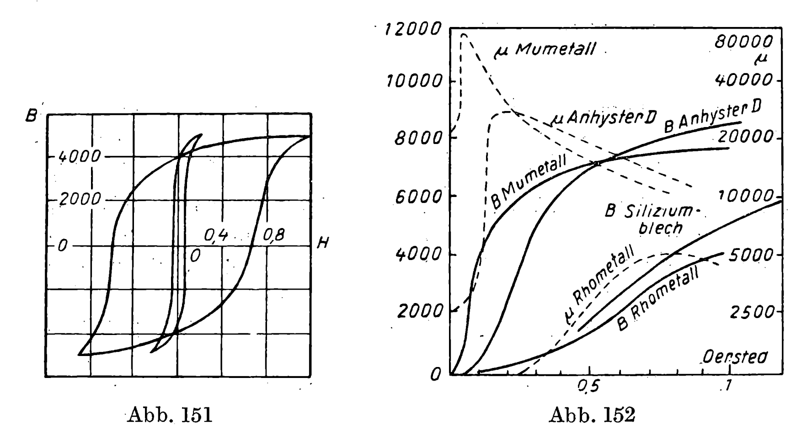


Abb. 151 Abb. 152

entsprechend unterscheidet man Permalloy B und C), um die große Empfindlichkeit gegen mechanische und thermische Einflüsse zu verringern.

In Abb. 151 werden die Hysteresisschleifen von Permalloy (Remanenz 4000 Gauß, Koerzitivfeld 0,035 Gauß) und den besten Siliziumblechen gegenübergestellt.

In Abb. 152 wird eine Übersicht über die magnetischen Eigenschaften der Nickelstähle gegeben.

Erwähnen wir zum Schluß die „Perminvar-Stähle" (30% Fe, 45% Ni, 25% Co), die nach einer Glühdauer von 24 Stunden zwischen 400° C und 500° C einen Permeabilitätswert von 250 ± 1% besitzen (bis 1,7 Oersted).

V. KAPITEL

Bemerkungen zu den Theorien des Magnetismus

Nach einer von AMPÈRE aufgestellten Hypothese rührt der Magnetismus von besonderen im Atom auftretenden Strömen her. Diese Hypothese hat sich als richtig herausgestellt. Sowohl die Elektronenbahnen als auch die Eigenrotation der Elektronen oder ihr Spin entsprechen den Strömen nach AMPÈRE. Jede dieser Elektronenbahnen besitzt ein magnetisches Moment M. Das magnetische Moment des gesamten Moleküls ist die Summe der magnetischen Momente aller Elektronenbahnen des Moleküls (siehe weiter unten die Betrachtung der Elektronenbahnen).

Wir wollen nun mit Hilfe der vorstehenden Hypothese den Diamagnetismus, den Paramagnetismus und den Ferromagnetismus erklären.

Diamagnetismus

Wir nehmen an, daß die Elektronenbahnen eine solche symmetrische Verteilung zeigen, daß sich die magnetischen Momente in jedem Atom aufheben. Das Atom besitzt also kein permanentes magnetisches Moment. Wir nehmen weiterhin an, daß die Orientierung der Ebene der Elektronenbahn durch die Wirkung des magnetischen Feldes nicht beeinflußt wird. Dies ist leicht zu verstehen, wenn die Feldwirkung den Wechselwirkungen der Bahnen gegenüber schwach ist.

Die Feldwirkung jedoch wird die Elektronengeschwindigkeit, also auch die magnetischen Momente der einzelnen Bahnen, verändern. Dadurch tritt ein *dem Feld entgegengerichtetes* magnetisches Moment auf (LENZsche Regel). (Zu diesem Effekt findet man weiteres im Abschnitt über elektromagnetische Induktion.) Dies ist die Erscheinung des *Diamagnetismus*.

Die 1905 von LANGEVIN entwickelte Theorie[1]) führt zu der Beziehung

$$\chi = -\frac{1}{6} r^2 \frac{e}{m} N e Z.$$

Dabei sind χ der Magnetisierungskoeffizient eines Grammatoms, r der mittlere Radius der Elektronenbahnen im Atom, e die Elementarladung und m die Elektronenmasse, N die LOSCHMIDTsche Zahl und Z die Anzahl der Elektronen im Atom (Atomzahl). Ein analoges Resultat ergibt sich in den modernen Quantentheorien.

Wenn man r mit Hilfe dieser Formel berechnen will (die anderen Größen in der Gleichung sind experimentell bestimmbar), so findet man Werte in der Größenordnung von 10^{-8} cm, die in guter Übereinstimmung mit den durch andere Methoden erhaltenen Werten sind und etwas unter den maximalen Atomradien liegen. Diese Übereinstimmung ist durchaus befriedigend und rechtfertigt die Anwendung dieser Methode.

Paramagnetismus

Wir nehmen jetzt an, daß zwischen den magnetischen Momenten der Elektronenbahnen oder den Spins keine Kompensation auftritt: die Atome besitzen also ein permanentes magnetisches Moment, das wir als *spezifische Atomeigenschaft* an-

[1]) Siehe das Kapitel „Elektronen“.

sehen können. Ist kein äußeres Feld vorhanden, so haben die Atome alle möglichen Orientierungen, und die resultierende Magnetisierung des Körpers ist Null.

Unter der Wirkung eines äußeren Feldes versucht sich jedes Atom so zu orientieren, daß sein magnetisches Moment parallel und gleichgerichtet dem äußeren Feld ist. Dieser Orientierung steht die thermische Bewegung entgegen. Wir sehen also, daß wir es mit einer paramagnetischen Substanz zu tun haben. (Es ist außerdem ein geringer Diamagnetismus vorhanden, der jedoch gegenüber dem Paramagnetismus vernachlässigt werden kann.) Um jetzt dieses Phänomen quantitativ zu bestimmen, müssen wir die Wahrscheinlichkeit dafür berechnen, daß das magnetische Moment eines Atoms gerade so orientiert ist, daß es mit der Richtung des äußeren Feldes einen Winkel Θ bildet.

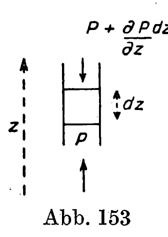


Abb. 153

Diese Wahrscheinlichkeit werden wir durch Analogiebetrachtungen aus der Molekülverteilung in einem Gas, das unter dem Einfluß der Schwerkraft steht, bestimmen.

Wir betrachten ein Gasvolumen von dz cm³, wobei dz die Höhe des Volumens im Gleichgewichtszustand ist.

Die Resultante der Druckkräfte, die auf dieses Volumen wirken, ist dann gegeben zu

$$\frac{\partial P}{\partial z} dz,$$

wobei dz nach unten gerichtet ist.

Diese Kraft und das Gewicht des Gases stehen im Gleichgewicht. Wenn ϱ die spezifische Masse des Gases ist, gilt

$$\frac{\partial P}{\partial z} dz + \varrho\, g dz = 0$$

und

$$\frac{\partial P}{\partial z} + \varrho g = 0.$$

Wir wollen nun annehmen, daß es sich um ein ideales Gas mit konstanter Temperatur handelt:

$$P = \frac{RT}{M} \varrho.$$

Dabei sind M das Molekulargewicht und $R = 8{,}32 \cdot 10^7$ CGS-Einheiten die ideale Gaskonstante.

Folglich ist

$$\frac{\partial P}{\partial z} + \frac{M}{RT} g P = 0$$

und

$$\frac{\partial P}{P} = -\frac{Mg}{RT} dz.$$

Durch Integration erhalten wir

$$\ln\left(\frac{P}{P_0}\right) = -\frac{Mgz}{RT},$$

$$P = P_0 e^{-\frac{Mgz}{RT}}.$$

Ferner wird

$$\varrho = \varrho_0 e^{-\frac{Mgz}{RT}}$$

sein.

Dies ist aber, wie man leicht sieht, die Wahrscheinlichkeit dafür, daß sich ein Molekül des Gases in der Höhe z befindet.

Wir erinnern uns, daß mgz die potentielle Energie W des Moleküls ist:

$$\varrho = \varrho_0 e^{-\frac{NW}{RT}}.$$

Dabei ist N die LOSCHMIDTsche Zahl. Wir können dafür auch schreiben:

$$\varrho = \varrho_0 e^{-\frac{W}{kT}},$$

wobei k die BOLTZMANN-Konstante $k = \frac{R}{N}$ ist. *Wir nehmen nun an, daß diese Formel allgemein die Wahrscheinlichkeit dafür angibt, daß sich ein Molekül in einer bestimmten Lage befindet, und wenden sie auf das von uns zu lösende Problem an.*

Die potentielle Energie eines Moleküls in einem Magnetfeld, das mit dem magnetischen Moment des Moleküls den Winkel Θ einschließt, ist gegeben zu

$$W = -H\mu\cos\Theta.$$

Dabei ist μ das permanente Moment des Moleküls.

Die gesuchte Wahrscheinlichkeit entspricht also gerade der geometrischen Wahrscheinlichkeit ohne Feld H, multipliziert mit

$$e^{\frac{H\mu\cos\Theta}{kT}}.$$

Zu jedem Molekül können wir ein entsprechendes Molekül derart angeben, daß sich die Komponenten ihrer Momente senkrecht zum Feld aufheben. Also wird μ durch den Ausdruck $\mu\cos\Theta$ (Projektion auf das Feld) zu der resultierenden Magnetisierung beitragen.

Für die mittlere Magnetisierung finden wir den Ausdruck

$$\overline{\mu\cos\Theta\, e^{\frac{H\mu\cos\Theta}{kT}}}.$$

(Der Strich über der Formel zeigt an, daß es sich um einen Mittelwert handelt.)

Wenn nun H sehr schwach, ist $\mu H\cos\Theta$ sehr klein gegen kT, und wir können den Ausdruck in eine Reihe entwickeln.

Die mittlere Magnetisierung ergibt sich also zu

$$\overline{\mu\cos\Theta\left(1+\frac{H\mu\cos\Theta}{kT}\right)}=\mu\,\overline{\cos\Theta}+\frac{H\mu^2}{kT}\,\overline{\cos^2\Theta}.$$

Nun gilt aber

$$\overline{\cos\Theta}=0.$$

Andererseits ist $\cos^2\Theta$ das Quadrat der Projektion auf einen Vektor der Länge 1. Der Mittelwert für alle möglichen Orientierungen ist $^1/_3$. (Tatsächlich hat eine Richtung 3 Richtungskosinus. Die Summe ihrer Quadrate ist 1, und der mittlere Wert dieser Quadrate ist gleich, nämlich $^1/_3$). Folglich hat die mittlere Magnetisierung eines Moleküls die Form

$$\delta I=\frac{\mu^2 H}{3kT}.$$

Wenn ν die Anzahl der Moleküle pro Volumeneinheit ist, so erhalten wir die Magnetisierung pro Volumeneinheit durch den Ausdruck

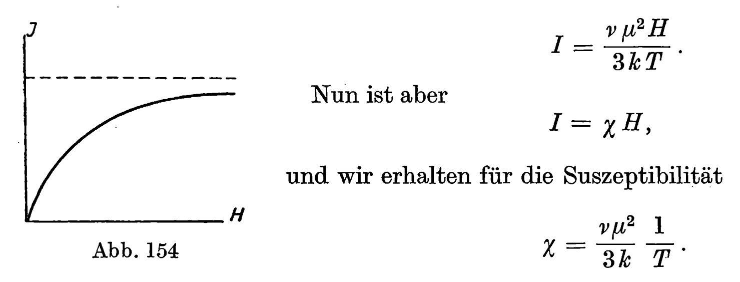


Abb. 154

$$I=\frac{\nu\mu^2 H}{3kT}.$$

Nun ist aber

$$I=\chi H,$$

und wir erhalten für die Suszeptibilität

$$\chi=\frac{\nu\mu^2}{3k}\,\frac{1}{T}.$$

Diese von LANGEVIN im Jahre 1905 entwickelte Theorie führt also wieder auf das CURIEsche Gesetz. Das gleiche Resultat ergeben auch die modernen Quantentheorien.

Eine ausführlichere Berechnung der mittleren Magnetisierung ergibt eine Sättigung für sehr starke Felder, die man um so besser beobachten kann, je tiefer die Temperatur ist (Abb. 154).

Diese Erscheinung hat KAMERLINGH ONNES im Leidener Kältelaboratorium an Gadoliniumsulfat bei 14° absoluter Temperatur beobachtet.

Ferromagnetismus

Wir werden sehen, daß

$$\chi=\frac{\nu\mu^2}{3kT}$$

ist.

Wenn man in diese Formel die wahrscheinlichen Werte von μ einsetzt, ergibt sich χ in der Größenordnung von 10^{-4} für paramagnetische Stoffe.

Zur Erklärung des Ferromagnetismus ist es erforderlich, bei Molekularmomenten der gleichen Größenordnung für χ Werte von wenigstens 1–100 bei schwachen Feldern zu finden.

Nehmen wir an, daß die Atome oder, besser gesagt, die Träger der magnetischen Momente so orientiert sind, daß Bezirke von z. B. 10^4 Teilchen eine gleiche Orientierung besitzen. Dann wird μ mit 10^4 und ν mit 10^{-4} multipliziert. $\nu\mu^2$ wird also mit 10^4 multipliziert. Auf diese Art kann man die Phänomene der Ferromagnetika erklären.

Im Jahre 1907 hat P. Weiss die Hypothese aufgestellt, daß ein „Molekularfeld", über das er nichts weiter aussagen konnte, als daß es sehr stark sei, benach-

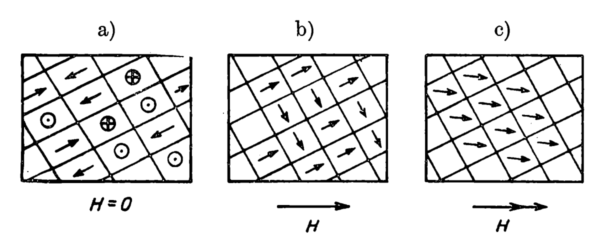


Abb. 155a. Ohne äußeres Feld sind die Vektoren $\mathfrak{J}$ der Weissschen Bereiche völlig willkürlich orientiert, und die mittlere Magnetisierung ist Null. Jeder Bereich für sich besitzt jedoch eine Magnetisierung.

Abb. 155b. Wird ein schwaches Feld angelegt, dann orientieren sich Vektoren $\mathfrak{J}$ ungefähr in Richtung des angelegten Feldes (Teil AB der Magnetisierungskurve).

Abb. 155c. Bei einem sehr starken Feld $\mathfrak{H}$ sind die Vektoren $\mathfrak{J}$ in jedem Bereich parallel zu $\mathfrak{H}$ gerichtet, d. h., die Sättigung des Materials ist erreicht (Teil BC der Magnetisierungskurve).

barte magnetische Momente parallel ausrichtet. Nach dieser Hypothese wurde der Begriff der „Weissschen Bezirke" geprägt, d. h. Bezirke, in denen die Momente parallel ausgerichtet sind. Man sieht also, daß diese Weissschen Bezirke wenigstens 10^4 bis 10^6 Atome enthalten müssen.

Die Existenz dieser Bezirke konnte experimentell nachgewiesen werden.

Wir zitieren dazu die Experimente von Bitter und betrachten einen Schnitt durch ein ferromagnetisches Metall, der poliert und mit einer kolloidalen Fe_2O_3-Lösung bestrichen wird. Die Beobachtung unter dem Mikroskop zeigt deutlich, daß die von einer Magnetisierung in jedem Weissschen Bezirk herrührenden magnetischen Spektren unabhängig von der Gesamtmagnetisierung des Körpers sind, die ja ohne äußeres Feld nicht vorhanden ist. Den Fall der Hysteresis wollen wir dabei nicht betrachten.

Nun bringen wir den Körper in ein magnetisches Feld. Die magnetischen Momente stellen sich zuerst nur unvollkommen und ungefähr in Richtung des Feldes ein, wobei I dann sehr schnell anwächst. Wenn alle magnetischen Momente diese Orientierung angenommen haben, ist es sehr schwierig, I durch weiteres Anwachsen des Feldes zu vergrößern. Dies ist in Abb. 155 dargestellt, wo die Weissschen Bereiche in roher Annäherung als einfache geometrische Figuren mit konstanten Dimensionen angenommen sind. In Wirklichkeit jedoch kann ein Weissscher Bereich durchaus auf Kosten eines angrenzenden Bereiches durch einfache Verschiebung der Trennwand anwachsen. Diese Verschiebung ist reversibel, und bei schwachen Feldern, die eine solche Verschiebung hervorrufen, *ist auch die Magnetisierung reversibel* (Abb. 156).

Wir wissen, daß die Veränderungen der Orientierung jedes Bereichs sehr plötzlich vor sich gehen können. Durch dieses Phänomen wird der BARKHAUSEN-Effekt hervorgerufen, der 1918 erstmals beobachtet wurde und sich vorzüglich als Vorlesungsversuch eignet (Abb. 157).

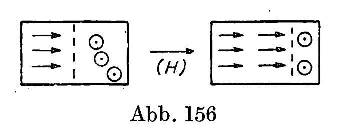


Abb. 156

Ein Stab aus ferromagnetischem Metall wird mit einer Spule umgeben, die über einen Verstärker A an einem Lautsprecher liegt.

Nun nähert man dem Metallstab einen Magneten. Unter dem Einfluß der Veränderung des Feldes ändert das Metall (meist Nickel) seine Induktion. Das diskontinuierliche Umklappen der WEISSschen Bereiche ruft eine plötzliche Veränderung des Spulenstroms hervor. Hierdurch tritt eine elektromotorische Kraft auf, durch die im Lautsprecher ein Geräusch verursacht wird. Man hört im Lautsprecher ein völlig ungleichmäßiges Knistern, während das magnetisierende Feld kontinuierlich verändert wird. (Während des Experimentes ist es zweckmäßig, das magnetisierende Feld mehrmals umzupolen, damit der Effekt genauer betrachtet werden kann. Man muß jedoch darauf achten, daß man im Bereich schwacher Felder bleibt.) Bei genügender Vergrößerung der I-H-Kurve wird diese eine diskontinuierliche Form zeigen (Abb. 158).

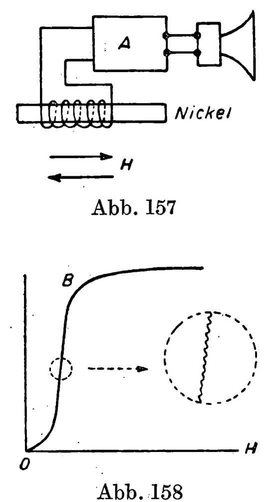


Abb. 157

Abb. 158

Das plötzliche Umklappen der Magnetisierung in den WEISSschen Bereichen zeigt deutlich, daß es sich um einen *irreversiblen* Effekt handelt. Um dieses Umklappen beobachten zu können, muß ein größeres Feld als das Koerzitivfeld angelegt werden. So erklärt man die *Hysteresis*. In den einfachsten Fällen wird dieses Koerzitivfeld durch eine geringe Anisotropie der Form der Körner erklärt. (So ist es z.B. NÉEL gelungen, nach diesem Prinzip ausgezeichnete Magnete aus sehr reinem Eisenpulver herzustellen.) Der Grenzfall der rechtwinkligen Hysteresis entspricht Materialien, die aus nur einem einzigen großen WEISSschen Bereich bestehen.

Eigenrotation des Elektrons, Rolle des Spins

Für den Diamagnetismus scheint der Spin ohne Einfluß zu sein. Betrachten müssen wir ihn allerdings bei der Behandlung des Paramagnetismus, der seinerseits der Sonderfall des Ferromagnetismus ist, bei dem sich die magnetischen Momente der Elektronenbahnen eines Atoms alle gegenseitig kompensieren.

Für die Mehrzahl aller Substanzen sind die Spins antiparallel gerichtet und heben sich gegenseitig auf. Bei den Ferromagnetika dagegen tritt keine Kompensation auf, und eine gewisse Anzahl von Elektronen im Atom werden parallel ausgerichtete Spins besitzen. Unter bestimmten Bedingungen richten sich die Spins in den erwähnten WEISSschen Bereichen parallel zueinander aus. So erklärt man den Ferromagnetismus. Diese Bedingungen sind erfüllt bei Eisen, Nickel, Kobalt und ihren Legierungen sowie bei bestimmten Legierungen, deren einzelne

Komponenten nicht ferromagnetisch sind. Dafür haben wir bereits ein Beispiel bei der Behandlung der Permanentmagnete gegeben.

Barnett-Effekt (1914)

Betrachten wir ein umlaufendes Elektron auf seiner Bahn, so können wir sagen, daß sich sein magnetisches Moment mit dem Bahnimpuls verändert. Ein ferromagnetischer Körper, der in Rotationsbewegungen versetzt wird, muß sich also magnetisieren. Dieser Effekt existiert tatsächlich, ist jedoch nur klein (Barnett-Effekt). Das Verhältnis des magnetischen Momentes zum Bahnmoment beträgt $\frac{e}{2m}$ für eine Kreisbahn (diese elementare Berechnung ist einfach[1])) und ergibt $\frac{e}{m}$ für einen Spin (Quantentheorie). Das Experiment erlaubt uns abzuschätzen, inwieweit die Magnetisierung durch Bahnbewegung oder Eigenrotation hervorgerufen wird.

Im Jahre 1915 wurde aus theoretischen Überlegungen der entgegengesetzte Effekt vorausgesagt (Einstein und de Haas in Holland). Seine tatsächliche Existenz wurde experimentell von diesen Forschern nachgewiesen: Ein magnetisierter ferromagnetischer Körper erhält einen Impuls um die Feldrichtung.

Stern-Gerlach-Versuch (1922)

Man verdampft Silber im Vakuum und blendet mit Hilfe eines Diaphragmas einen feinen Atomstrahl des paramagnetischen Silbers aus. Diesen Atomstrahl läßt man zwischen zwei sehr unsymmetrischen Polen eines Elektromagneten (Abb. 159) hindurchtreten. Auf die Atome wirkt dabei eine Ablenkkraft $\mu \frac{\partial H}{\partial x}$. Jeder Richtung des Moments μ muß eine Silberanlagerung auf dem Schirm entsprechen.

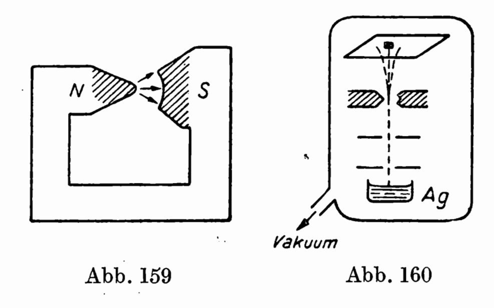


Abb. 159 Abb. 160

Das Experiment zeigt, daß es für μ nur zwei zum Feld parallele Orientierungen gibt. Man erhält nämlich zwei Punkte auf dem Schirm. Die Ablenkung ist leicht als Funktion von μ zu berechnen. Ihre Messung ergibt Werte für μ, die sehr gut mit den für eine Elektronenbahn vorausgesagten übereinstimmen. Dies ist ein sehr schöner und direkter Beweis für die modernen Theorien (Abb. 160).

---

[1]) Ein Elektron bewegt sich mit der Geschwindigkeit v auf einem Kreis mit dem Radius r. Das Bewegungsmoment in bezug auf den Mittelpunkt beträgt mvr.

Wir werden weiter unten sehen (Kapitel „Elektronen"), daß eine Ladung e, die das Element dl mit der Geschwindigkeit v durchläuft, gerade einem Strom i entspricht: $idl = ev$. Aus $dl = 2\pi r$ folgt i. Das entsprechende magnetische Moment ist $iF = \frac{evr}{2}$. Das Verhältnis der beiden Momente hat also den im Text angegebenen Wert.

ELEKTROKINETIK

I. KAPITEL

Der elektrische Strom

Elektrostatische Bemerkung

Verbindet man durch einen leitenden Draht zwei auf verschiedenen Potentialen liegende Leiter, so stellt man fest, daß ein Ladungstransport auftritt und die Potentiale beider Leiter dem gleichen Wert zustreben. Dieser Transport findet so lange statt, bis beide Leiter auf dem gleichen Potential liegen. *Man definiert die Stromstärke in einem bestimmten Zeitpunkt durch die Geschwindigkeit des Ladungsabflusses:*

$$i = \frac{dq}{dt};$$

i ist also die Ladungsmenge dq, die im Zeitintervall dt durch den Querschnitt des Drahtes hindurchfließt. Dieser Strom, der sich zeitlich verändern kann, ist jedoch in einem bestimmten Augenblick für alle Querschnitte gleich (ausgenommen werden muß dabei der Fall eines so langen Drahtes, daß Ausbreitungseffekte auftreten).

Diese Eigenschaft der Konstanz des durch die beweglichen Ladungen hervorgerufenen Stroms durch die verschiedenen Querschnitte eines betrachteten Leiters ist von sehr großer Bedeutung. Sie zeigt:

1. Es tritt ein *Elektrizitätsverlust* auch an den Punkten nicht auf, an denen sich der Leiter verändern könnte. (Diese Frage war lange Zeit ungeklärt.)

2. Ein stromführender Leiter leitet alle ihm zufließenden Ladungen wieder ab und kann sich vom elektrostatischen Standpunkt aus nicht selbst aufladen. Das Potential des Leiters wird durch das Fließen eines Stromes nicht verändert. Die Ladungsdichte im Innern ist immer Null. Jedem Teil dieser beweglichen Ladungsmenge, die den Strom hervorruft, entspricht eine genau gleichgroße entgegengesetzte Ladungsmenge (z. B. positive Ionen). Dadurch ist die Neutralität des Leiters gewahrt. Eine gute Veranschaulichung des Stromes gibt die Vorstellung eines durch ein festes Ionengitter gleitenden Elektronengitters, wenn beide Gitter genau die gleiche Ladungsdichte besitzen.

Fundamentale Eigenschaften des elektrischen Stromes

1. *Effekte in der Nähe eines stromdurchflossenen Leiters.* Bringt man eine magnetisierte Nadel in die Nähe eines stromdurchflossenen Leiters, so kann man eine Ablenkung beobachten (Experiment von OERSTED. Es ist besonders einfach und leicht durchzuführen).

Der Strom hat also ein *magnetisches Feld* aufgebaut (siehe Kapitel „Felder und Ströme"). Nachdem es einmal aufgebaut wurde, erhält sich dieses Feld ohne Energieaufnahme.

2. *Energetische Effekte,* die mit einem Potentialabfall verbunden sind:

Thermische Effekte. Ein stromdurchflossener Leiter erwärmt sich (JOULEscher Effekt).

Chemische Effekte. Säuren, Basen und Salze werden durch elektrische Ströme zersetzt (Elektrolyse, FARADAYsche Gesetze).

Konvektionsströme

Betrachten wir auf einem Leiter oder auf einem Isolator, z.B. dem Band eines VAN-DE-GRAAF-Generators, befindliche Ladungen. Wird nun der Ladungsträger bewegt, so werden mit ihm die Ladungen bewegt, und durch die Ladungsverschiebung entsteht im Raum ein „Strom". Die Effekte in der Nähe dieses Stromes sind wahrnehmbar (magnetisches Feld, Wirkung auf eine Magnetnadel). Diese Ströme beruhen nicht auf dem Vorhandensein einer Potentialdifferenz. Die auftretenden energetischen Effekte sind durch die Bewegungsenergie möglich. Die Stärke eines solchen Stromes braucht in einem gegebenen Augenblick nicht mehr in allen betrachteten Querschnitten gleich zu sein (siehe weiteres darüber im Kapitel „Elektronen").

Konstante Ströme

Wenn man die Potentialdifferenz, die zwischen den beiden Enden eines Leiters besteht, aufrechterhält, wird der Strom dauernd fließen. Man nennt ihn Gleichstrom, wenn die Potentialdifferenz konstant ist. Zum Aufrechterhalten dieser Potentialdifferenz benutzt man die bereits betrachteten Generatoren.

Die Natur des elektrischen Stromes

Der Strom kann einer Verschiebung der Elementarladungen zugeschrieben werden, die bei einem Gleichstrom mit in jedem Querschnitt konstanter Geschwindigkeit erfolgt.

Nehmen wir an, daß alle Ladungsträger identisch seien, und betrachten z.B. freie Elektronen in einem Metall. Der Leiter liege in der x-Richtung. In dieser Richtung bewegen sich n_x Ladungsträger pro Volumeneinheit mit der gleichen Ladung e und der mittleren Geschwindigkeit V_x. Wenn F_x den Querschnitt bezeichnet, dann passieren ihn während der Zeit dt gerade $n_x F_x V_x dt$ Ladungsträger. Die Gesamtladung ist dann

$$d q_x = e n_x F_x V_x dt$$

und der Strom

$$i_x = \frac{dq_x}{dt} = e\, n_x F_x V_x .$$

Nun ist aber $i_x = i$, d.h., i ist unabhängig von x, und wir erhalten die Gesetzmäßigkeit

$$n_x F_x V_x = \text{const}$$

längs des Stromkreises.

Wenn wir p verschiedene Ladungen und Ladungsträger betrachten müssen, z. B. in Elektrolyten, wo der Ladungstransport durch verschiedene Ionen ausgeführt wird, gilt

$$F_x \sum_p e_p (n_p V_p)_x = \text{const}.$$

Diese Beziehung hat viele Konsequenzen. Wenn wir den einfachen Fall von Ladungsträgern nur einer Art betrachten und annehmen, daß $F_x = F = \text{const}$ ist, erhalten wir einfach das Gesetz

$$n_x V_x = \text{const}.$$

Um den gleichen Strom zu erhalten, kann man entweder viele Ladungsträger pro cm³ mit einer geringen Geschwindigkeit oder wenige Ladungsträger mit einer sehr großen Geschwindigkeit annehmen, da in beiden Fällen die pro Sekunde durch die Einheit des Querschnitts hindurchtretenden Ladungen gleich sind.

So ergeben 10 Elektronen mit der Geschwindigkeit 1 den gleichen Strom wie ein Elektron mit der Geschwindigkeit 10, wenn diese Elektronen plötzlich durch die nachfolgenden Elektronen, die die gleichen Geschwindigkeiten besitzen, verschoben werden. Man hat dann den *gleichen Strom*; er tritt nur in zwei *verschiedenen Arten* auf. Diese beiden Arten sind jedoch keineswegs identisch, da sie durch die kinetische Energie der Elektronen pro cm³, die in beiden Fällen verschieden ist, charakterisiert werden.

Für die 10 Elektronen ergibt sich nur der zehnte Teil der kinetischen Energie im Vergleich zu dem einen Elektron, nämlich nach dem Verhältnis

$$10 \cdot \frac{1}{2} (1)^2 = 5$$

zu

$$1 \cdot \frac{1}{2} (10)^2 = 50.$$

Bei gleichem Strom transportieren also wenige Elektronen mit großer Geschwindigkeit sehr viel mehr Energie als viele Elektronen mit geringer Geschwindigkeit.

Eine bemerkenswerte Illustration bietet sich in der Betrachtung des in einer Diode mit ebenen Elektroden fließenden Stromes: Die zwischen der Anode A und der Kathode K aufrechterhaltene Potentialdifferenz U dient zur Beschleunigung der Elektronen. Diese steigern dabei nach und nach ihre Geschwindigkeit. Ohne jetzt die Resultate einer weiter unten entwickelten Theorie vorwegzunehmen, ist es klar, daß in jedem beliebigen senkrechten Querschnitt zwischen Anode und Kathode der gleiche Strom fließt. Er wird in der Nähe der Kathode durch langsame und in der Nähe der Anode durch schnelle Elektronen aufrechterhalten. Die Zahl der Elektronen pro Kubikzentimeter ist in der Nähe der Kathode groß und nimmt zur Anode hin reziprok zur Entfernung von der Kathode ab. (Dies liegt an der größeren Geschwindigkeit, die die Elektronen beim Durchlaufen der Potentialdifferenz erhalten.) Die Anzahl der Elektronen pro Kubikzentimeter nimmt im gleichen Verhältnis ab, wie ihre Geschwindigkeit anwächst. Wir finden also aus rein kinematischen Betrachtungen, daß

$$n_x V_x = \text{const}.$$

Weiterhin stellen wir fest, daß die Elektronen an der Kathode ($x = 0$) die maximale potentielle Energie besitzen, während die kinetische Energie Null ist. Beim Erreichen der Anode A wird ihre Gesamtenergie in kinetische Energie umgewandelt sein. Wir werden diese wichtige Bemerkung weiter unten noch benutzen.

Stromrichtung

Als positive Stromrichtung definieren wir die des vom höheren zu einem tieferen Potential fließenden Stroms. Verbindet man die beiden Klemmen eines Generators mit einem Stromkreis, so fließt der Strom immer vom Minuspol zum Pluspol, da der Generator bekanntlich in der Lage ist, jede positive Ladung wieder auf ein höheres Potential zu bringen (oder eine negative Ladung auf ein tieferes Potential). Dies geschieht durch Energiezufuhr (mechanische Energie bei Maschinen oder chemische Energie bei einem galvanischen Element). Werden positive Ladungen von einem negativen Potential angezogen, so entspricht dies also ebenfalls der positiven Stromrichtung, und man findet in dem speziellen, aber sehr bedeutenden Fall der metallischen Leiter als Ladungsträger die negativ geladenen Elektronen. *Daraus folgt, daß die tatsächliche Verschiebungsrichtung der Elektronen, die den Strom hervorrufen, der üblichen Stromrichtung entgegengesetzt ist.* Auf diesen Punkt muß bei einigen Anwendungen die besondere Aufmerksamkeit gerichtet werden. Wenn es sich um mehrere Ladungsträger mit verschiedenen Vorzeichen handelt (z. B. um Ionen in einem Elektrolyten oder um Gasionen in einer schlecht evakuierten Elektronenröhre), so tragen beide Transportrichtungen zum Strom bei.

Einheiten

Die elektrostatische CGS-Einheit der Stromstärke wird durch die Ladungseinheit definiert, die aus dem COULOMBschen Gesetz abgeleitet worden ist. Der Wert der Stromstärkeneinheit beträgt $\frac{1}{3}\,10^{-9}$ Ampere.

Die elektromagnetische CGS-Einheit der Stromstärke wird durch das magnetische Feld in einer bestimmten Entfernung definiert. Die Einheit des magnetischen Feldes folgt aus dem COULOMBschen Gesetz des Magnetismus (siehe für diese Definition das Kapitel „Felder und Ströme"). Die Einheit der Stromstärke beträgt $3 \cdot 10^{10}$ elektrostatische Einheiten. Zu bemerken ist dabei, daß $3 \cdot 10^{10}$ die Lichtgeschwindigkeit c im Vakuum im CGS-System ist. MAXWELL hat einen theoretischen Ausdruck angegeben, der besagt, daß

$$c = \frac{\text{elektromagnetische Ladungseinheit}}{\text{elektrostatische Ladungseinheit}}$$

ist.

Dieses Verhältnis der Einheiten beträgt $2{,}998 \cdot 10^{10}$, wobei die letzten und genauesten Messungen der Ausbreitungsgeschwindigkeit von elektromagnetischen Wellen berücksichtigt sind.

Die praktische Einheit der Stromstärke ist das Ampere. Es wurde 1908 aus den Gesetzen der Elektrolyse definiert. Später wurde es zu genau $^1/_{10}$ einer elektromagnetischen Einheit festgesetzt. Die elektrodynamischen Messungen ergaben

derart genaue Resultate, daß diese Definition von den verschiedenen nationalen und internationalen Büros für Maße und Gewichte anerkannt wurde.

Die Definition des Coulomb ergibt sich hieraus. Es ist die Ladungsmenge, die von einem Strom von 1 A in 1 sec transportiert wird.

Dies führt uns zu der Definition der praktischen Einheit der Potentialdifferenz, dem Volt. Ein Volt ist die Potentialdifferenz, die, von einer Ladung 1 Coulomb durchfallen, eine Energie von 1 Joule liefert. 1 Joule beträgt 10^7 erg, wobei das erg bereits in der Mechanik definiert wird. Setzt man 1 Coulomb gleich 0,1 elektromagnetische Einheit oder gleich $3 \cdot 10^9$ elektrostatische Einheiten, so ergibt sich für

$$1 \text{ Volt} \begin{cases} 1/300 \text{ elektrostatische Einheit} \\ 10^8 \text{ elektromagnetische Einheiten.} \end{cases}$$

Da in beiden Maßsystemen, im elektromagnetischen und im elektrostatischen, die Einheit der Arbeit die gleiche ist, ergibt sich wieder der Wert $3 \cdot 10^{10}$ für das Verhältnis

$$\frac{\text{elektrostatische Einheit der Potentialdifferenz}}{\text{elektromagnetische Einheit der Potentialdifferenz}}.$$

II. KAPITEL

Ohmsches Gesetz. Widerstand. Joulesches Gesetz

Ohmsches Gesetz

Wir untersuchen einen von einem Strom durchflossenen Leiter. Das Experiment zeigt, daß die Potentialdifferenz zwischen zwei Punkten A und B der Stromstärke proportional ist. Dies wird durch die Beziehung

$$V_A - V_B = Ri$$

ausgedrückt.

Der Koeffizient R ist nach Definition *der elektrische Widerstand* des Leiters AB. Er charakterisiert diesen Leiter.

Widerstand

Widerstände in Reihe

Wir betrachten zwei Widerstände AB und BC, die hintereinander geschaltet sind. Sie werden beide von dem gleichen Strom i durchflossen. Das Ohmsche Gesetz ergibt

$$V_A - V_C = R_{AC}\, i.$$

Andererseits ist

$$V_A - V_C = V_A - V_B + V_B - V_C = (R_{AB} + R_{BC})\, i.$$

Folglich ist

$$R_{AC} = R_{AB} + R_{BC}.$$

Hintereinander geschaltete Widerstände addieren sich also:

$$R_{\text{ges}} = \sum_i R_i.$$

Gesetz der Stromverzweigungen

Wir wollen eine Stromverzweigung zwischen den beiden Punkten A und B (Abb. 161) behandeln. Nach dem Gesetz der Elektrizitätserhaltung ist die Gesamtstromstärke gleich der Summe der Stromstärken in den Verzweigungen:

$$i = i_1 + i_2.$$

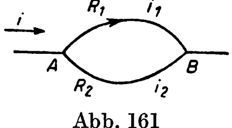


Abb. 161

Andererseits ist es für die Potentialdifferenz unwesentlich, welchen Teil der Verzweigung wir betrachten:

$$V_A - V_B = R_1 i_1 = R_2 i_2.$$

Wir suchen den Widerstand R, der dem Widerstand der Verzweigung entspricht und der, an Stelle der Verzweigung eingeführt, den Strom nicht verändert.

Es gilt

$$V_A - V_B = Ri.$$

Dies können wir auch in folgender Form schreiben:

$$\frac{i}{1/R} = \frac{i_1}{1/R_1} = \frac{i_2}{1/R_2} = \frac{i_1 + i_2}{1/R_1 + 1/R_2} = \frac{i}{1/R_1 + 1/R_2};$$

also ist

$$\frac{1}{R} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}.$$

Allgemeiner für eine Verteilung in n Zweige erhalten wir

$$\frac{1}{R} = \sum_{p=1}^{n} \frac{1}{R_p}.$$

$1/R$ wird dabei *Leitfähigkeit* eines Leiters mit dem Widerstand R genannt.

Betrachtungen über den Widerstand

Aus der Additivität der in Reihe geschalteten Widerstände folgt, daß *der Widerstand eines Leiters mit konstantem Querschnitt seiner Länge proportional ist.*

Wir wollen eine aus n identischen Leitern mit dem Widerstand R gebildete Verzweigung betrachten. Der Gesamtwiderstand dieser Verzweigung beträgt R/n. Diese n Leiter seien so miteinander verbunden, daß sie einen einzigen Leiter bilden, dessen Querschnitt jetzt das n-fache des einzelnen Leiterquerschnitts beträgt. Bei dieser Anordnung bleibt der Widerstand R/n. Damit ist gezeigt, daß *der Widerstand eines Leiters seinem Querschnitt umgekehrt proportional ist.*

Wir können also schreiben:

$$R = \varrho \frac{l}{q};$$

l ist dabei die Länge und q der Querschnitt des Leiters; ϱ stellt eine Materialkonstante dar, die man *spezifischen Widerstand* nennt.

Die praktische Einheit des Widerstandes ist das Ohm (Ω), der Widerstand eines Leiters, in dem beim Anlegen einer Potentialdifferenz von 1 V an seine Enden ein Strom von 1 Ampere fließt.

Dies können wir durch folgende Formel ausdrücken:

$$U = R \cdot I$$

oder

$$W = U \cdot I,$$

wobei W eine Leistung darstellt.

Daraus folgt

$$W = R \cdot I^2.$$

Ein Watt beträgt 10^7 erg/sec, ein Ampere 0,1 elektromagnetische CGS-Einheit. Daraus folgen für ein Ohm 10^9 elektrostatische CGS-Einheiten. Andererseits beträgt 1 Ampere $3 \cdot 10^9$ elektrostatische CGS-Einheiten, und für 1 Ω ergibt sich daraus $^1/_9 \cdot 10^{-11}$ elektromagnetische CGS-Einheit. (Zum besseren Verständnis ist es zweckmäßig, diese Betrachtungen selbst durchzuführen.)

Stellen wir diese Werte kurz in einer Tabelle zusammen:

1 Ampere, 1 Coulomb	= 0,1 elektromagn. CGS	$= 3 \cdot 10^9$ el.-st. CGS-Einh.
1 Volt	$= 10^8$ elektromagn. CGS	$= \frac{1}{300}$ el.-st. CGS-Einh.
1 Ohm	$= 10^9$ elektromagn. CGS	$= \frac{1}{9} \cdot 10^{-11}$ el.-st. CGS-Einh.

Die Einheit des Ohms erweist sich in der Elektrotechnik als sehr zweckmäßig. Die sehr große elektrostatische CGS-Einheit ist besonders für die Elektrostatik sehr geeignet, wo die zu behandelnden Widerstände im allgemeinen sehr groß sind.

Spezifischer Widerstand

Als spezifischen Widerstand eines Materials bezeichnet man den Widerstand eines Leiters von 1 cm² Querschnitt und 1 cm Länge.

Die Dimensionsgleichung des spezifischen Widerstandes lautet

$$[\varrho] = [R]\,[l].$$

Im praktischen Maßsystem ergibt sich als Dimension des spezifischen Widerstandes $\Omega \cdot$ cm.

Der spezifische Widerstand ist eine Funktion der Temperatur. Diese Abhängigkeit kann man durch eine Reihenentwicklung darstellen:

$$\varrho = \varrho_0 (1 + \alpha t + \beta t^2 + \cdots).$$

Unter ϱ_0 versteht man den spezifischen Widerstand bei 0° C. Im allgemeinen ist es ausreichend, die Temperaturabhängigkeit durch das vereinfachte lineare Gesetz

$$\varrho = \varrho_0 (1 + \alpha t)$$

auszudrücken.

ϱ_0 und α, β, ... zeigen außerdem eine geringe Abhängigkeit vom Druck. Für gewisse schlecht leitende Körper kann ϱ_0 eine starke Druckabhängigkeit zeigen. Diese Tatsache wird in der Technik, z. B. beim Kohlemikrophon, ausgenutzt. Hierbei wird die Widerstandsänderung durch Druckschwankungen hervorgerufen. Ein weiteres Anwendungsgebiet sind die durch Druck regelbaren Widerstände.

Reine Metalle

In der folgenden Tabelle wollen wir die Werte von ϱ_0 und α für einige Materialien angeben.

Metall	Aluminium	Silber	Kupfer	Eisen	Quecksilber
ϱ_0 [Ω cm]	$2{,}5$–$4{,}5 \cdot 10^{-6}$	$1{,}6 \cdot 10^{-6}$	$1{,}54 \cdot 10^{-6}$	$11 \cdot 10^{-6}$	$94{,}076 \cdot 10^{-6}$
α	$39 \cdot 10^{-4}$	$40 \cdot 10^{-4}$	$41 \cdot 10^{-4}$	$55 \cdot 10^{-4}$	$8{,}87 \cdot 10^{-4}$

Wir stellen fest, daß der Wert von α, mit Ausnahme des Quecksilbers, nur wenig differiert vom Wert $36{,}6 \cdot 10^{-4} = 1/273$, dem Wert des Koeffizienten α im idealen Gasgesetz

$$p V = p_0 V_0 (1 + \alpha t).$$

Dadurch drängt sich eine (sehr schematische) Erklärung des Widerstandes eines Metalles auf. Wir nehmen eine regelmäßige Anordnung der Atome an, zwischen denen sich die Elektronen frei bewegen. Unter dem Einfluß des elektrischen Feldes unterliegt das Gitter der freien Elektronen als Ganzes einer Translation (Abb. 162).

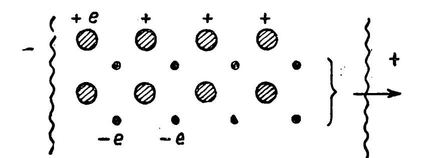


Abb. 162

Dieser Translation des Gitters der freien Elektronen wirkt nur die Molekularbewegung entgegen. Da am absoluten Nullpunkt keine Molekularbewegung vorhanden ist, müßte dort der elektrische Widerstand Null sein. Wenn die Temperatur anwächst, stellt die thermische Bewegung eine der absoluten Temperatur proportionale Energie dar:

$$T = t + 273 = 273 \left(1 + \frac{t}{273}\right).$$

Der elektrische Widerstand muß danach ebenfalls der absoluten Temperatur proportional sein. Entsprechende Experimente stehen in guter Übereinstimmung mit dieser Annahme.

Beim Quecksilber, das von unseren Betrachtungen eine Ausnahme bildet, kann man keine regelmäßige Atomanordnung voraussetzen, da es flüssig ist. Auch sein Koeffizient differiert sehr stark.

Legierungen

Bei Legierungen kann die Annahme der regelmäßigen Atomanordnung nicht aufrechterhalten werden, da es sich um Atome verschiedener Art handelt. Der spezifische Widerstand von Legierungen ist höher, aber wenig temperaturabhängig.

Legierung		ϱ_0 [Ω cm]	α
Eisen-Nickel	(74% Fe, 25% Ni, 1% C)	$80 \cdot 10^{-6}$	$9 \cdot 10^{-4}$
Neusilber	(60% Cu, 25% Zn, 15% Ni)	$30 \cdot 10^{-6}$	$3{,}6 \cdot 10^{-4}$
Manganin	(86% Cu, 12% Mn, 2% Ni)	$42 \cdot 10^{-6}$	$0{,}1 \cdot 10^{-4}$
Konstantan	(60% Cu, 40% Ni)	$49 \cdot 10^{-6}$	$\pm 0{,}1 \cdot 10^{-4}$

Der Widerstand der beiden ersten Legierungen verändert sich wenig mit der Temperatur; die Legierungen sind daher gut zur Konstruktion von Rheostaten geeignet. Bei den beiden anderen Legierungen ist der Widerstand praktisch temperaturunabhängig; sie eignen sich daher gut für Normalwiderstände und Widerstandsbrücken.

Metalloide

Retortenkohle, wie sie z. B. als Lichtbogenelektroden verwendet wird, besitzt einen spezifischen Widerstand von

$$\varrho = 7 \cdot 10^{-2}\ \Omega\ \text{cm}.$$

Elektrolyte

NaCl in gesättigter Lösung hat einen spezifischen Widerstand von $\varrho = 5{,}5 \cdot 10^{-2}$; für H_2SO_4 bei 22° C und der Konzentration 1 : 12 ist $\varrho = 3{,}3\ \Omega$ cm.

Dielektrika

Bei anwachsender Temperatur nimmt der spezifische Widerstand ab:

$$\begin{array}{ll} \text{Glas bei } 200°\,\text{C} & \varrho = 2{,}27 \cdot 10^{7}\ \Omega\ \text{cm} \\ \text{Glas bei } 400°\,\text{C} & \varrho = 7{,}34 \cdot 10^{4}\ \Omega\ \text{cm} \\ \text{Guttapercha} & \varrho = 3{,}0\ \cdot 10^{14}\ \Omega\ \text{cm}. \end{array}$$

Anomalien des spezifischen Widerstandes

1. *Bei hohen Temperaturen steigt der spezifische Widerstand wegen seiner Proportionalität zur absoluten Temperatur sehr stark an.*

Betrachten wir z. B. den Wolframdraht einer Röhre, der eine Temperatur von etwa 2500° C besitzt. Das Verhältnis des Widerstandes bei dieser Temperatur zu seinem Widerstand bei Zimmertemperatur hat den Wert

$$\frac{R_{2500}}{R_0} = \frac{2800}{300} \approx 9.$$

Durchgeführte Experimente ergeben Resultate in dieser Größenordnung.

Glühbirnen werden daher zur Regulierung der Heizstromstärke eines Verbrauchers verwendet. Wir schalten dazu die Lampe in Reihe. Wenn nun die Heizspannung ansteigt, wird auch der Strom ansteigen. Der Heizdraht erwärmt sich, bekommt einen höheren Widerstand, und die Stromstärke erreicht einen Wert in der Nähe der ursprünglichen Stromstärke oder steigt wenigstens langsamer an als die Spannung.

Oft werden zur Regulierung von Stromstärken Eisenwasserstoffwiderstände verwendet. Diese bestehen aus eisernen Heizdrähten in einer Wasserstoffatmosphäre (Abb. 163).

Bringt man Eisen auf eine Temperatur von 775° C, so tritt eine kristalline Umwandlung auf, die mit einem plötzlichen Anwachsen des Widerstandes verbunden ist.

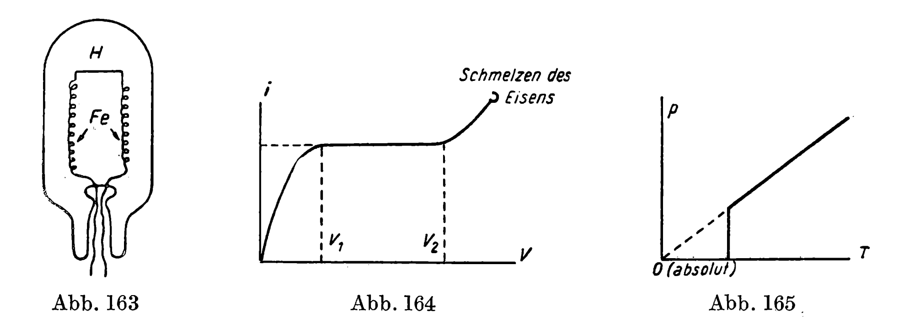


Abb. 163 Abb. 164 Abb. 165

Bei Spannungen kleiner als V_1 tritt wegen der guten Wärmeleitfähigkeit des Wasserstoffs in einem weiten Spannungsbereich an den Klemmen eine Instabilität auf, die nicht näher erörtert werden soll. Nur der obere Teil des Drahtes wird rotglühend. Wenn die Spannung zwischen V_1 und V_2 variiert, verändert sich die Länge des Eisendrahtes, die rotglühend ist, ohne daß sich die Stromstärke I verändert. Wir erhalten also eine Charakteristik, wie sie in Abb. 164 dargestellt ist. Zur Stabilisation einer Stromstärke in Abhängigkeit von Spannungsveränderungen schaltet man einen Eisenwasserstoffwiderstand in Reihe.

2. *Supraleitung.* Unsere Betrachtungen haben ergeben, daß der spezifische Widerstand eines Metalls in der Nähe des absoluten Nullpunktes gegen Null gehen müßte. Die Veränderungen des spezifischen Widerstandes wurden bei immer tieferen Temperaturen untersucht (KAMERLINGH ONNES 1911). Eine Temperatur von 14° K erreichte man in flüssigem Wasserstoff, 5° K in flüssigem Helium und 1,5° K in flüssigem Helium bei niedrigem Druck; 0,01° K wurde durch adiabatische Entmagnetisierung eines paramagnetischen Salzes erreicht. 1950 gelang es auf letztere Art, eine Temperatur von 0,001° K zu erreichen.

Bei diesen Untersuchungen wurde festgestellt, daß bei bestimmten Substanzen der spezifische Widerstand nicht stetig mit der Temperatur abnimmt, sondern bei einer bestimmten Temperatur plötzlich auf einen nicht mehr meßbaren Wert abfällt. Diese Erscheinung nennt man Supraleitung.

Im folgenden haben wir für einige Metalle die Temperaturen, bei denen die Supraleitung einsetzt, angeführt:

Blei	7,2 °K
Zinn	3,78° K
Aluminium	1,14° K
Zink	0,79° K
Cadmium	0,60° K

Es ist noch nicht gelungen, bei Gold und Wismut Supraleitung nachzuweisen, obgleich einige ihrer Legierungen dieses Phänomen zeigen.

Die höchste Temperatur, bei der eine Supraleitung eintritt, beträgt etwa 14° K, und zwar ist dies der Fall beim Nitrid des Niobiums. Kein anderer Körper ist bei höheren Temperaturen supraleitend.

Ein Strom in einer Windung aus supraleitendem Metall benötigt eine sehr lange Zeit, um durch Verluste zu verschwinden. Die Zeitkonstante L/R ist also sehr groß ($R \to 0$). Ein entsprechender Versuch wurde von KAMERLINGH ONNES durchgeführt. Er ließ in einer Schleife aus Bleidraht eine halbe Stunde lang einen Strom von 320 Ampere fließen und stellte fest, daß er sich nach dieser Zeit um weniger als $^1/_{100}$ seines Wertes verringert hatte. Diesen Ringstrom hatte er durch Verschiebung eines Magneten, d.h. durch Veränderung des Kraftflusses, erzeugt.

Die Supraleitung wird durch mechanische Bearbeitung des Materials und durch die Wirkung von Magnetfeldern beeinflußt. So wird z.B. Blei in einem Magnetfeld von 800 Gauß erst bei 1,8° K supraleitend. Da der Strom ein Magnetfeld aufbaut, das auf den Supraleiter einwirkt, erhält man einen oberen Grenzwert des Stromes, für den ein gegebenes Metall gerade noch Supraleitung zeigt.

Experiment von Tolman und Stewart

Wenn man annimmt, daß die Ladungsträger im metallischen Leiter die Elektronen sind, kann man auf dieser Grundlage Theorien entwickeln, deren Resultate sich durch die Experimente gut bestätigen lassen. Trotzdem ist es interessant, direkt zu zeigen, daß der Ladungstransport von Elektronen ausgeführt wird.

Zur Durchführung dieses Beweises haben TOLMAN und STEWART eine Spule mit vielen Windungen in schnelle Rotation um ihre Achse versetzt und sie dann plötzlich arretiert. Jedes Elektron versucht dann, seine Bewegung fortzusetzen. An den Klemmen der Spule muß also eine bestimmte Spannung auftreten, die man durch Einschalten eines Galvanometers in den Stromkreis feststellen kann.

γ sei die Beschleunigung des Elektrons im Augenblick der Arretierung, d.h. eine Größe, die durch die Arretierung der Spule hervorgerufen wird. Das elektrische Feld hat einen Wert U/l, wobei U die an den Klemmen der Spule auftretende Spannung und l die Länge einer Windung sind. Wenn man mit m die Elektronenmasse und mit e seine Ladung bezeichnet, dann lautet das Grundprinzip der Dynamik

$$m\gamma = \frac{U}{l}\,e.$$

Der Wert von $\frac{e}{m}$, den man auf diese Art erhält, liegt in der Größenordnung von $1{,}60 \cdot 10^7$ elektromagnetischen CGS-Einheiten, eines Wertes also, der durch andere, genauere Methoden bestätigt wurde.

Halbleiter

Halbleiter nennt man Körper, deren spezifischer Widerstand in der Größenordnung zwischen 200 und 0,005 Ω cm liegt und die sich von den gebräuchlichen Metallen dadurch unterscheiden, daß ihr spezifischer Widerstand nach dem Gesetz $\varrho = \varrho_0 e^{b/T}$ sehr stark bei anwachsender Temperatur abnimmt. (Wir haben also in diesen Fällen einen negativen Temperaturkoeffizienten.) Halbleiter kann man z.B. herstellen, wenn man Fe_3O_4 mit anderen Metalloxyden der Form XY_2O_4, wobei X und Y Metalle sind, vermischt. So erhält man z. B. bei einem Gemisch von Fe_3O_4 und $MgCr_2O_4$ einen spezifischen Widerstand zwischen 100 und 1000 Ω cm bei Zimmertemperatur. Dieses Gemisch wird industriell verwendet. Bei einer Temperaturerhöhung um 30° C kann der Widerstand auf ein Drittel seines ursprünglichen Wertes abnehmen. Diese wichtige Eigenschaft ist von großem industriellem Interesse, besonders beim Bau von Bolometern. (In den Laboratorien der Bell Telephone wurden in den Jahren 1945–1946 Spezialbolometer, sogenannte Thermistore, entwickelt. Diese beruhen auf der Verwendung von Substanzen mit sehr hohem Temperaturkoeffizienten des Widerstandes.) Die Erklärung des elektrischen Widerstandes und der Zusammensetzung der Halbleiter beruht auf der Annahme, daß sich nur eine geringe Anzahl n der insgesamt N Elektronen im freien Zustand befindet und den Stromtransport bewirkt. Durch die Bewegung der n Elektronen befinden sich im Kristallgitter Löcher. Der Ladungstransport im Material beruht jetzt auf einer Wechselwirkung zwischen den Elektronen und den Löchern und läßt sich durch folgendes Massenwirkungsgesetz darstellen:

$$\frac{n n}{N - n} = e^{-\frac{\varepsilon}{k T}},$$

wobei $n \ll N$ ist. ε ist die Aktivierungsenergie zur Überführung eines Elektrons aus dem gebundenen in den freien Zustand. Folglich ist $n^2 = N e^{-\varepsilon/k T}$, und der spezifische Widerstand $\varrho = \frac{1}{n}$ erhält den Wert $\varrho_0 e^{\varepsilon/k T}$. Wir haben also wieder die Form des oben angegebenen Gesetzes, wobei $b = \varepsilon/k$ zu setzen ist. Die so gefundenen Zahlenwerte für die Aktivierungsenergie sind durchaus annehmbar.

Andererseits gibt es Halbleiter, für die eine Umkehrung des eben Gesagten gilt. In diesen Halbleitern *fehlen* von vornherein Elektronen, d.h., es sind Löcher vorhanden, denen man eine positive Ladung zuschreiben kann. Diese Löcher können sich von Atom zu Atom durch den Kristall bewegen. Man erhält so eine Leitfähigkeit, für die Gesetze gleicher Art gelten.

Überschußelektronen bzw. Löcher sind keine natürlichen Eigenschaften der Körper, sondern beruhen auf irgendwelchen geringfügigen Verunreinigungen, deren Einfluß mit steigender Temperatur zunimmt.

Eine allgemein gültige Regel sagt aus, daß in den Halbleitern auch Gleichrichtungs- oder Photoleitfähigkeitseffekte auftreten. (Siehe auch die entsprechenden Kapitel).

So zeigen z.B. die Halbleiter Silizium und Germanium Gleichrichtereffekte, während Selen und Bleisulfid Photoleiter sind.

JOULEsches Gesetz

Wir wollen einen Metalldraht mit nahezu konstantem Querschnitt betrachten. Das OHMsche Gesetz gibt uns den Ausdruck für die Spannung an den Enden zu

$$V_A - V_B = Ri.$$

(Es handelt sich hier selbstverständlich um einen Gleichstrom.)

Die elektrische Energie beim Durchgang einer Elektrizitätsmenge Q von A nach B beträgt

$$W = Q(V_A - V_B).$$

Da

$$Q = it$$

ist, können wir auch

$$W = Ri^2t$$

schreiben.

Das JOULEsche Gesetz sagt nun aus, *daß diese Energie vollständig in Wärme umgesetzt wird.* Wenn Q die freiwerdende Wärmemenge und J das mechanische Wärmeäquivalent bedeuten, erhalten wir

$$Q = \frac{1}{J} Ri^2t.$$

Für einen veränderlichen Strom gilt entsprechend

$$Q = \frac{R}{J} \int_0^t i^2 dt.$$

Anwendungen des JOULEschen Effektes

1. *Messung des mechanischen Wärmeäquivalents*

Zu einer solchen Messung taucht man einen Widerstand in ein Kalorimeter. Dann mißt man während einer bestimmten Zeit die Spannung an den Klemmen sowie den Strom und die freiwerdende Wärmemenge. Dies ist eine der genauesten Methoden.

2. *Praktische Anwendungen*

Im allgemeinen macht sich der JOULEsche Effekt, außer bei elektrischen Heizöfen und Kochplatten, unliebsam bemerkbar. Es ist also zweckmäßig, die Stromdichte in den Leitern zu begrenzen, um eine unerwünschte Erwärmung zu verhindern. Diese vom theoretischen Standpunkt aus allerdings nicht befriedigende

Betrachtungsweise liefert wenigstens einfache Sicherheitsregeln für Anwendungsgebiete, bei denen die Stromstärken keinen großen Schwankungen unterworfen sind.

Bei Dynamoankern (der Anker ist der Rotor) kann man wegen der günstigen Luftkühlung eine Stromstärke von 4 A/mm², beim Stator dagegen nur 2 A/mm² zulassen.

Anker von Generatoren, wie sie in Flugzeugen benutzt werden, können mit einer Stromstärke von 10 A/mm² belastet werden, da diese Belastung diskontinuierlich und nur kurzzeitig auftritt.

a) *Heizung.* Es ist nötig, als Widerstände solche Leiter zu benutzen, die wenig oxydieren und einen hohen mechanischen Widerstand plötzlichen und schnellen Veränderungen der Temperatur gegenüber haben (Dilatation).

Man benutzt dafür speziell zwei Legierungen, die im folgenden angegeben seien:

80% Ni, 20% Cr,

20% Fe, 15% Cr, 65% Ni.

Steht kein Nickel zur Verfügung, kann man auch die folgende wenig oxydierende, aber nicht ganz so widerstandsfähige Legierung verwenden:

4% Al, 18–20% Cr, 76% Fe.

Abb. 166

b) *Hitzdraht-Amperemeter* (Abb. 166). Die Erwärmung eines Leiters ist immer mit seiner Verlängerung verbunden. Mit Hilfe einer Feder wird diese Ausdehnung auf einen Zeiger übertragen, der fest mit dem beweglichen System verbunden ist. Der Zeigerausschlag ist zu i^2 proportional. Diese Apparate sind für schwache Stromstärken wenig empfindlich. Die in der Praxis verwendeten Instrumente benötigen eine Energie von etwa 0,5 Watt. Sie weisen einige Nachteile auf, z.B. ihre Trägheit und ihr Versagen bei Stromstärken, die den Draht zum Schmelzen bringen. Um eine bleibende Dilatation zu vermeiden, benutzt man meistens eine Platin-Silber-Legierung. Eine Schraube gestattet die Nullpunktseinstellung.

Heute verwendet man vervollkommnetere thermische Amperemeter, in denen der erwärmte Draht seinerseits die Lötstelle eines Thermoelements erwärmt. Der im Thermoelement hervorgerufene Strom wird jetzt in einem Galvanometer mit beweglichem Rahmen gemessen. Diese Amperemeter sind sehr viel empfindlicher und stabiler. Der Widerstandsdraht braucht nicht auf sehr hohe Temperaturen gebracht zu werden, und ein Schmelzen des Drahtes ist weniger zu befürchten.

c) *Widerstandsthermometer, Bolometer und Hitzdraht-Anemometer.* Wir wollen zuerst das Prinzip eines Widerstandsthermometers erläutern. Wir benutzen eine WHEATSTONEsche Brücke mit drei regelbaren genau bekannten Widerständen. Der vierte Widerstand besteht aus einem metallischen Draht, dessen Widerstand R als Funktion der Temperatur bekannt ist. Dieser Draht wird auf die zu messende Temperatur gebracht, die Brücke abgeglichen, und von dem so gemessenen Widerstand R_T kann auf die Temperatur rückgeschlossen werden.

Der Vorteil dieses Thermometers, das eine geringe Größe aufweisen kann, besteht darin, daß es gestattet, die Temperatur eines Werkstückes Punkt für Punkt auszumessen. (Im Besonderen ist es gut zur Untersuchung der Wärmekonvektion geeignet.)

Abb. 167

Das *Bolometer* beruht auf dem gleichen Prinzip und ist zur Messung des Wärmeflusses bei Strahlungen verwendbar.

Das Hitzdraht-Anemometer ist ebenfalls ein solches Thermometer. Die Temperatur des Widerstandes R erhöht sich durch den Jouleschen Effekt. Der Widerstand gibt seine Wärme durch Konvektion ab; die Brücke befindet sich im Gleichgewicht. Man bringt den Draht R in einen Gasstrom, dessen Geschwindigkeit gemessen werden soll. Dadurch kühlt sich der Draht ab, und die Brücke muß erneut abgeglichen werden. Aus dem Wert von R kann man auf die Temperatur des Drahtes schließen. Kennt man die Temperatur des Drahtes, der sich nicht im Gasstrom befindet, so erhält man die Geschwindigkeit des Gasstromes.

Das Hitzdraht-Anemometer gestattet örtliche Untersuchungen der Strömungsgeschwindigkeiten von Flüssigkeiten. Im besonderen verwendet man es zur Messung der Strömungsgeschwindigkeit an den Tragflächen eines Flugzeuges.

III. KAPITEL

Elektromotorische Kraft. Elektromotorische Gegenkraft. Kirchhoffsche Gesetze

Wir wollen uns hier darauf beschränken, eine energetische Definition ohne detaillierte Untersuchungen anzugeben.

Elektromotorische Kraft eines Generators

Betrachten wir einen Stromkreis, der nur aus Ohmschen Widerständen besteht und an den Klemmen eines Generators liegt (Abb. 168).

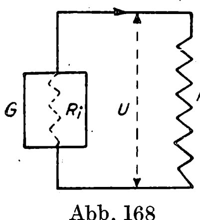


Abb. 168

In diesem Kreis wird Energie verbraucht, die offensichtlich vom Generator geliefert wird. Wenn wir mit W die Leistung des Generators und mit i die Stromstärke bezeichnen, können wir

$$W = Ei$$

schreiben. E ist dabei nach Definition die *elektromotorische Kraft* des Generators. Die praktische Bedeutung dieses Begriffs liegt in der für viele Generatoren in einem gewissen Maß vorhandenen Unabhängigkeit der Definition von E von dem Strom. Mit U wollen wir die Spannung an den Klemmen des Generators bezeichnen. Die im äußeren Kreis verbrauchte Leistung beträgt $U \cdot i$ und ist nicht gleich der Leistung W des Generators. Der Generator besitzt einen Innenwider-

stand R_i, und man erhält $W = U \cdot i + R_i \cdot i^2$. Dies könnte man leicht nachprüfen, wenn man G und R zusammen, dann R allein in ein Kalorimeter taucht. Nun ist $W = E \cdot i$, und nach Division durch i erhalten wir

$$U = E - R_i i.$$

Die Potentialdifferenz an den Klemmen eines belasteten Generators ist immer kleiner als seine elektromotorische Kraft und entspricht dem OHMschen Abfall, der beim Fluß des Stromes i in einem dem inneren Widerstand des Generators gleichen Widerstand auftritt. Diese Betrachtungen führen uns zum *elektrischen Wirkungsgrad* η des Generators:

$$\eta = \frac{U i}{E i} = \frac{E - R_i i}{E}.$$

Weiterhin muß evtl. der Wirkungsgrad der Anordnung berechnet werden, die die elektrische Energie erzeugt (z.B. der Wirkungsgrad einer Dampfmaschine, die einen Dynamo antreibt). Die Beziehung $U = E - R_i \cdot i$ kann als eine Verallgemeinerung des OHMschen Gesetzes angesehen werden.

Im allgemeinen kürzt man elektromotorische Kraft durch die Buchstaben *EMK* ab.

Gegen-EMK eines Verbrauchers

Wir wollen einen Stromkreis betrachten, der einen Generator und einen Verbraucher enthält. In der Abb. 169 ist der Verbraucher durch einen Elektromotor gegeben, während die elektromotorische Kraft des Generators durch zwei sich schneidende Kreise symbolisiert wird.

Wir wollen mit W die *mechanische* Leistung des Motors bezeichnen, von der der größte Teil nach außen abgegeben, während ein geringer Teil durch mechanische Reibung verbraucht wird. Nun kann man das *elektrische Äquivalent* des Motors betrachten. Bedeutet i die Stromstärke, dann gilt

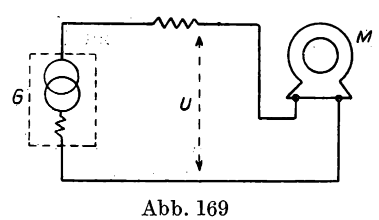


Abb. 169

$$W = e \cdot i,$$

wobei e nach Definition die *Gegen-EMK* des Motors ist. Die praktische Bedeutung dieses Begriffs liegt darin, daß für viele Motorentypen das so definierte e nahezu unabhängig von i ist.

U sei die Spannung an den Klemmen des von uns betrachteten Motors. Die elektrische Leistung, die vom Motor verbraucht wird, beträgt $U \cdot i$, wobei jetzt nicht $U i = W$ gilt, da der Widerstand R_M des Motors berücksichtigt werden muß:

$$U \cdot i = W + R_M i^2.$$

Nach Division durch i erhalten wir nun den Ausdruck

$$U = e + R_M \cdot i,$$

der ebenfalls eine Verallgemeinerung des OHMschen Gesetzes darstellt.

Der Wirkungsgrad, den wir bei der Umwandlung elektrischer Leistung in mechanische Leistung (vom elektrischen Standpunkt aus betrachtet) erreichen können, ist dann

$$\frac{e \cdot i}{U \cdot i} = \frac{e}{e + R_M \cdot i}.$$

Weiterhin gibt es einen mechanischen Wirkungsgrad, bei dem die Reibungsverluste berücksichtigt werden. Die beiden Verallgemeinerungen des OHMschen Gesetzes, die wir eben gefunden haben, gestatten uns, die Probleme der Stromverteilung auch in einem Leitersystem zu behandeln, das sowohl Generatoren als auch Verbraucher enthält.

Um die oben abgeleiteten Beziehungen richtig verstehen und anwenden zu können, ist es wichtig, über den Mechanismus der verschiedenen Motoren und Generatoren unterrichtet zu sein.

Betrachten wir z.B. einen Nebenschlußmotor. Dabei tritt im Erregungskreis eine gewisse Leistung auf, die zu der Leistung der Maschine in keiner Beziehung steht. Diese Leistung im Erregungskreis erscheint in einem zum Hauptkreis parallelen Stromkreis. Es ist also notwendig, folgendes zu entscheiden: Berücksichtigt man den Strom im Nebenkreis bei der Berechnung des Wirkungsgrades oder nicht?

Wir wollen nun einen durch eine Bremse blockierten Motor betrachten. Er leistet keine Arbeit, e ist also Null, und der fließende Strom ist durch $U = R_M i$ gegeben. Dieser selbe Motor leistet immer noch keine Arbeit, wenn er leer läuft. Das führt wieder zu der Annahme, daß $e = 0$ ist. Die Lösung des Problems hat jedoch eine andere Form: $e = E$ und $i = \frac{E - e}{R_M} = 0$. Es wird keine Leistung abgegeben, da der Motor gerade die Geschwindigkeit annimmt, die notwendig ist, damit wegen der elektromotorischen Gegenspannung kein Strom fließt.

Energiebetrachtungen

Ein Generator G erzeugt zwischen seinen Klemmen A und B eine Potentialdifferenz. Wir wollen ihn nun durch praktisch widerstandslose Drähte mit den Klemmen C und D eines Widerstandes R verbinden. Dabei fließt ein Strom, und der Widerstand erwärmt sich. Zwischen B und D fließt *der gleiche* Elektronenstrom wie zwischen C und A. Die zwischen B und D befindlichen Elektronen besitzen jedoch eine zusätzliche Energie, die sie im Widerstand R verlieren. Wenn der Strom zwischen C und A von der gleichen Art wie zwischen B und C ist, müßte er in beiden Fällen automatisch die gleiche Energie transportieren. Wir können also sicher sein, daß diese Energie im Widerstand verlorenging.

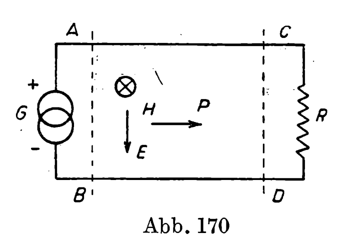


Abb. 170

1. Man kann einfach sagen: Die von B ausgehenden Elektronen besitzen eine potentielle Energie, die sich zwischen D und C in Wärme umsetzt. Dadurch wird jedoch nichts über den Transportmechanismus dieser potentiellen Energie zwischen B und D ausgesagt.

2. Eine weitere Ansicht (siehe weiter unten, „MAXWELLsche Theorie") ist die folgende: Der Draht zwischen A und C befindet sich auf einem höheren Potential als der zwischen B und D. Es existiert ein *elektrisches* Feld zwischen den beiden Drähten, das in der Pfeilrichtung der Abbildung verläuft. Durch den Strom wird ein *Magnetfeld* aufgebaut, das eine zur Abbildungsebene senkrechte Komponente besitzt, die von vorn nach hinten gerichtet ist. So ergibt sich ein *POYNTINGscher Vektor* $\mathfrak{P}$, der die Energie von links nach rechts transportiert. Dies stimmt zwar; aber diese Erklärung zeigt doch nur, daß man eine zusammenhängende Theorie aufstellen kann, die nur die Felder berücksichtigt und die Ladungen völlig vernachlässigt (MAXWELL, FARADAY). Diese Theorie erklärt jedoch nicht den Mechanismus, nach dem der Energietransport durch die Ladungen vor sich geht. Durch die Annahme, daß die Energie im Dielektrikum *lokalisiert* sei, kompliziert man diese Frage nur. Der *Transport* der Energie darf nicht unberücksichtigt bleiben.

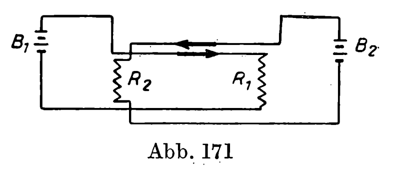


Abb. 171

Wenn man nun diese Theorie auf den in Abb. 171 dargestellten Fall überträgt (B_1 erwärmt R_1, und B_2 erwärmt R_2), findet man, daß der POYNTINGsche Vektor im Bereich zwischen R_1 und R_2 verschwindet und daß die Batterie B_1 den Widerstand R_2 und die Batterie B_2 den Widerstand R_1 heizt.

3. Die weiter oben gemachten Bemerkungen über die kinematische Beschaffenheit des Stromes, die auf die Formel $i = n_x V_x$ führten, zeigten uns, daß es sehr wohl möglich ist, die Energie in rein kinetische Form umzuwandeln. Es genügt, dabei

$$n_{BD} < n_{CA} \quad \text{und} \quad V_{BD} > V_{CA}$$

vorauszusetzen (wie es in der Abb. 172 durch zwei Dreiecke mit der Grundfläche n und der Höhe V auf den Drähten BD und CA in Richtung des Elektronendurchganges dargestellt ist), um für die transportierte Energie $\left(\frac{n V^2}{2}\right)$ in BD einen größeren Wert als in CA zu erhalten. Die pro cm³ zwischen B und D enthaltenen schnellen Elektronen wirken durch Stöße auf die Atome von R ein. (Der Widerstand erwärmt sich.) Die Größe des Impulses bleibt erhalten. Er verteilt sich auf die Anordnung von mehr Elektronen pro cm³ mit kleinerer Geschwindigkeit zwischen C und A.

Diese Erklärung ist vollständig einleuchtend, wenn man annehmen kann, daß in den Leitern BD und CA keine Verluste auftreten. Dieser Annahme steht nichts weiter entgegen.

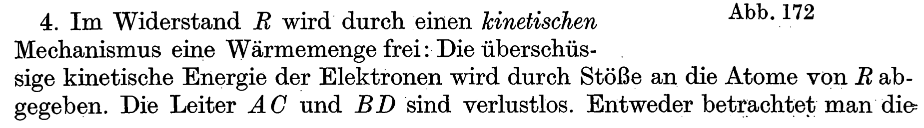


Abb. 172

4. Im Widerstand R wird durch einen *kinetischen* Mechanismus eine Wärmemenge frei: Die überschüssige kinetische Energie der Elektronen wird durch Stöße an die Atome von R abgegeben. Die Leiter AC und BD sind verlustlos. Entweder betrachtet man die

Drähte als Teil von R, dann muß der Generator eine in kinetischer Form zwischen A und B auftretende Energie aufbringen, oder man betrachtet die Drähte als Teil des Generators G, dann gibt der Generator eine potentielle Energie ab, die sich nur im Bereich zwischen C und D in kinetische Energie umwandelt.

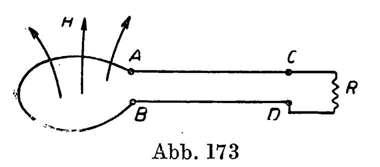


Abb. 173

5. Wir wollen nun die Wirkungsweise eines *Generators* betrachten:

Die elektromotorische Kraft eines *Elementes* oder eines *Akkumulators* ist eine Erfahrungstatsache, über deren Mechanismus uns nicht allzuviel bekannt ist. Wir wissen nicht, ob eine chemische Reaktion Elektronen mit einer großen Anfangsgeschwindigkeit befreit oder ob die durch die chemische Reaktion befreiten Elektronen eine potentielle Energie durch die Abstoßung der anderen Elektronen erhalten. Da die elektromotorische Kraft für einen geschlossenen Stromkreis die gleiche wie für einen offenen Stromkreis ist, sind wir sicher, daß die augenblickliche mikroskopische Umwandlung einer Energieform in eine andere möglich ist. Die potentielle Energie nimmt übrigens ebenso plötzlich wieder die chemische Form an.

Betrachten wir jetzt einen *elektrodynamischen Generator* (Abb. 173). Durch eine einfache leitende Schleife $A\,B$ tritt ein proportional der Zeit anwachsendes Magnetfeld H, dessen Fluß durch die Schleife wir mit Φ bezeichnen wollen. Dadurch wird eine elektromotorische Kraft $E = e = -\dfrac{\partial \Phi}{\partial t} = \text{const}$ erzeugt, die alle Leitungselektronen beim Durchgang zwischen A und B beschleunigt. Wir können also sagen, daß ein solcher Generator seine kinetische Energie einem Elektronenstrom übermittelt, der zwischen B und D abfließt. Infolgedessen ist es gleich, ob wir einen offenen oder einen *geschlossenen* Kreis betrachten. Zwischen A und B tritt eine „Potentialdifferenz“ e auf. Wir haben dort eine plötzliche Umwandlung einer Energieform in eine andere.

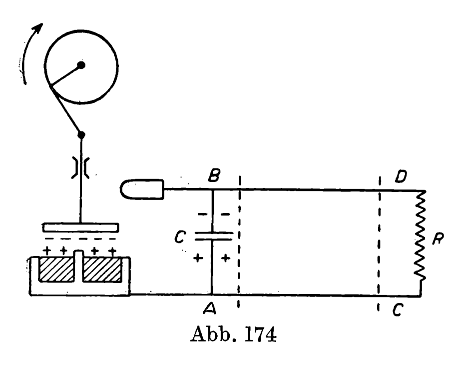


Abb. 174

Die *elektrostatischen Generatoren* erzeugen elektrische Energie in potentieller Form. In Abb. 174 ist eine solche Maschine schematisch dargestellt. Mit Hilfe einer mit einem Handgriff versehenen Scheibe wird eine periodische Bewegung auf den Ladungsträger eines Elektrophors übertragen. Die abgehobenen elektrischen Ladungen erhalten auf Kosten der mechanischen Arbeit der Maschine ein höheres Potential. Über einen Kontakt wird der Kondensator C aufgeladen.

In einer solchen Maschine nehmen die Ladungen Energie auf, ohne daß dabei Geschwindigkeiten auftreten, einfach durch die gegenseitige Abstoßung einer großen Anzahl ähnlicher Ladungen, die man auf die zu kleinen Elektroden von C aufbringt. Die Klemmen A und B des Kondensators werden nun mit den Klem-

men C und D des Widerstandes R verbunden. Der Kondensator entlädt sich über den Widerstand, und die Elektronen geben dabei ihre überschüssige Energie ab, wie es vorher betrachtet wurde. Wenn man annimmt, daß der *elektrostatische* Druck den Mechanismus bildet, der einem den Kondensator C verlassenden Elektron kinetische Energie aufzunehmen gestattet, dann muß man auch annehmen, daß sich dieser elektrostatische Druck bis an die Klemme C ausdehnt, da sich der gesamte Leiter AC auf dem Potential von A befindet.

6. Diese Überlegungen führen uns zu dem Schluß, daß der auf einem hohen Potential liegende Leiter AC ebensogut einen Strom der gleichen Energieform wie der auf einem niedrigeren Potential liegende Leiter BD führen kann. Der elektrostatische Druck ist weiterhin in der Lage, den Austritt von Elektronen dieses Leiters AC mit einer zusätzlichen kinetischen Energie – die ihrer potentiellen Energie entspricht – zu veranlassen.

7. Bei der Verwendung von reversiblen Verbrauchern wird man zu entsprechenden Betrachtungen geführt.

Aus dem Vorstehenden folgt, daß in jedem Generator, in jedem Verbraucher und überhaupt in jedem Leiter ein mikroskopischer Mechanismus existiert, der sich elektrischer Ladungsträger bedient und die unmittelbare Umwandlung von kinetischer in potentielle Energie, und umgekehrt, gestattet. Diese Tatsache berechtigt uns, von der elektrischen Energie und ihrer Umwandlung in andere Formen zu sprechen.

Kirchhoffsche Regeln

Wir wollen ein elektrisches Netzwerk betrachten. Die Anwendung des verallgemeinerten Ohmschen Gesetzes unter Berücksichtigung des Elektrizitätserhaltungsprinzips auf jeden Leiter (siehe: Gesetz der Stromverzweigungen) gestattet die Berechnung der Spannungs- und der Stromverteilungen im Gitter. Diese Berechnung ist oft recht kompliziert. Man kann sie mit Hilfe der Kirchhoffschen Regeln durchführen, die wir jetzt hier angeben wollen.

Erste Kirchhoffsche Regel

Knoten- oder *Verzweigungspunkt* eines Gitters nennt man eine Stelle, an der mehrere Leiter zusammenstoßen. Nach dem Prinzip der Elektrizitätserhaltung ist die Summe der zu dem Verzweigungspunkt fließenden Ströme gleich der Summe der abfließenden Ströme (Abb. 175):

$$i_2 + i_3 = i_1 + i_4 + i_5 .$$

Abb. 175

Wir wollen nun die zu- und abfließenden Ströme durch verschiedene Vorzeichen unterscheiden. Bezeichnen wir die zum Verzweigungspunkt fließenden Ströme durch ein Pluszeichen, die abfließenden durch ein Minuszeichen, dann hat die erste Kirchhoffsche Regel die folgende Form

$$\Sigma i = 0$$

für jeden Verzweigungspunkt.

Zweite KIRCHHOFF*sche Regel*

Wir wollen nun eine *Masche*, d. h. eine bestimmte Anzahl von Leitern, betrachten, die ein geschlossenes Polygon bilden. Dabei legen wir willkürlich eine Umlaufsrichtung fest.

Wir bezeichnen mit i_k den entsprechenden Wert der Stromstärke im Leiter k und mit U_k die Spannung an den Enden dieses Leiters. (Dies gestattet uns, in der allgemeinen Theorie auf die Zusammensetzung des Teiles k des Kreises nicht einzugehen.) Wir erhalten dann

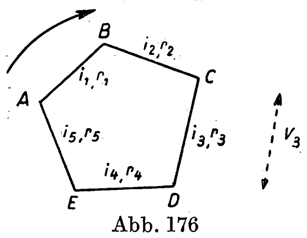


Abb. 176

$$U_k = E_k - R_k i_k - e_k,$$

wobei E_k die elektromotorische Kraft des Generators und e_k die Gegen-EMK des mit dem Widerstand R_k in Reihe geschalteten Verbrauchers ist.

Wir wollen nun die Potentialdifferenz zwischen A und C auf zwei verschiedene Arten ausdrücken und die beiden erhaltenen Ausdrücke gleichsetzen:

$$U_A - U_C = U_1 + U_2,$$

$$U_A - U_C = -(U_5 + U_4 + U_3)$$

(aus Gründen der Orientierung unserer Masche).

Es ergibt sich also daraus

$$U_1 + U_2 + U_3 + U_4 + U_5 = 0.$$

Die zweite KIRCHHOFFsche Regel lautet dann

$$\Sigma U = 0$$

für eine Masche.

Beispiel

Zeigen wir nun an einem Beispiel, wie man diese beiden KIRCHHOFFschen Regeln anwenden kann.

Wir betrachten ein aus 6 identischen Quadraten gebildetes Netz, in dem jede Seite den gleichen Widerstand R hat, und lassen zwischen zwei entgegengesetzten Ecken des Rechtecks A und B einen Strom fließen. Wir wollen nun den Widerstand eines solchen Netzes berechnen.

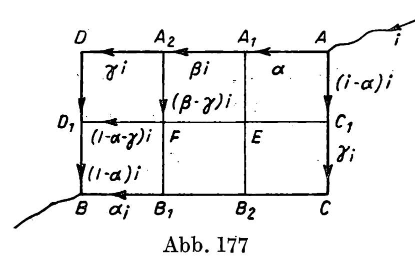


Abb. 177

Der Strom I erreicht im Punkt A unser Gitter und erleidet hier eine Verzweigung. Setzen wir jetzt den zwischen A und A_1 fließenden Strom gleich αI, dann wird der zwischen A und C_1 fließende Strom entsprechend $(1 - \alpha)I$ sein.

Weiterhin setzen wir den Bruchteil des Gesamtstromes, der zwischen A_1 und A_2 fließt, gleich βI und den im Leiter A_1E fließenden Strom gleich $(\alpha - \beta)I$.

Mit γI bezeichnen wir den Strom, der im Zweig C fließt, und mit $(\beta - \gamma)I$ den zwischen A_2 und F fließenden Strom.

Wir stellen fest, daß das System vom elektrischen Standpunkt aus eine Symmetrie für die von A nach B fließenden Ströme besitzt: So ist z. B. die zwischen B und B_1 fließende Stromstärke αI usw. Zwischen C_1 und E bzw. zwischen F und D_1 hat sie den Wert $(1 - \alpha - \gamma)I$.

Die Anwendung der ersten KIRCHHOFFschen Regel gestattet uns also, fast das gesamte System zu definieren. Jetzt muß nur noch mit Hilfe von α, β und γ die Stromstärke im mittleren Leiter EF ausgedrückt werden.

Wir wollen annehmen, dieser Wert sei $X \cdot I$. Die Anwendung der ersten KIRCHHOFFschen Regel für den Verzweigungspunkt E ergibt

$$X + (\beta - \gamma) = \alpha - \beta + 1 - \alpha - \gamma,$$

$$X = 1 - 2\beta.$$

Es ist uns also gelungen, mit Hilfe der drei Parameter α, β und γ das gesamte Netz zu definieren. Nun wollen wir drei Gleichungen aufstellen, um die Werte von α, β und γ zu bestimmen.

Für die Netzmasche AA_1EC_1 ergibt sich nach Division durch $R \cdot I$

$$\alpha + (\alpha - \beta) - (1 - \alpha - \gamma) - (1 - \alpha) = 0.$$

Dies ist

$$4\alpha - \beta + \gamma - 2 = 0.$$

Für die Netzmasche A_1A_2FE gilt entsprechend

$$\beta + (\beta - \gamma) - (1 - 2\beta) - (\alpha - \beta) = 0;$$

also

$$-\alpha + 5\beta - \gamma - 1 = 0,$$

und schließlich für die Masche A_2DD_1F

$$2\gamma - (1 - \alpha - \gamma) - (\beta - \gamma) = 0;$$

also

$$\alpha - \beta + 4\gamma - 1 = 0.$$

Für α, β und γ erhalten wir also das folgende Gleichungssystem:

$$4\alpha - \beta + \gamma - 2 = 0,$$

$$-\alpha + 5\beta - \gamma - 1 = 0,$$

$$\alpha - \beta + 4\gamma - 1 = 0,$$

und daraus folgt

$$\alpha = \frac{37}{69}; \quad \beta = \frac{8}{23}; \quad \gamma = \frac{14}{69}.$$

Der Gesamtwiderstand R_{ges} des Systems ist besonders einfach zu berechnen.

Wir können schreiben:

$$U_A - U_B = R_{\text{ges}} \cdot I.$$

Da auf dem Weg ADB

$$U_A - U_B = [\alpha + \beta + 2\gamma + (1 - \alpha)]\, R I = [\beta + 2\gamma + 1]\, R I$$

gilt, ist R_{Ges} gegeben durch

$$R_{\text{ges}} = (\beta + 2\gamma + 1)\, R = \frac{121}{69}\, R = 1{,}753 \ldots R,$$

wobei R der Widerstand eines Leiters ist.

Durch eine Annäherung ist es möglich, die Größenordnung des Gesamtwiderstandes schnell abzuschätzen. Welchen Weg zwischen A und B man auch betrachtet, die Potentialabnahme erfolgt doch ungefähr gleichmäßig. Wir können also in grober Annäherung sagen, daß der Spannungsabfall zwischen A und B eine solche Form hat, daß die Äquipotentiallinien parallel zu den Diagonalen unserer Quadrate in der Abb. 178 verlaufen. Zwischen zwei aufeinanderfolgenden Diagonalen ist der Potentialabfall immer der gleiche. Es genügt, den jedem Teil des Gitters – verstanden zwischen zwei Diagonalen – äquivalenten Widerstand zu berechnen und die so erhaltenen Resultate zu addieren.

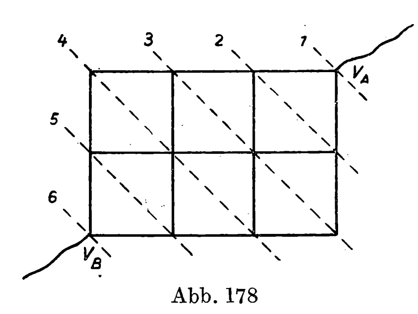


Abb. 178

Zwischen 1 und 2 sowie zwischen 5 und 6 beträgt der Widerstand $\frac{R}{2}$; zwischen 2 und 3 sowie 4 und 5 beträgt er $\frac{R}{4}$ und zwischen 3 und 4 endlich $\frac{R}{5}$.

Wir erhalten also

$$R = 2 \cdot \frac{R}{2} + 2 \cdot \frac{R}{4} + \frac{R}{5} = \frac{119}{70}\, R \approx \frac{121}{69}\, R.$$

Es ist immer zweckmäßig, vor der komplizierten Berechnung des Gesamtwiderstandes diese Überschlagsrechnung durchzuführen.

IV. KAPITEL

Ströme in dreidimensionalen Leitern

Wir wollen nun Leiter mit drei Dimensionen betrachten, d.h. Leiter, die keine Drahtform besitzen. In der Elektrostatik haben wir gesehen, daß sich ein Leiter im Gleichgewicht befindet, wenn das Feld in seinem Inneren Null ist oder, was das gleiche ist, wenn alle seine Punkte auf dem gleichen Potential liegen. Ist dies nicht der Fall, so tritt eine Elektrizitätsverschiebung, d.h. ein elektrischer Strom, auf.

Mit $\mathfrak{i}$ bezeichnen wir die *Stromdichte* in einem bestimmten Punkt, d. h. den Vektor, der tangential zur Stromrichtung in diesem Punkt verläuft. Er besitzt die Richtung des Stromes und gibt die Elektrizitätsmenge an, die in der Zeiteinheit durch die zur Stromrichtung senkrechte Flächeneinheit hindurchfließt. Nach einem von OHM aufgestellten Gesetz (das unmittelbar aus der Elektronentheorie folgt) ist $\mathfrak{i}$ proportional dem elektrischen Feld $\mathfrak{E}$:

$$\mathfrak{i} = \sigma \mathfrak{E}.$$

Dabei ist σ eine Konstante, die vom Material des Leiters abhängt und die als *Leitfähigkeit* des Materials bezeichnet wird.

Weiter nehmen wir an, daß das elektrische Feld $\mathfrak{E}$ nach dem COULOMBschen Gesetz aus der Verteilung der elektrischen Ladungen im Leiter und im Raum in einem bestimmten Augenblick resultiert. Dieses Feld rührt also her von einem Potential V:

$$\mathfrak{E} = -\operatorname{grad} V.$$

Dies beweist uns, daß die Stromlinien senkrecht auf den Äquipotentialflächen stehen und daß weiterhin

$$\mathfrak{i} = -\sigma \frac{dV}{d\mathfrak{n}}$$

Abb. 179

gilt. Dabei ist $\frac{dV}{d\mathfrak{n}}$ die Ableitung nach der Normalen auf die Äquipotentialfläche. Jetzt wollen wir die Gesamtstromstärke I durch die Äquipotentialfläche F (Abb. 179) betrachten. Dabei erhalten wir

$$i = \frac{I}{F} = \sigma \left| \frac{\partial V}{\partial n} \right|$$

und folglich

$$|dV| = \frac{1}{\sigma} I \frac{dn}{F}.$$

Andererseits ist nach dem OHMschen Gesetz

$$dV = \varrho I \frac{dn}{F}.$$

Dies führt uns zu der Beziehung $\sigma = 1/\varrho$. Die Leitfähigkeit ist also das Reziproke des spezifischen Widerstandes.

Nun gibt es aber bei kontinuierlichem Fluß keine Ladungsansammlungen, d. h., die in ein Volumenelement eintretende ist gleich der im gleichen Zeitintervall austretenden Elektrizitätsmenge. Anders ausgedrückt, der Fluß des Vektors $\mathfrak{i}$ durch eine geschlossene Fläche ist Null. Es handelt sich also um ein *konservatives* System. Dies führt uns (siehe Elektrostatik) zu dem Ausdruck

$$\operatorname{div} \mathfrak{i} = 0$$

und

$$\operatorname{div} \mathfrak{E} = -\Delta V = 0.$$

Nach dem POISSONschen Theorem ist die Ladungsdichte pro Volumeneinheit Null.

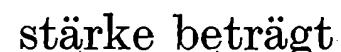
Berechnung des Widerstandes eines isotropen und homogenen Leiters

Die wichtigste Folgerung aus der oben abgeleiteten Theorie ist die Gleichung

$$\Delta V = 0.$$

Diese Gleichung beweist uns, daß die Lösung eines elektrokinetischen Problems mit der eines elektrostatischen Problems übereinstimmt, wobei im elektrostatischen Fall $\mathfrak{i}$ durch das Feld $\mathfrak{E}$ ersetzt wird.

Wir wollen nun zwei Elektroden mit den Potentialen V_1 und V_2 betrachten und den Widerstand der von ihnen eingeschlossenen Materie berechnen (Abb. 180). Die Gesamtstromstärke beträgt



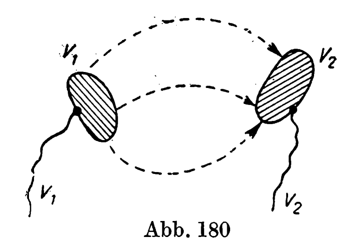


Abb. 180

$$I = \iint i dF = -\frac{1}{\varrho}\iint \frac{\partial V}{\partial n} dF.$$

Die Doppelintegrale sind über den Querschnitt einer Äquipotentialfläche zu erstrecken. Nun gilt

$$I = \frac{V_1 - V_2}{R};$$

R ist dabei der gesuchte Widerstand.

Das gleiche elektrostatische Problem gibt uns für die Ladung einer Elektrode die Gleichung

$$Q = \frac{1}{4\pi}\iint E dF = -\frac{1}{4\pi}\iint \frac{\partial V}{\partial n} dF$$

und die Beziehung

$$Q = C(V_1 - V_2),$$

wobei C die Kapazität des entstandenen Kondensators ist. Zur Vereinfachung setzen wir nun $E = i$.

Aus den obigen Gleichungen folgt also, daß

$$4\pi Q = \varrho I$$

und

$$\frac{1}{V_1 - V_2} = \frac{C}{Q} = \frac{1}{RI} = \frac{4\pi C}{\varrho I}$$

ist. Es ergibt sich also

$$R = \frac{\varrho}{4\pi C}.$$

Diese Formel können wir nun auf ein System anwenden, dessen Kapazität wir bereits kennen.

Betrachten wir z.B. ein Überseekabel. Der Radius des Leiters sei R_1, der der Isolation R_2 (Abb. 181). Der einem Verluststrom durch die Isolation entgegenwirkende Widerstand beträgt pro Längeneinheit

$$R = \frac{\varrho}{2\pi} \cdot \ln\frac{R_2}{R_1},$$

wenn ϱ der spezifische Widerstand des Isolators ist. (Die Berechnung der Kapazität wurde in der Elektrostatik angegeben.)

Nun wollen wir zwei nichtisolierte Kabel mit den Radien R_1 und R_2 betrachten, deren Abstand D beträgt (Abb. 182). Der Verlustwiderstand pro Längeneinheit ist, wenn ϱ diesmal der spezifische Widerstand des Mediums ist, gegeben durch

$$R = \frac{\varrho}{2\pi} \ln \frac{D^2}{R_2 \cdot R_1}.$$

Ebenso erhält man für den Gesamtwiderstand zweier Kugeln mit den Radien R_1 und R_2, die sich im Abstand D voneinander befinden,

$$R = \frac{\varrho}{4\pi}\left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} - \frac{2}{D}\right).$$

(Die Kapazitätsberechnung ist sehr leicht durchzuführen, wenn man $D \gg R_1$, R_2 annimmt. Zu bemerken ist noch, daß R konstant, wenn D sehr groß, der Gesamtwiderstand ist also in der Nähe der Kugeln lokalisiert.)

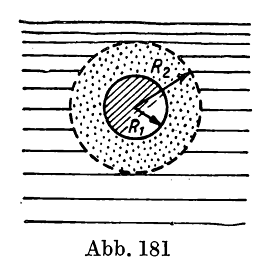


Abb. 181

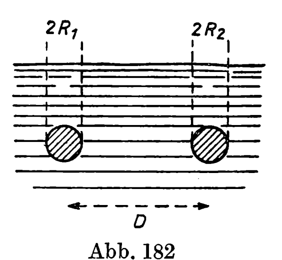


Abb. 182

Schließlich wollen wir noch einen Leiter mit dem Querschnitt F betrachten. Aus diesem Leiter schneiden wir ein kleines Stück der Länge l heraus. Der so gebildete Kondensator besitzt im Vakuum eine Kapazität von

$$C = \frac{F}{4\pi l}.$$

Für den Widerstand zwischen beiden Schnittflächen folgt dann

$$R = \frac{\varrho}{4\pi C} = \frac{\varrho \cdot l}{F}.$$

Wir haben also die Elementarform des OHMschen Gesetzes in einem Leiter gut bestätigt gefunden.

Technische Anwendungen

1. *Elektrolytischer Trog.* In Elektrolyten ist die experimentelle Bestimmung der Äquipotentialflächen sehr einfach. Dazu wird mit einem Voltmeter nur die Potentialdifferenz zwischen zwei Punkten in der Lösung gemessen.

Wenn man nun eine Lösung des elektrodynamischen Problems erhält, ist diese auch für ein elektrostatisches Problem gültig und noch allgemeiner für jedes Problem, bei dem es sich um ein LAPLACEsches Feld handelt (d.h. in jedem Fall, für den $\Delta V = 0$ erfüllt ist). Wir beschränken uns also auf eine Präzisierung des bereits Gesagten.

Im besonderen verwendet man diese Methode zur Untersuchung der Profile von Flugzeugtragflächen. Dazu bringt man das zu untersuchende Profil zwischen zwei planparallele Elektroden. Die elektrischen Äquipotentialflächen stimmen mit den Stromfäden der Luft um diesen Tragflügel überein, wenn man diesen entsprechend der Zirkulation auf ein bestimmtes Potential legt (Abb. 183).

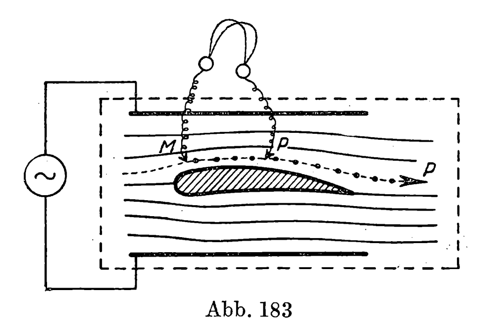


Abb. 183

Um hinreichende Genauigkeit zu erreichen, speist man die Kondensatorplatten A und B mit niederfrequentem Wechselstrom. Nun bringt man zwei kleine metallische Kugeln M und P, die über einen Telephonhörer miteinander verbunden sind, in die Nähe des zu untersuchenden Profils. Die Kugel M läßt man fest und verschiebt die Kugel P so lange, bis kein Ton im Kopfhörer mehr auftritt. Dann verschiebt man P längs der Äquipotentialfläche MP. Auf diese Art kann man alle Äquipotentialflächen feststellen.

2. *Räumen von Magnetminen.* Das dabei zu lösende Problem ist die Zündung der Magnetminen, die im allgemeinen bereits bei einer Veränderung der Vertikalkomponente des Erdfeldes um 0,05–0,1 Gauß reagieren. Um solche Veränderungen hervorzurufen, genügt meist bereits das Vorüberfahren eines eisernen Schiffes in einer Entfernung von 20 m. Ein Minenräumboot D (aus Holz, also nichtmagnetisch) kann ohne Gefahr direkt über die Mine M fahren. Es zieht zwei isolierte Kabel mit den Elektroden A und B, die mit dem Meerwasser in Kontakt stehen. Von einem Dynamo fließt ein Strom in dem aus den Kabeln und dem Meerwasser gebildeten Stromkreis. Da die beiden Kabel zwischen D und B von dem Strom in umgekehrter Richtung durchflossen werden, entsteht zwischen ihnen kein magnetisches Feld. Zwischen B und A entsteht infolge der Stromverteilung jedoch ein bedeutendes Magnetfeld. Daraus folgen verschiedene Probleme bei der Berechnung des Stromes und des Feldes. Auf unserer Abbildung (Abb. 184) würde die Mine beispielsweise explodieren, wenn sie sich im Punkt H befände.

3. *Elektrische Bodenuntersuchungen.* In ein Terrain werden zwei Elektroden A und B versenkt. Der Widerstand zwischen beiden hängt dann von der Art des

Erdbodens ab. Man kann die besser leitenden Erdschichten feststellen, indem man zwei Elektroden C und D symmetrisch zu AB anbringt und an A und B eine Spannung legt. Nun wird beobachtet, ob – und wenn, in welcher Richtung –

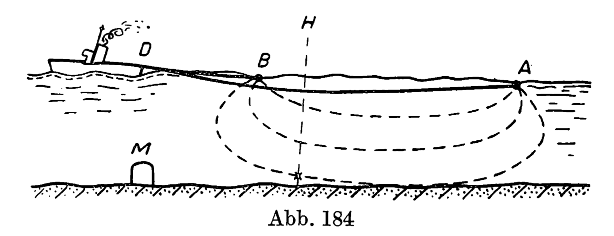


Abb. 184

zwischen C und D eine Potentialdifferenz auftritt. Die Lösung dieses Problems erfordert in der Praxis einen ziemlichen mathematischen Aufwand.

In ein vertikales Bohrloch, wie es z.B. bei der Petroleumsuche gebohrt wird, senkt man eine Anordnung aus Meßelektroden und Elektroden, an denen eine

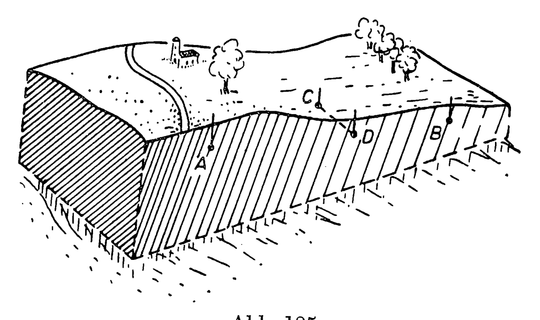


Abb. 185

Spannung liegt, in die Tiefe der aufeinanderfolgenden mehr oder weniger leitenden Schichten. Salzwassergetränkter Boden ist leicht festzustellen und weist oft auf in der Nähe befindliche Petroleumlager hin.

Diese Methoden, die zuerst von C. Schlumberger benutzt wurden, sind heute allgemein gebräuchlich.

Einige Werte des spezifischen Widerstandes des Erdbodens in Ω cm

Kupfer	$= 1{,}7 \cdot 10^{-6}$
Meerwasser	$= 26$
Süßwasser	$= 2{,}3 \cdot 10^{5}$
Nasser Sand	$= 10^{7}$
Trockner Sand	$= 10^{8}$
Ackerboden	$= 1–3 \cdot 10^{5}$

4. *Erdung von Antennen.* Bei Lang- und Mittelwellen stehen die Sendeantennen mit der Erde in Verbindung, und die radioelektrischen Ströme werden über den

Erdwiderstand zu geschlossenen Stromkreisen. Das Hauptproblem ist nun, den Widerstand möglichst herabzusetzen, um Material und Kosten zu sparen. Häufig erweisen sich Gittererder als vorteilhaft. Durch den Erdwiderstand werden im allgemeinen auch die Reichweiten von Amateursendern begrenzt.

5. *Elektrischer Stuhl.* Legt man eine Spannung von 2000 V über große Elektroden an die Haut eines zum Tode Verurteilten, so erfolgt, wenn die Haut feucht genug ist, so daß kein großer Übergangswiderstand auftritt, der Tod des Delinquenten bereits nach 1 bis 2 Sekunden.

Unter Umständen wirken bereits 110 Volt tödlich. Steht z.B. ein Mensch in einer mit Wasser gefüllten Badewanne und berührt mit der Hand einen *schlecht isolierten* Schalter oder ein schadhaftes elektrisches Gerät, so verkrampft sich durch den elektrischen Schlag seine Hand und bleibt fest an dem stromführenden Leiter haften. Auf dieser Tatsache beruhen eine ganze Reihe tödlicher Unfälle.

In Fabrikräumen, in denen mit elektrischem Strom gearbeitet wird, werden aus diesem Grunde wegen der Feuchtigkeit des Bodens beispielsweise Isolierplatten verlegt und Gummihandschuhe usw. getragen.

ELEKTRODYNAMIK

I. KAPITEL

Magnetfeld eines Stromes

Magnetfeld eines Leiters

Das Experiment zeigt, daß ein elektrischer Strom in seiner Nähe ein Magnetfeld erzeugt (Versuche von OERSTED 1820).

Dieses Magnetfeld kann man z.B. mit Eisenfeilspänen nachweisen (beliebtes Vorlesungsexperiment).

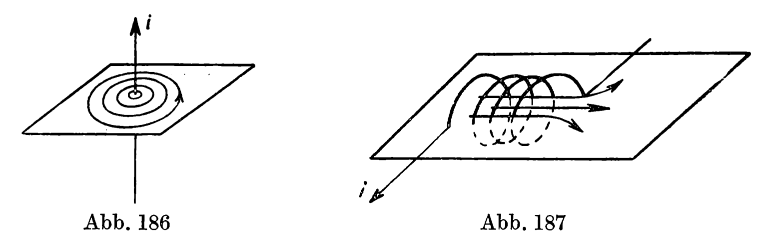


Abb. 186 Abb. 187

Benutzt man einen genügend langen geradlinigen Leiter, so kann man feststellen, daß die magnetischen Kraftlinien die Form konzentrischer Kreise um den Leiter herum haben (Abb. 186).

Untersucht man das Magnetfeld einer stromdurchflossenen Spule, so sieht man, daß die Kraftlinien des Magnetfeldes im Innern der Spule parallel zueinander verlaufen (Abb. 187). Dies gilt besonders für eine lange Spule.

Um uns nun der Untersuchung dieses durch einen elektrischen Strom aufgebauten Magnetfeldes zuwenden zu können, führen wir zuerst einige vorbereitende Überlegungen der Vektoranalysis durch.

Rotation

In der Ebene stimmt der positive Rotationssinn mit dem trigonometrischen überein (er verläuft also umgekehrt zum Uhrzeigersinn).

Im Raum kann man eine Rotation durch einen Vektor darstellen. Dieser Vektor ist so definiert, daß ein Beobachter, wenn er sich mit seinen Füßen im Ursprung und mit seinem Kopf am Ende des Vektors befindet, die Rotation von rechts nach links verlaufen sieht. Dies entspricht also *für ihn* dem trigonometrischen Sinn.

Diese Stellung des Beobachters wurde von AMPÈRE definiert (Abb. 188). Die positive Richtung können wir noch auf folgende Weise definieren: Der eben angegebene Beobachter habe unter seinen Füßen ein großes Stück Papier zu liegen und sehe beim Hinunterschauen einen Pfeil umgekehrt zum Uhrzeigersinn rotieren.

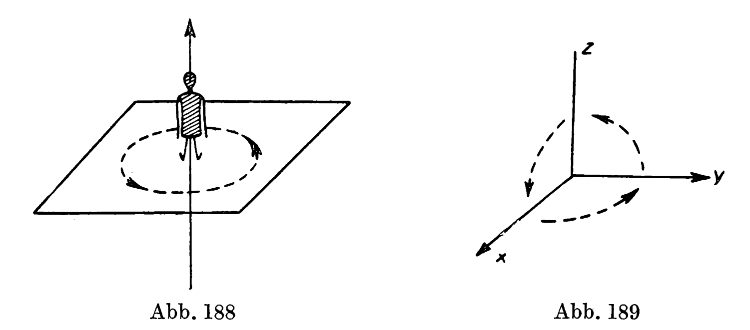


Abb. 188 Abb. 189

Betrachten wir nun (Abb. 189) ein Koordinatensystem xyz. Wenn die Rotation eines solchen Systems so verläuft, daß eine Achse jeweils den Platz der nächstfolgenden einnimmt, dann verläuft diese für den sich auf der dritten Achse befindenden Beobachter im positiven Sinn. Dieses Koordinatensystem nennt man *direkt* oder *linksdrehend*.

Im folgenden wollen wir grundsätzlich linksdrehende Koordinatensysteme verwenden.

Rotation eines Vektors

Rotation eines Vektors $\mathfrak{A}$ nennt man den Vektor mit den Komponenten

$$\operatorname{rot}_x \mathfrak{A} = \frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z},$$

$$\operatorname{rot}_y \mathfrak{A} = \frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x},$$

$$\operatorname{rot}_z \mathfrak{A} = \frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y}.$$

A_x, A_y, A_z sind dabei die Komponenten von $\mathfrak{A}$. Diesen Vektor stellt man durch den Ausdruck

$$\operatorname{rot} \mathfrak{A}$$

dar.

Die Orientierung des Koordinatensystems beeinflußt das Vorzeichen der Komponenten dieses Vektors. Auch die Definition, die wir gegeben haben, ist nur für linksdrehende Koordinatensysteme gültig. Die Rotation hat einen physikalischen Sinn. (Wenn $\mathfrak{A}$ die Geschwindigkeit einer Flüssigkeit im Punkt M ist, dann ist rot $\mathfrak{A}$ die hydrodynamische Turbulenz und stellt die Rotation der Flüssigkeitspartikeln im Punkt M dar.) Diese Definition muß entsprechend verändert werden, wenn man ein rechtsdrehendes Koordinatensystem

benutzt. (Dabei verändern sich die Vorzeichen der zweiten Glieder in den drei oben angegebenen Gleichungen.)

Stokes scher Satz

Längs einer geschlossenen Kurve C ist die Zirkulation des Vektors $\mathfrak{A}$ gleich dem Rotationsfluß durch eine beliebige von der Kurve C umrandete Fläche F.

$$\int_C \mathfrak{A}\, d\mathfrak{s} = \iint_F \operatorname{rot} \mathfrak{A}\, d\mathfrak{f}.$$

Der positive Sinn der Normalen ist durch unsere oben angegebene Regel bestimmt, wobei bei der Berechnung von

$$\int_C \mathfrak{A}\, d\mathfrak{s}$$

von dem für den Kreis vereinbarten Umlaufssinn ausgegangen wird.

Wir wollen hier nicht die Ableitung des Stokesschen Satzes behandeln, sondern uns auf die Angabe der Bedingungen beschränken, die die obige Formulierung erlauben.

Wenn also (C) die geschlossene Kurve (Abb. 190) und der angenommene Umlaufssinn auf ihr durch den Pfeil P charakterisiert ist, dann wächst das Bogenstück s an; die Elemente ds sind positiv, wenn man in Pfeilrichtung fortschreitet.

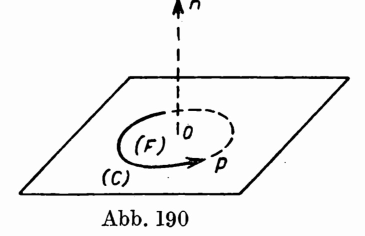
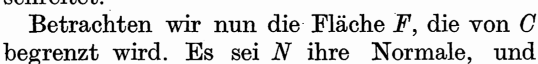


Abb. 190



Betrachten wir nun die Fläche F, die von C begrenzt wird. Es sei N ihre Normale, und ihr positiver Sinn sei der des Pfeiles $\overrightarrow{ON}$. Ein Beobachter auf dem Vektor $\overrightarrow{ON}$ sieht den Pfeil P eine für ihn positive Drehrichtung beschreiben.

Wir können weiterhin feststellen: Wenn ein Beobachter auf einem Element von C in der gleichen Richtung wie P liegt, dann ist der positive Rotationssinn für ihn die Richtung von $\overrightarrow{ON}$. Man kann natürlich den ursprünglichen Umlaufssinn von (C) umkehren, indem man dem Pfeil P die entgegengesetzte Richtung zuschreibt; entsprechend ändert sich dann die Richtung von $\overrightarrow{ON}$ in $\overrightarrow{NO}$.

Für alle Punkte von C, für die der Vektor $\mathfrak{A}$ mit dem auf ds liegenden Pfeil P einen spitzen Winkel bildet, ist das Produkt $A\,ds$ im Integral $\int_C A\,ds$ positiv. Desgleichen ist für alle Elemente dF, für die der Vektor rot $\mathfrak{A}$ (der z. B. durch seine drei Komponenten im linksdrehenden Koordinatensystem definiert ist) mit der Richtung von $\overrightarrow{ON}$ einen spitzen Winkel bildet, das Produkt $A\,dF$ im Flächenintegral positiv.

Genauso gut können wir unsere Kurve auch von der anderen Seite betrachten, d. h., wir wollen unsere Fläche F auf der Abb. 190 von unten betrachten. Wenn wir jetzt aus Bequemlichkeitsgründen den Umlaufssinn von P verändern, dann verändert sich nach der Beobachterregel auch der Richtungssinn der Normalen $\overrightarrow{ON}$.

Der Vektor $\mathfrak{A}$ und seine Rotation haben ihre Orientierung im Raum nicht verändert, alle positiven Elemente des Integrals $\int\limits_C \mathfrak{A}\, d\mathfrak{s}$ werden negativ und umgekehrt. Das Gesamtintegral verändert sein Vorzeichen. Das gleiche tritt nach der AMPÈREschen Regel für das Doppelintegral

$$\iint\limits_F \operatorname{rot} \mathfrak{A}\, d\mathfrak{F}$$

ein.

Um den STOKESschen Satz in einer algebraischen Form darstellen zu können, ist es nötig, daß der Umlaufssinn auf (C) und die Richtung der Normalen auf (F) miteinander verknüpft sind. (Eins von beiden kann willkürlich gewählt werden.) Wenn wir den STOKESschen Satz in der am Anfang dieses Abschnittes angegebenen Form schreiben wollen, muß die Verknüpfung zwischen beiden nach der AMPÈREschen Beobachterregel gewährleistet sein.

Durch ein Stromelement erzeugtes Magnetfeld

Wir wollen gleich zu Anfang bemerken, daß das von uns im folgenden abgeleitete Gesetz keinen physikalischen Sinn hat, da es unmöglich ist, ein Stromelement und das entsprechende von ihm erzeugte Magnetfeld zu isolieren. Dieses Gesetz darf nur als ein Kunstgriff angesehen werden, der uns erlaubt, durch Integration das von einem Stromkreis aufgebaute Magnetfeld zu berechnen. Wenn das erhaltene Resultat mit den experimentellen Ergebnissen übereinstimmt, kann das Gesetz als gültig angesehen werden. Es wird also erst durch seine Konsequenzen bestätigt.

LAPLACEsches Gesetz: *Das von einem vom Strom i durchflossenen Leiterelement der Länge dl in einem Punkt M, der sich in der Entfernung r von dl befindet, aufgebaute Magnetfeld hat in einem kohärenten elektromagnetischen System den Wert*

$$dH = \frac{i\,dl \cdot \sin\alpha}{r^2},$$

wenn α der Winkel zwischen r und dl ist.

Dieses Elementarfeld steht senkrecht auf der durch das Element dl und den Punkt M definierten Ebene und ist für den den Punkt M betrachtenden Beobachter nach links gerichtet. Auf der Abb. 191 ist das Feld durch einen nach hinten verlaufenden Pfeil dargestellt.

Abb. 191

Setzt man, wie in der letzten Formel bereits angeführt wurde, den auftretenden numerischen Koeffizienten gleich 1, so wird durch das LAPLACEsche Gesetz die elektromagnetische CGS-Einheit der Stromstärke durch cm und Oersted definiert. Diese Einheit beträgt nach der heutigen Definition des Amperes gerade 10 Ampere.

Benutzt man kein kohärentes System, dann muß eine Konstante A eingeführt werden:

$$dH = \frac{i}{A}\,\frac{dl \cdot \sin\alpha}{r^2}.$$

Im praktischen Maßsystem wird als Einheit des magnetischen Feldes das Oersted (dessen Wert mit dem des Gauß übereinstimmt), d. h. die elektromagnetische CGS-Einheit, benutzt. Als Einheit der Stromstärke wählt man 1 Ampere, d. h. $^1/_{10}$ elektromagnetische CGS-Einheit. Daraus ergibt sich für i der 10fache Wert und die Notwendigkeit, $A = 10$ zu setzen:

$$dH = \frac{i}{10}\,\frac{dl \cdot \sin\alpha}{r^2}\,.$$

Wenn man für die Einheit der Feldstärke das Oersted und für i elektrostatische Einheiten verwendet, muß $A = 3 \cdot 10^{10}$ gesetzt werden.

Man kann das LAPLACEsche Gesetz in einfacherer Form darstellen, wenn man dH als Vektor schreibt. Tatsächlich ist der Vektor $d\mathfrak{H}$ bis auf den Faktor i das Vektorprodukt des in Stromrichtung verlaufenden Vektors $d\mathfrak{l}$ mit dem Vektor $\frac{\mathfrak{r}}{r^3}$. Letzterer hat die Richtung von $\mathfrak{r}$ und die Größe $\frac{1}{r^2}$, d. h.

$$d\mathfrak{H} = i\,d\mathfrak{l} \times \frac{\mathfrak{r}}{r^3}\,.$$

Beim Vektorprodukt ist auf die Reihenfolge der Faktoren zu achten.

Diese Formel, die ohne numerischen Faktor in jedem kohärenten Maßsystem gültig ist, gestattet z. B., die elektrostatische Einheit des Magnetfeldes zu definieren.

Die elektrostatische CGS-Einheit der Stromstärke beträgt $\frac{1}{3 \cdot 10^{10}}$ elektromagnetische CGS-Einheiten und die elektrostatische CGS-Einheit des Magnetfeldes $\frac{1}{3 \cdot 10^{10}}$ Gauß.

Mit Hilfe des LAPLACEschen Gesetzes werden wir jetzt verschiedene einfache Felder berechnen, wobei wir immer kohärente Einheiten verwenden, z. B. elektromagnetische CGS-Einheiten.

Magnetfeld eines unendlich langen, geraden Leiters

Wir wissen sehr wohl, daß ein solcher Strom tatsächlich nicht zu realisieren ist. Trotzdem können wir bei einem Experiment annehmen, daß es sich um einen solchen Strom handelt, wenn die Entfernung des Punktes, in dem man das Feld des Leiters mißt, klein gegen die Länge des geradlinigen Leiterabschnittes ist und wenn der restliche Kreis nur vernachlässigbare Wirkungen ausübt.

Die im Punkt M von den verschiedenen Leiterelementen aufgebauten Felder haben alle die gleiche Richtung. Es genügt also, sie skalar zu addieren.

Das Längenelement dl, das durch Θ und ϱ definiert ist, ruft in M ein Feld

$$dH = i\,\frac{dl\,\cos\Theta}{\varrho^2}$$

hervor.

Nun ist

$$\Theta = \alpha - \frac{\pi}{2}, \quad \varrho = \frac{r}{\cos\Theta}$$

und

$$l = r \cdot \operatorname{tg}\Theta, \quad dl = \frac{r \cdot d\Theta}{\cos^2\Theta}.$$

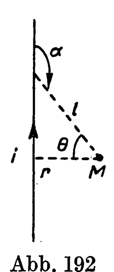


Abb. 192

Also ist

$$dH = i\,\frac{\cos\Theta}{r}\,d\Theta$$

und

$$H = \int_{-\pi/2}^{+\pi/2} \frac{i}{r}\cos\Theta\,d\Theta.$$

Daraus erhalten wir

$$H = \frac{2i}{r}.$$

Dieses Resultat wird *Biot-Savartsches Gesetz* genannt.

Magnetfeld eines geknickten Stromleiters

Wir werden jetzt das in einem Punkt M auf der Verlängerung der Halbierenden des Winkels α erzeugte Feld berechnen. Der Winkel α wird von den beiden geradlinigen Teilen des Leiters eingeschlossen.

Die von den beiden linearen Leiterabschnitten hervorgerufenen Felder haben die gleiche Richtung und den gleichen Wert.

Nach den oben durchgeführten Rechnungen ergibt sich dann (wobei jetzt r für OM gesetzt wird)

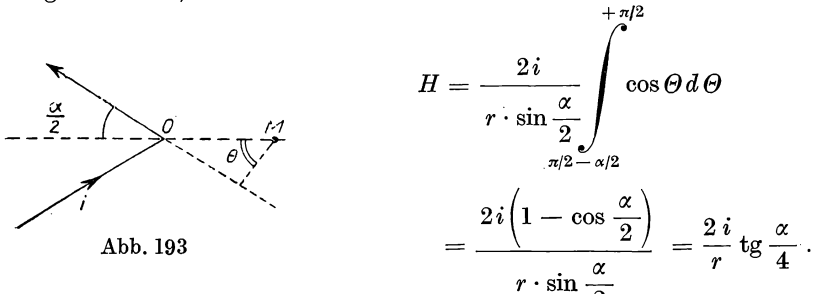


Abb. 193

$$H = \frac{2i}{r \cdot \sin\frac{\alpha}{2}} \int_{\pi/2-\alpha/2}^{+\pi/2} \cos\Theta\,d\Theta$$

$$= \frac{2i\left(1 - \cos\frac{\alpha}{2}\right)}{r \cdot \sin\frac{\alpha}{2}} = \frac{2i}{r}\operatorname{tg}\frac{\alpha}{4}.$$

Dies ist ebenfalls ein von Biot und Savart gefundenes Gesetz.

Feld auf der Achse einer Spule

Wir wollen zuerst das Feld in einem Punkt auf der Achse einer stromdurchflossenen Windung berechnen.

Wir stellen dazu fest, daß gegenüberliegende Stromelemente in M Felder hervorrufen, deren in Richtung der Achse verlaufende Komponenten sich addieren, während die senkrechten Komponenten einander entgegenwirken. Uns interessiert nur die in Richtung der Achse (Abb. 194) verlaufende Komponente

$$dH = dh \cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = dh \sin\alpha .$$

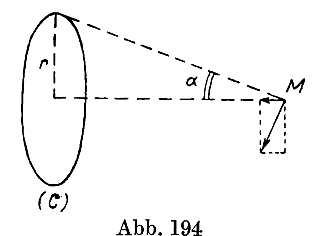


Abb. 194

Es ist

$$dh = \frac{i\,dl}{\overline{AM}^2} = \frac{i\,dl \cdot \sin^2\alpha}{r^2}$$

und

$$H = \int\limits_{(C)} \frac{i \sin^3\alpha}{r^2}\, dl = \frac{2\pi i}{r} \cdot \sin^3\alpha .$$

Dabei ist r der Radius der Stromschleife, und 2α bezeichnet den Winkel, unter dem man von M aus diese Schleife sieht.

Wenden wir uns nun einer Spule mit n_1 Windungen pro Längeneinheit zu. Den Punkt M wählen wir als Ursprung der Abszisse und bezeichnen mit x_1 und x_2 die Koordinaten der Spulenenden.

Der zwischen x und $x + dx$ liegende Teil der Spule ruft in M ein Feld

$$dH = n_1 dx \frac{2\pi i}{r} \sin^3\alpha$$

hervor. Nun ist aber

$$\frac{r}{x} = \operatorname{tg}\alpha \quad \text{und} \quad \frac{dx}{r} = -\frac{d\alpha}{\sin^2\alpha},$$

und daraus ergibt sich

$$H = \int\limits_{\alpha_1}^{\alpha_2} 2\pi n_1 i \sin\alpha\, d\alpha = 2\pi n_1 i (\cos\alpha_1 - \cos\alpha_2),$$

$$dH = -2\pi n_1 i \sin\alpha\, d\alpha .$$

Wenn M am Ende des Solenoids liegt, sind sowohl α_1 als auch α_2 spitze Winkel:

$$H = 2\pi n_1 i (\cos\alpha_1 - \cos\alpha_2).$$

Wenn M im Innern des Solenoids liegt, ist α_2 ein stumpfer Winkel. Wir setzen

$$\alpha_1 = \Theta_1; \quad \alpha_2 = \pi - \Theta_2; \quad H = 2\pi n_1 i (\cos\Theta_1 + \cos\Theta_2).$$

Ist dagegen das Solenoid praktisch unbegrenzt, d.h. Θ_1 und Θ_2 sind klein, dann erhalten wir

$$H = 4\pi n_1 i .$$

Dies ist eine sehr oft gebrauchte Formel.

Vektorpotential

Allgemein sagt man, daß ein Feld $\mathfrak{H}(x, y, z)$ von einem Vektorpotential $\mathfrak{A}(x, y, z)$ abgeleitet ist, wenn

$$\mathfrak{H} = \mathrm{rot}\ \mathfrak{A}.$$

Dieses Ergebnis stimmt genau mit dem überein, das wir für ein von einem System von Strömen aufgebauten Magnetfeld $\mathfrak{H}$ finden. Für das Vektorpotential erhalten wir also

$$\mathfrak{A} = \int \frac{i\, d\mathfrak{l}}{r}.$$

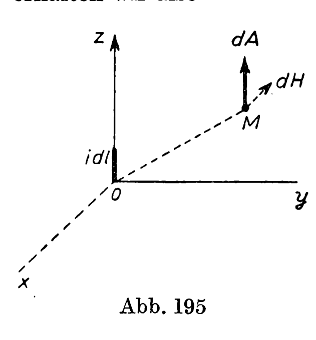


Abb. 195

Dabei ist i die Stärke des in jedem Element $d\mathfrak{l}$ des Stromkreises fließenden Stromes und r der Abstand zwischen dem Element $d\mathfrak{l}$ und dem Punkt M, in dem das Feld oder das Vektorpotential bestimmt werden soll. Das Integral muß über alle Längenelemente des Stromkreises oder der Stromkreise genommen werden.

$\mathfrak{H}$ selbst ist eine geometrische Summation der Elementarfelder. Wir werden zeigen, daß jedes Element $d\mathfrak{l}$ ein Vektorpotential $d\mathfrak{A} = \frac{i\,d\mathfrak{l}}{r}$ mit $d\mathfrak{H} = \mathrm{rot}\, d\mathfrak{A}$ hervorruft. Daraus folgt $\mathfrak{H} = \mathrm{rot}\,\mathfrak{A}$.

Legen wir nun die Koordinatenachsen so, daß $d\mathfrak{l}$ in O liegt, und zwar in Oz-Richtung (Abb. 195), dann wird die Oy-Achse derart gedreht, daß der Punkt M in der yOz-Ebene liegt. Das Vektorpotential in M ist also gegeben durch

$$dA_x = 0; \quad dA_y = 0; \quad dA_z = \frac{i\,dl}{r}.$$

Berechnen wir jetzt die Rotation von $\mathfrak{A}$:

$$\mathrm{rot}_z d\,\mathfrak{A} = 0; \quad \mathrm{rot}_y d\,\mathfrak{A} = 0 \quad \left(\text{da } \frac{\partial A_z}{\partial x} = 0 \text{ in } M\right).$$

Es bleibt also

$$\mathrm{rot}_x\, d\,\mathfrak{A} = \frac{\partial A_z}{\partial y} - 0 = \frac{i\,dl}{r^2} \cdot \frac{\partial y}{\partial r} = -\frac{i\,dl}{r^2}\,\frac{y}{r} = \frac{i\,dl \cdot \sin\alpha}{r^2}$$

gegen negative x gerichtet. Dies entspricht der LAPLACEschen Elementarformel, wobei die Feldrichtung der AMPÈREschen Beobachterregel entspricht.

Allgemein erhalten wir also für einen beliebigen Stromkreis

$$\mathfrak{H} = \int d\,\mathfrak{H} = \int \mathrm{rot}\, d\,\mathfrak{A} = \mathrm{rot} \int d\,\mathfrak{A} = \mathrm{rot}\,\mathfrak{A},$$

wobei

$$\mathfrak{A} = \int \frac{i\,d\mathfrak{l}}{r},$$

was zu beweisen war.

Das magnetische Feld entspricht also einem Vektorpotential

$$\mathfrak{A} = \int \frac{i\,d\mathfrak{l}}{r}.$$

Eigenschaften des Vektorpotentials

1. $\operatorname{div}\mathfrak{A} = 0$. Aus

$$A_x = \int \frac{i\,dx}{r}; \quad A_y = \int \frac{i\,dy}{r}; \quad \text{usw.}$$

folgt

$$\frac{\partial A_x}{\partial x} = \int i\,dx \frac{\partial\left(\frac{1}{r}\right)}{\partial x}.$$

Also ist

$$\operatorname{div}\mathfrak{A} = \int i\left(\frac{\partial\left(\frac{1}{r}\right)}{\partial x}dx + \frac{\partial\left(\frac{1}{r}\right)}{\partial y}dy + \frac{\partial\left(\frac{1}{r}\right)}{\partial z}dz\right) = \int i\,d\left(\frac{1}{r}\right) = 0.$$

Das Integral ist über den Stromkreis zu erstrecken.

Diese Eigenschaft existiert nur, weil man, um $\mathfrak{A}$ zu erhalten, längs des gesamten geschlossenen Stromkreises integriert.

2. $\operatorname{rot}\mathfrak{H} = -\Delta\mathfrak{A}$.

Wir wollen zeigen, daß für jeden beliebigen Vektor $\mathfrak{A}$

$$\operatorname{rot}\operatorname{rot}\mathfrak{A} = \operatorname{grad}\operatorname{div}\mathfrak{A} - \Delta\mathfrak{A}$$

gilt. Tatsächlich ergibt sich

$$\operatorname{rot}_x\mathfrak{H} = \frac{\partial}{\partial y}(\operatorname{rot}_z\mathfrak{A}) - \frac{\partial}{\partial z}(\operatorname{rot}_y\mathfrak{A}).$$

Aus

$$\operatorname{rot}_z\mathfrak{A} = \frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y}$$

und analog

$$\operatorname{rot}_y\mathfrak{A} = \frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x}$$

folgt also

$$\operatorname{rot}_x\mathfrak{H} = \frac{\partial^2 A_y}{\partial x\,\partial y} - \frac{\partial^2 A_x}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 A_x}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 A_z}{\partial x\,\partial z}$$

oder, durch Addieren und Subtrahieren von $\frac{\partial^2 A_x}{\partial x^2}$,

$$\operatorname{rot}_x\mathfrak{H} = \frac{\partial^2 A_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 A_y}{\partial x\,\partial y} + \frac{\partial^2 A_z}{\partial x\,\partial z} - \frac{\partial^2 A_x}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 A_y}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 A_z}{\partial z^2} = \frac{\partial}{\partial x}(\operatorname{div}\mathfrak{A}) - \Delta A_x.$$

Für $\text{rot}_y \mathfrak{A}$ und $\text{rot}_z \mathfrak{A}$ ergeben sich analoge Gleichungen. Alle drei können in der Form

$$\text{rot rot} \mathfrak{A} = \text{grad div} \mathfrak{A} - \Delta \mathfrak{A}$$

zusammengefaßt werden.

Setzen wir jetzt das oben erhaltene Resultat

$$\text{div} \mathfrak{A} = 0$$

ein, so erhalten wir schließlich

$$\text{rot rot} \mathfrak{A} = \text{rot} \mathfrak{H} = -\Delta \mathfrak{A},$$

was zu beweisen war.

Bemerkung: $\Delta \mathfrak{A}$ ist ein *Vektor*, dessen ΔA_x-Komponente in Richtung der x-Achse, ΔA_y-Komponente in Richtung der y-Achse und ΔA_z-Komponente in Richtung der z-Achse verlaufen.

Maxwell-Ampèresche Beziehung

Wir haben gesehen, daß das Vektorpotential die Form

$$\mathfrak{A} = \int i \frac{d\mathfrak{l}}{r} = \int \mathfrak{i} \frac{dl}{r}$$

hat. Nehmen wir jetzt an, daß der Strom in einem räumlichen Gebiet verteilt sei:

$$\mathfrak{i} = \mathfrak{j}\, dF;$$

mit $\mathfrak{j}$ bezeichnen wir den Vektor der Stromdichte, und dF sei ein senkrecht zu $\mathfrak{j}$ stehendes Flächenelement. Daraus folgt also, daß

$$\mathfrak{A} = \iiint \mathfrak{j} \frac{dv}{r}.$$

In der Elektrostatik, wo wir mit ϱ die Ladungsdichte pro Volumeneinheit bezeichneten, fanden wir für das Potential den Ausdruck

$$V = \iiint \varrho \frac{dv}{r}.$$

Daraus ergab sich die Poisson-Laplacesche Gleichung

$$\Delta V = -4\pi\varrho.$$

Entsprechend werden wir jetzt

$$\Delta \mathfrak{A} = -4\pi \mathfrak{j}$$

und

$$\text{rot} \mathfrak{H} = -4\pi \mathfrak{j}$$

erhalten.

Diese Beziehung ist eine der Grundgleichungen der Maxwellschen Theorie. Wir werden sehen, daß diese Beziehung dem Ampèreschen Satz äquivalent ist.

Satz von Ampère

Die Zirkulation eines Magnetfeldes, das von einem System von Strömen und Permanentmagneten längs einer geschlossenen Kurve C erzeugt wird, ist gleich dem Produkt von 4π mit der Summe der Ströme, die durch die von der Kurve (C) begrenzte Fläche (F) treten.

Wir stellen zuerst fest, daß wir das von Magneten aufgebaute Magnetfeld nicht zu berechnen brauchen, da es von einem Potential abhängt und seine Zirkulation längs einer geschlossenen Kurve infolgedessen Null ist. Es bleibt nur das von Strömen hervorgerufene Magnetfeld $\mathfrak{H}$ zu betrachten.

Nach dem Stokesschen Satz ist

$$\int \mathfrak{H}\, d\mathfrak{f} = \iint\limits_{(F)} \operatorname{rot} \mathfrak{H}\, dF = 4\pi \int\limits_{(C)} \mathfrak{i}\, dF = 4\pi i,$$

wenn i der gesamte durch die geschlossene Fläche tretende Strom ist.

Wir wenden diesen Satz an, um den Ausdruck für ein Feld wiederzufinden, das von einem Solenoid in einem Punkt seiner Achse erzeugt wird.

Wir nehmen an, daß das Feld außerhalb des Solenoids vernachlässigbar ist. Wenn l die Länge des Solenoids und n die Anzahl der Windungen sind, gilt

$$\int H\, dl = Hl = 4\pi n i.$$

Nun bezeichnen wir $\frac{n}{l}$, d.h. die Anzahl der Windungen pro cm, mit n_1 und erhalten

$$H = 4\pi n_1 i.$$

Darstellung der Maxwell-Ampèreschen Beziehung

Wir betrachten einen Leiter (Abb. 196), der die Form eines Rotationszylinders hat und von einem Strom i durchflossen wird. Wir wollen zeigen, daß $\operatorname{rot} \mathfrak{H} = 0$ dort ist, wo kein Strom fließt.

Berechnen wir die Projektionen des Feldes $\mathfrak{H}$ im Punkt M auf die Achsen:

$$H_x = -\frac{2i}{r}\sin\varphi = -\frac{2iy}{r^2} = -\frac{2iy}{x^2+y^2},$$

$$H_y = \frac{2i}{r}\cos\varphi = \frac{2ix}{r^2} = \frac{2ix}{x^2+y^2},$$

$$H_z = 0.$$

Abb. 196

Wir können sofort durch die Bildung der Ableitungen zeigen, daß

$$\operatorname{rot}_x \mathfrak{H} = \operatorname{rot}_y \mathfrak{H} = \operatorname{rot}_z \mathfrak{H} = 0.$$

Betrachten wir das Innere des Leiters. Wir zeigen zuerst, daß das im Punkt M von dem Teil des Stromes, der außerhalb eines durch M verlaufenden — zum Leiter koaxialen — Zylinders fließt, hervorgerufene Feld Null ist. Dazu genügt es, zwei dem Pol M gegenüberliegende Elemente des Querschnitts eines den

Pol M einschließenden unendlich dünnen Zylinders zu betrachten (Abb. 197). Wenn i und i' die Ströme darstellen, die durch die auf den so definierten Flächenelementen senkrecht stehenden unendlich langen Zylinderausschnitte fließen, sind die in M aufgebauten Felder einander entgegengesetzt und betragen

$$\frac{2i}{r} \quad \text{und} \quad \frac{2i'}{r'}.$$

Abb. 197

Nun ist aber

$$\frac{i}{i'} = \frac{df}{df'} = \frac{r}{r'},$$

d.h., die Felder heben sich gegenseitig auf. Wir können leicht ebenso ohne Schwierigkeiten zeigen, daß das in einem äußeren Punkt eines zylindrischen Ringes aufgebaute Feld das gleiche ist, als wenn der gesamte Strom in der Achse des Zylinders konzentriert wäre.

Bezeichnen wir nun mit a den Radius des Leiters, so erhalten wir für das Feld in M den Ausdruck

$$H = \int_0^r \frac{2i}{r} \frac{2\pi\varrho\, d\varrho}{\pi a^2} = \frac{2ir}{a^2} \qquad \left\{ \begin{aligned} H_x &= -\frac{2iy}{a^2}, \\ H_y &= \frac{2ix}{a^2}. \end{aligned} \right.$$

Wir können weiterhin zeigen, daß

$$\text{rot}_x \mathfrak{H} = \text{rot}_y \mathfrak{H} = 0.$$

Nun ist aber

$$\text{rot}_z \mathfrak{H} = \frac{4i}{a^2}$$

und

$$i = \pi a^2 j,$$

wobei j der Strom pro Querschnittsflächeneinheit ist. Wir erhalten also

$$\text{rot}\,\mathfrak{H} = 4\pi\mathfrak{j}.$$

Magnetische Energie

Wir haben in der Elektrostatik festgestellt, daß die elektrische Energie im Raum lokalisiert ist. Die Energie pro Volumeneinheit war durch den Ausdruck

$$W = \frac{\varepsilon\mathfrak{E}^2}{8\pi}$$

bestimmt, in dem ε die Dielektrizitätskonstante des Materials und $\mathfrak{E}$ das elektrische Feld bedeuten. Das Produkt $\varepsilon\mathfrak{E} = \mathfrak{D}$ wird elektrische Induktion genannt. Wir können also schreiben:

$$W = \frac{\mathfrak{E} \cdot \mathfrak{D}}{8\pi}.$$

Diesen Gleichungen entsprechend, ist beim Magnetismus die Energie pro Volumeneinheit durch den Ausdruck

$$W = \frac{\mathfrak{H} \cdot \mathfrak{B}}{8\pi}$$

oder

$$W = \frac{\mu \mathfrak{H}^2}{8\pi}$$

gegeben, wenn

$$\mathfrak{B} = \mu \mathfrak{H}$$

ist. Dabei sind $\mathfrak{H}$ das magnetische Feld und $\mathfrak{B}$ die magnetische Induktion.

Um dies zu beweisen, genügt es, die Energie einer Kraftlinienröhre zu berechnen. Betrachten wir eine solche Kraftlinienröhre, die die auf 1 cm² der Fläche eines Magneten vorhandene Magnetmenge herausschneidet (Abb. 198). Um die Masse dm von einem Ende der Röhre zum anderen transportieren zu können, benötigen wir die Energie

$$dW = \int B\, dx\, dm.$$

Nun ist aber $\frac{dm}{\sigma} = \frac{dH_1}{H_1}$, und weil $H_1 = 4\pi\sigma$ ist, folgt also

$$dW = \int B\, dx \frac{dH_1}{4\pi}.$$

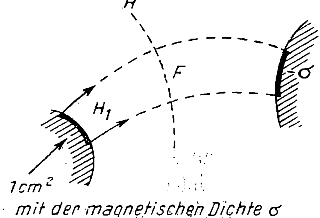


Abb. 198

Die Erhaltung des Flusses in der Kraftlinienröhre fordert nun aber, daß

$$1\ \text{cm}^2 \cdot dH_1 = F dH.$$

Es muß also gelten

$$dW = \int \frac{B\, dH\, F\, dx}{4\pi}.$$

Durch Integration erhalten wir $W = \frac{BH}{8\pi}$ für die Energie pro Volumeneinheit. Dabei ist B proportional zu H.

Koeffizienten der Gegen- und der Selbstinduktion

Wir werden zeigen, daß die elektromagnetische Energie den Wert

$$W = \frac{1}{8\pi}\iiint \mathfrak{H}\mathfrak{B}\, dv$$

hat, wobei $\mathfrak{H}$ das Magnetfeld und $\mathfrak{B}$ die magnetische Induktion sind.

Durch einen beliebigen Punkt des Raumes verlaufe eine Kraftlinie. Wir wählen auf dieser Kraftlinie ein Bogenelement der Länge ds und eine ihm entsprechende

kleine zur Fläche $d\,F$ senkrecht stehende Fläche aus. Das Volumenelement dv beträgt also

$$d\,v = d\,s \cdot d\,F$$

bzw.

$$d\,v = d\mathfrak{s} \cdot d\,\mathfrak{F}.$$

Daraus folgt, daß

$$W = \frac{1}{8\,\pi}\iiint (\mathfrak{H}\,d\mathfrak{s})\,(\mathfrak{B}\,d\mathfrak{F})$$

ist.

1. Wir können nun dieses Integral auf eine Induktionsröhre ausdehnen. Dazu schreiben wir es in der Form

$$W = \frac{1}{8\,\pi}\iint \mathfrak{B}\,d\,\mathfrak{F}\int \mathfrak{H}\,d\,\mathfrak{s}.$$

Wir wollen mit $d\Phi$ den konstanten Wert des Induktionsflusses in jedem zylindrischen Element der betrachteten Röhre bezeichnen:

$$W = \int \frac{d\,\Phi}{8\,\pi}\int \mathfrak{H}\,d\,\mathfrak{s}.$$

Wenn das Feld durch einen vom Strom i durchflossenen Stromkreis erzeugt wird, dann ist die Rotation des Vektors $\mathfrak{H}$ längs der betrachteten Linie gleich $4\pi i$ (die Induktionsröhre schließt den Kreis ein):

$$W = \frac{1}{2}\,i\int d\,\Phi.$$

2. Jetzt wollen wir dieses Integral auf alle Induktionsröhren erweitern, die den gleichen Strom i einschließen:

$$W = \frac{1}{2}\,i\,\Phi.$$

In diesem wichtigen Resultat bezeichnet Φ den Induktionsfluß durch eine beliebige Fläche, die von dem Stromkreis eingeschlossen wird.

3. Betrachten wir mehrere Stromkreise, die von den Strömen i_1, i_2, ... durchflossen werden, welche magnetische Felder $\mathfrak{H}_1$, $\mathfrak{H}_2$, ... usw. aufbauen und durch die Induktionsflüsse Φ_1, Φ_2, ... treten. Die elektromagnetische Energie hat den Wert

$$W = \frac{1}{2}\,(i_1\,\Phi_1 + i_2\,\Phi_2 + \cdots).$$

Nun hat aber die Induktion $\mathfrak{B}$ den Wert $\mu\,(\mathfrak{H}_1 + \mathfrak{H}_2 + \cdots)$, und wir wissen, daß $\mathfrak{H}_p$ proportional zu i_p ist.

Φ_p hat also die Form

$$\Phi_p = L_p i_p + M_{p1} i_1 + M_{p2} i_2 + \cdots + M_{pq} i_q,$$

und die elektromagnetische Energie ergibt sich zu

$$W = \frac{1}{2}\,[\Sigma L_n i_n^2 + \Sigma\Sigma (M_{np} + M_{pn})\, i_n i_p].$$

Dabei ist M_{np} der Koeffizient der Gegeninduktion des Stromkreises n in bezug auf den Stromkreis p. Wir wollen nun zeigen, daß

$$M_{np} = M_{pn}.$$

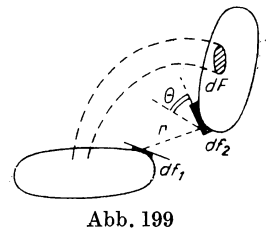


Abb. 199

Diese beiden Koeffizienten nennt man auch *Gegeninduktionskoeffizienten* der Stromkreise n und p.

Entsprechend bezeichnet man L_n als *Selbstinduktion* des Stromkreises n.

Um zu zeigen, daß $M_{np} = M_{pn}$ ist, berechnen wir zuerst den Koeffizienten M_{np}. Dazu betrachten wir z. B. die Stromkreise 1 und 2. Zur Berechnung des Koeffizienten M_{21} (Abb. 199) gehen wir von dem durch den Stromkreis 1 hervorgerufenen Kraftfluß durch die Stromschleife 2 aus. Diesen Fluß hatten wir zu $M_{21} i_1$ bestimmt, und wir erhalten

$$\Phi = \iint \mathfrak{B}\, d\mathfrak{f}_2 = \mu \iint \mathfrak{H}_1\, d\mathfrak{f}_2.$$

Da $\mathfrak{H}_1$ einem Vektorpotential $\mathfrak{A}_1$ entspricht, ist

$$\Phi = \mu \iint \operatorname{rot} \mathfrak{A}_1\, d\mathfrak{f}_2 = \mu \int_{(2)} \mathfrak{A}_1\, d\mathfrak{f}_2.$$

Dabei ist $d\mathfrak{f}_2$ ein Bogenelement der Stromschleife (2).

Da nun

$$\mathfrak{A}_1 = \int \frac{i_1\, d\mathfrak{f}_1}{r}$$

gilt, ist

$$\Phi = \mu\, i_1 \int_{(1)} \int_{(2)} \frac{d\mathfrak{f}_1 \cdot d\mathfrak{f}_2}{r}.$$

Wir erhalten die NEUMANNsche Formel:

$$M_{21} = \mu \int_{(1)} \int_{(2)} \frac{d\mathfrak{f}_1 \cdot d\mathfrak{f}_2}{r},$$

die wir auch in der Form

$$M_{21} = \mu \int_{(1)} \int_{(2)} \frac{d f_1 \cdot d f_2 \cdot \cos\Theta}{r}$$

darstellen können.

Dabei ist Θ der Winkel zwischen den Elementen df_1 und df_2. Daraus folgt, daß tatsächlich

$$M_{12} = M_{21}$$

gilt.

In einem elektromagnetischen Maßsystem haben diese Koeffizienten immer die Dimension einer Länge. Im elektromagnetischen CGS-System ist die Einheit der Selbstinduktion oder der Gegeninduktion das cm. Weiter unten werden wir sehen, welche Dimension die Induktion im praktischen Maßsystem besitzt.

Um die Selbstinduktion eines Stromkreises zu berechnen, können wir auch die NEUMANNsche Formel anwenden, die immer gültig ist, wenn man die Selbstinduktion als Gegeninduktion des eigenen Stromkreises auffaßt. Es ist leicht einzusehen, daß die grobe Berechnung eine unendliche Selbstinduktion ergibt: für benachbarte Elemente erhalten wir unendliche Ausdrücke. Für eine genaue Rechnung müssen die Leiterdicke und die Stromverteilung im Leiter berücksichtigt werden. Die NEUMANNsche Formel bleibt theoretisch exakt, ist aber für Näherungen schwierig zu verwenden. Einfacher ist es, den Kraftfluß durch die Stromschleife zu berechnen und, falls es nötig ist, eine physikalisch sinnvolle Näherung durchzuführen.

Selbstinduktion und Gegeninduktion zweier Spulen auf einem Toroid

Wir betrachten zwei Spulen, die auf ein Toroid gewickelt sind (Abb. 200). Das Material möge eine sehr große Permeabilität besitzen. Wir wollen mit N_1 und N_2 die Windungszahlen und mit i_1 und i_2 die Ströme in den beiden Spulen bezeichnen. Es sei l der mittlere Umfang des Toroids.

Das Magnetfeld H im Innern des Toroids ist dann durch den Ausdruck

$$H = \frac{4\pi(N_1 i_1 + N_2 i_2)}{l}$$

gegeben. Diesen Ausdruck erhält man, wenn man den AMPÈREschen Satz längs des mittleren Umfanges anwendet. (Der AMPÈREsche Satz liefert nicht nur die Größe des Feldes, sondern auch seine geometrische Form.)

$$\int H\,dl = 4\pi(N_1 i_1 + N_2 i_2).$$

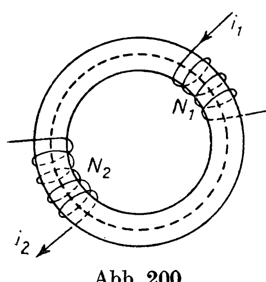


Abb. 200

Für die Induktion erhalten wir

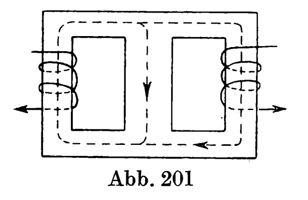
$$B = \frac{4\pi\mu}{l}(N_1 i_1 + N_2 i_2),$$

und der Fluß Φ_1 durch die Spule N_1 ergibt sich zu

$$\Phi_1 = N_1 F B.$$

Dabei ist F der Toroidquerschnitt. Also ist

$$\Phi_1 = \frac{4\pi\mu F}{l}(N_1^2 i_1 + N_1 N_2 i_2).$$


Abb. 201

Für die Selbstinduktion der Spule 1 ergibt sich damit

$$L_1 = \frac{4\pi\mu F}{l} N_1^2,$$

und für die Spule 2 folgt $L_2 = \frac{4\pi\mu F}{l} N_2^2$. Schließlich gilt für die Gegeninduktion

$$M_{12} = \frac{4\pi\mu F}{l} N_1 N_2 = M_{21}.$$

Bemerkung: Da der gesamte Induktionsfluß durch jede der beiden Spulen fließt, erhalten wir die Beziehung $M^2 = L_1 L_2$. Dies gilt nicht mehr, wenn ein Teil des Induktionsflusses anderweitig verläuft, wie dies z. B. in dem in Abb. 201 gezeigten Aufbau der Fall ist, bei dem eine Verzweigung des Induktionsflusses auftritt.

Diese Anordnung ist ein Beispiel für zwei parallele magnetische Widerstände (siehe weiter oben die Theorie der magnetischen Kreise).

In allen Fällen, in denen Drahtdurchmesser und die tatsächliche Verteilung der Stromlinien in den Leitern berücksichtigt werden, finden wir, daß die Kraftflüsse nur teilweise durch die Windungen verlaufen. Es werden daher Formeln für die Selbstinduktion und Gegeninduktion benutzt, in denen die Drahtstärke nicht auftritt.

Andere Fälle

Betrachten wir jetzt einen Leiter der Länge l und des Durchmessers a, der in Form einer *Haarnadel* gebogen ist und deren Schenkel den Abstand d haben (Abb. 202). Für diesen Fall gilt

$$L = l\left(1 + 4\ln\frac{d}{a}\right).$$

Wir wollen jetzt die dabei auftretende Selbstinduktion mit der eines gleichlangen, aber anders gebogenen Drahtes auftretenden vergleichen, der die Form einer Kreisschleife besitzen soll.

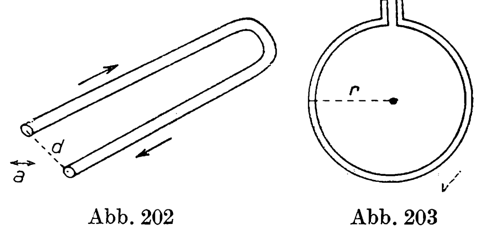


Abb. 202 Abb. 203

Für eine runde Schleife mit dem Radius r (Abb. 203), die aus einem Draht mit dem Durchmesser a gebildet wird, finden wir

$$L = 4\pi r\left(\ln\frac{8r}{a} - \frac{7}{4}\right).$$

Wir wollen die entsprechenden Rechnungen hier nicht durchführen.

Theorie der magnetischen Doppelschichten

Magnetische Doppelschicht nennt man eine unendlich dünne Schicht, die eine völlig gleichförmige, senkrecht zu ihrer Oberfläche stehende Magnetisierung aufweist. Das magnetische Moment dM eines Flächenelements ist der Fläche dF dieses Elementes proportional.

Den konstanten Ausdruck

$$U = \frac{dM}{dF} = \frac{d\mathfrak{M}}{d\mathfrak{F}}$$

nennt man Stärke der Doppelschicht (Abb. 204).

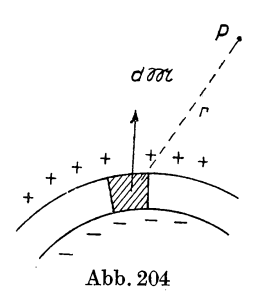


Abb. 204

Magnetfeld einer Doppelschicht

Berechnen wir das von einer Doppelschicht in einem Punkt P aufgebaute Potential. Wir haben in dem Kapitel über den Magnetismus gesehen, daß das im Punkt P von dem Element dF der Doppelschicht erzeugte Potential die Form

$$dV = \frac{dM\cos\Theta}{r^2} = U\,\frac{dF\cos\Theta}{r^2} = U\,d\Omega$$

hat. Dabei ist $d\Omega$ der Raumwinkel, unter dem man von P aus das Element dF sieht.

Das im Punkt P von der Doppelschicht aufgebaute Potential ist dann gegeben zu

$$V = U\Omega.$$

Ω ist dabei jetzt der Raumwinkel, unter dem man die Umrandung der Doppelschicht sieht (positive Seite der Schicht).

Das magnetische Feld hat immer den Wert

$$\mathfrak{H} = -\operatorname{grad}\mathfrak{V}.$$

Man kann bei sämtlichen Betrachtungen des Elektromagnetismus von dem folgenden fundamentalen AMPÈREschen Gesetz ausgehen:

Zur Berechnung des magnetischen Feldes eines Stromkreises kann man diesen durch eine äquivalente magnetische Doppelschicht ersetzen. Die Umrandung dieser Doppelschicht ist der Stromkreis, ihre Stärke entspricht der Stromstärke in elektromagnetischen Einheiten, und ihr magnetisches Moment hat die durch die AMPÈREsche Regel gegebene Richtung.

Bemerkung: Die „Richtung" der Doppelschichtumrandung entspricht der eines Stromes auf dieser Umrandung, der ein Feld mit gleicher Richtung hervorruft wie die Doppelschicht.

Die Einführung der magnetischen Doppelschicht schließt jedoch einen Widerspruch ein. Das von einer magnetischen Doppelschicht aufgebaute Magnetfeld entspricht einem Potential. Die Rotation längs einer beliebigen geschlossenen Kurve ist also Null. Wir haben aber gesehen, daß die Arbeit eines von einem Strom erzeugten Feldes längs einer geschlossenen Kurve, die den Stromkreis einschließt, gleich $4\pi i$ ist.

Dieser Widerspruch beruht auf der Diskontinuität des magnetischen Feldes beim Durchgang durch die magnetische Doppelschicht. Um den Widerspruch zu beseitigen, ersetzen wir das von einem Strom aufgebaute *Feld* durch die von einer äquivalenten magnetischen Doppelschicht hervorgerufene *Induktion*, die konti-

nuierlich ist und keinem Potential entspricht (siehe auch Kapitel „Magnetismus", S. 126).

Die Äquivalenz der Ströme und der magnetischen Doppelschichten bringt jedoch noch eine weitere Unbequemlichkeit mit sich: Es können keine Aussagen über die Vorgänge im Innern der Leiter gemacht werden, während das LAPLACEsche Gesetz auf die Stromelemente angewandt werden kann.

Trotzdem besitzt die Theorie der magnetischen Doppelschichten zahlreiche Vorteile. So beweist sie z. B. den AMPÈREschen Satz. Wir wollen eine magnetische Doppelschicht C und eine sie schneidende Kurve D betrachten. Mit A und B bezeichnen wir zwei Punkte auf D, die sehr nahe beieinander und auf verschiedenen Seiten der Doppelschicht liegen (Abb. 205).

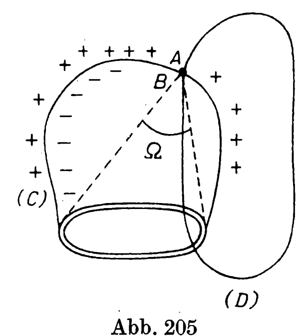


Abb. 205

Mit Ω bezeichnen wir den Raumwinkel, unter dem man von A aus die positive Seite der Doppelschicht sieht. Die negative Seite sieht man von B aus unter dem Raumwinkel $4\pi - \Omega$. Dies beruht auf der Tatsache, daß sich bei einer Verschiebung des Bezugspunktes auf der geschlossenen Kurve bis zu seinem Ausgangspunkt der Winkel Ω auf $\Omega \pm 4\pi$ in Richtung der Verschiebung verändert

Die magnetischen Potentiale in A und B haben also den Wert

$$V_A = U\Omega; \quad V_B = (\Omega - 4\pi)\,U.$$

Die Arbeit des Induktionsvektors längs AMB ist die gleiche wie die des Feldvektors, wenn wir $\mu = 1$ setzen. Es ist also

$$V_A - V_B = 4\pi U.$$

Andererseits ist die Induktion gleichförmig und bleibt also endlich. Die Dicke der Doppelschicht ist unendlich klein, und die Arbeit des Vektors $\mathfrak{B}$ längs BA kann vernachlässigt werden. Es ist also

$$\int\limits_{(D)} \mathfrak{B}\, d\mathfrak{f} = 4\pi U.$$

Diese Größe hatte sich vorher zu $4\pi i$ ergeben. Wir erhalten also die Identität $U \equiv i$ in elektromagnetischen CGS-Einheiten. Dies ist das fundamentale AMPÈREsche Gesetz, das wir, von dem LAPLACEschen Gesetz ausgehend, über einige Begriffe wie das Vektorpotential gefunden haben.

Mit Hilfe der Theorie der magnetischen Doppelschichten kann man auch auf einfache Art die Felder berechnen, die von Stromkreisen einfacher geometrischer Form aufgebaut werden.

Magnetfeld eines Solenoids

Wir wollen dabei jede Windung durch die entsprechende magnetische Doppelschicht ersetzen. Die Verteilungen des Magnetismus heben sich gegenseitig mit Ausnahme der Enden N und S der Spulen auf (Abb. 206).

Das Solenoid verhält sich also wie ein gleichförmig magnetisierter Magnet. Wenn wir mit I die Magnetisierungsstärke bezeichnen, dann gilt

$$B = H + 4\pi I.$$

Betrachten wir einen Punkt auf der Achse des Solenoids im Innern der Spule, dessen Entfernung von den Spulenenden r_1 bzw. r_2 betrage. In erster Näherung gilt dann

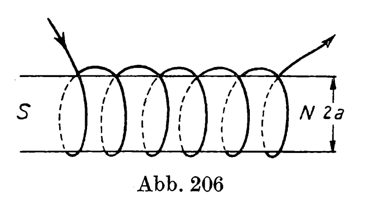


Abb. 206

$$H = -I\left(\frac{\pi a^2}{r_1^2} + \frac{\pi a^2}{r_2^2}\right)$$

$$= -\pi a^2 I\left(\frac{1}{r_1^2} + \frac{1}{r_2^2}\right),$$

$$B = I\pi\left[4 - a^2\left(\frac{1}{r_1^2} + \frac{1}{r_2^2}\right)\right].$$

Betrachten wir das von einer Elementardoppelschicht eingenommene Volumen. Wenn n_1 die Anzahl der Windungen pro Längeneinheit ist, dann beträgt dieses Volumen $\pi a^2/n_1$. Das magnetische Moment dieser Doppelschicht ist

$$dM = \pi a^2 U = \pi a^2 i.$$

Da nun

$$dM = I dv$$

und

$$dv = \frac{\pi a^2}{n_1}$$

ist, erhalten wir also

$$B = 2\pi n_1 i\left(1 - \frac{a^2}{2r_1^2} + 1 - \frac{a^2}{2r_2^2}\right).$$

Dies aber ist der Anfang der Reihenentwicklung für den Ausdruck

$$B = 2\pi n_1 i(\cos\Theta_1 + \cos\Theta_2);$$

Θ_1 und Θ_2 sind dabei die Winkel zwischen der Achse des Zylinders und der Verbindung vom Punkt M mit den Enden des Zylinders (Abb. 207). Die strenge Berechnung des Feldes H, das von der Verteilung σ erzeugt wird, führt uns auf die gleiche Formel:

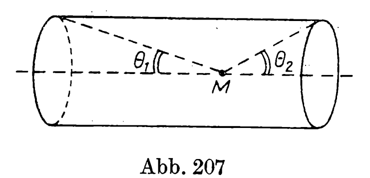


Abb. 207

$$B = 2\pi n_1 i(\cos\Theta_1 + \cos\Theta_2).$$

Wichtige Bemerkung: Der Hauptteil des Feldes ist durch $4\pi n_1 i$ gegeben. Man sieht also die Notwendigkeit, sich auf die von den magnetischen Doppelschichten herrührende Induktion B und nicht auf das Feld zu beziehen.

Magnetfeld eines rohrförmigen Stromleiters

Die Kenntnis folgenden Satzes ist im allgemeinen recht nützlich:

Wir betrachten einen dünnen Kreiszylinder, durch den parallel zu seiner Achse ein Strom mit konstanter Dichte fließt. Eine solche Stromverteilung erzeugt in

einem Punkt M im Innern des Zylinders ein magnetisches Feld Null. In einem Punkt M' außerhalb des Zylinders hat das Feld den gleichen Wert, als wäre der gesamte Strom auf der Zylinderachse konzentriert.

Der Beweis kann in gleicher Weise wie in der Elektrostatik geführt werden, wo man die gleiche Eigenschaft, d.h. ein Feld Null bei einer gleichförmigen Ladungsverteilung auf einer Kugel (siehe Seite 15) findet. Das COULOMBsche $\frac{1}{r^2}$-Gesetz ändert sich hier für das von einem unendlich langen Stromfaden hervorgerufene Magnetfeld in ein $\frac{1}{r}$-Gesetz. Zeichnet man jetzt von dem Punkt M aus, in dem man das Feld untersuchen will, zwei Geraden, die einen kleinen Winkel $d\alpha$ ein-

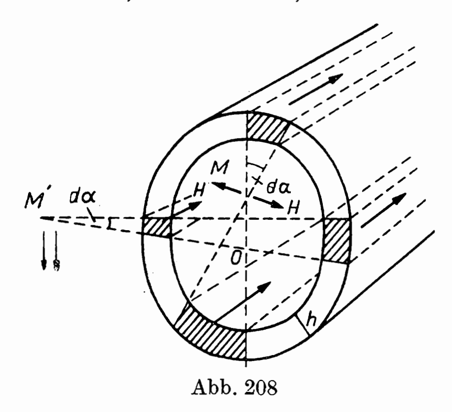


Abb. 208

schließen, so findet man (Abb. 208), daß das von einem Stromfaden mit dem Querschnitt hr und der Stromdichte i hervorgerufene Feld $\frac{2ihr\,d\alpha}{r}$ nicht mehr von r abhängt. Der in der Abbildung gegenüberliegende Stromfaden erzeugt ein gleiches entgegengesetzt gerichtetes Feld, und das Gesamtfeld in M ist schließlich Null. Die Felder zweier Stromelemente heben sich also gegenseitig auf.

Betrachten wir jedoch den Punkt M', so *addieren* sich die Felder der dem gleichen kleinen Winkel $d\alpha$ entsprechenden Stromelemente, anstatt sich zu subtrahieren. Das resultierende Feld H hat schließlich den Wert $\frac{2I}{R}$, wobei $R = \overline{M'O}$ und I den Gesamtstrom darstellen. Die analytische Berechnung möge der Leser selbst durchführen.

Bemerkungen zur Vektorschreibweise

In der englischen Literatur findet man häufig für den Operator $\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}$ das Symbol ∇ (Nabla), so daß das Skalarprodukt $\nabla \mathfrak{A}$ für den Ausdruck div $A = \frac{\partial A_x}{\partial x}, \frac{\partial A_y}{\partial y}, \frac{\partial A_z}{\partial z}$ steht.

Ebenso findet man ∇^2 für $\frac{\partial^2}{\partial x^2}, \frac{\partial^2}{\partial y^2}, \frac{\partial^2}{\partial z^2}$ und für den skalaren LAPLACE-Operator $\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2}$ die Schreibweise $\nabla^2 V$; entsprechend für den vektoriellen LAPLACE-Operator $\nabla^2 \mathfrak{A}$.

Man sieht, daß für rot $\mathfrak{A}$ auch das Vektorprodukt $\nabla \times \mathfrak{A}$ gesetzt werden kann.

II. KAPITEL

Wirkung von Magnetfeldern auf Ströme

Elementargesetz

Wir haben gesehen, daß ein Stromelement dl im Punkt P ein senkrecht zur Ebene dl, P stehendes Magnetfeld $d\mathfrak{H}$ erzeugt. Die Richtung des Magnetfeldes ist durch die AMPÈREsche Regel gegeben, und die Feldstärke beträgt

$$dH = \frac{i\,dl \cdot \sin\alpha}{r^2}.$$

Bringen wir jetzt im Punkt P eine magnetische Masse $+1$ an. Diese Einheitsmasse unterliegt einer Kraft $d\mathfrak{F}$, die die gleiche Richtung und den gleichen Sinn wie $d\mathfrak{H}$ hat und

$$\frac{i\,dl \cdot \sin\alpha}{r^2}$$

beträgt.

Nach dem Prinzip der Gleichheit von actio und reactio unterliegt das Element dl einer gleichgroßen entgegengerichteten Kraft

$$d\mathfrak{F} = i\,d\mathfrak{l} \times \frac{\mathfrak{r}}{r^3}.$$

P stellt dabei den Ursprung dar.

Das von der Masse $+1$ im Punkt P im Vakuum hervorgerufene Feld beträgt $\frac{\mathfrak{r}}{r^3}$ in elektromagnetischen Einheiten (siehe dazu Abb. 209: $d\mathfrak{H}$ und $\mathfrak{F}$ stehen senkrecht

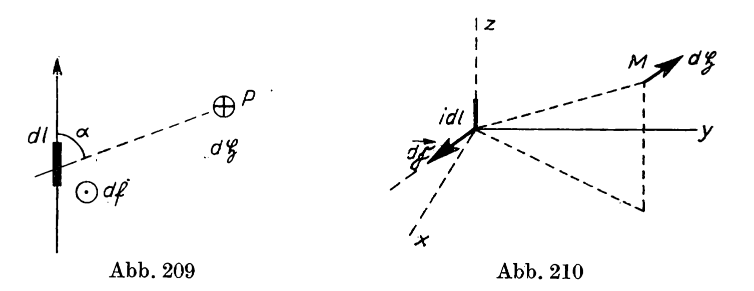


Abb. 209 Abb. 210

auf der Zeichenebene; und Abb. 210 gibt eine räumliche Darstellung). Die Größe $\frac{\mathfrak{r}}{r^3}$ ist jedoch in diesem Fall auch die von der Masse $+1$ hervorgerufene *magnetische Induktion.*

Allgemeiner ausgedrückt, befindet sich das Element dl in einem magnetischen Feld, so unterliegt es einer Kraft

$$d\mathfrak{F} = i\,d\mathfrak{l} \times \mathfrak{B},$$

wobei $\mathfrak{B}$ die magnetische Induktion bezeichnet. Dies ist das LAPLACEsche Elementargesetz.

Diese Beziehung gestattet uns, in einem kohärenten elektromagnetischen Maßsystem, z.B. im elektromagnetischen CGS-System, die Einheit der Feldstärke zu definieren. Benutzt man ein solches System, so muß das LAPLACEsche Gesetz in der Form

$$d\mathfrak{F} = \frac{i}{A}\,d\mathfrak{l} \times \mathfrak{B}$$

dargestellt werden.

Unabhängig von jedem Maßsystem jedoch wollen wir noch einmal festhalten, daß die LAPLACEsche Kraft von der *Induktion* und nicht vom Feld hervorgerufen wird, wie es auch aus der Formel ersichtlich ist.

Benutzt man das dyn als Einheit der Kraft und rechnet den Strom i in Ampere, so muß $A = 10$ gesetzt werden. Mißt man den Strom jedoch in elektrostatischen CGS-Einheiten, dann hat A den Wert $3 \cdot 10^{10}$ und entspricht damit der Lichtgeschwindigkeit im Vakuum (siehe MAXWELLsche Theorie).

Die *Richtung,* in der die LAPLACEsche Kraft wirkt, ist vollständig durch die vektorielle Darstellung von $d\mathfrak{F}$ bestimmt.

Experimentelle Bestätigung

Dieses LAPLACEsche Gesetz kann experimentell nachgeprüft werden.

1. *Über zwei leitende Schienen* legt man einen Metallstab, auf den man ein vertikales Magnetfeld wirken läßt. Es tritt eine horizontale Verschiebung des Metallstabes auf, die senkrecht zum Magnetfeld erfolgt und deren Richtung durch das oben angeführte Gesetz bestimmt wird (Abb. 211).

Bezeichnen wir mit B den Wert der Induktion, mit i die Stromstärke und mit l die Länge des Metallstabes, dann erhalten wir für die Kraft in diesem Feld den Ausdruck

$$F = B \cdot i \cdot l.$$

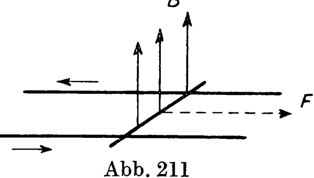


Abb. 211

2. *Das BARLOWsche Rad.* Das BARLOWsche Rad besteht aus einer Kupferscheibe, deren unterer Teil in eine mit Quecksilber gefüllte Schale taucht. Die Achse der Scheibe wird über eine Bürste mit dem einen Pol einer Batterie verbunden, deren zweiter Pol mit dem Quecksilber in Verbindung steht. Der Stromkreis wird durch den vertikalen Radius der Scheibe geschlossen. (Tatsächlich verteilt sich der Strom

auf der gesamten Scheibe.) Die Scheibe befindet sich in einem homogenen, parallel zu ihrer Achse verlaufenden Magnetfeld, das von einem Hufeisenmagneten erzeugt wird (Abb. 212). Unter den angegebenen Bedingungen beginnt sich das Rad zu drehen.

Die Frage, ob die magnetische Induktion auf das leitende Material oder auf den Strom selbst wirkt, ist lange Zeit sehr heftig diskutiert worden. Das oben beschriebene Experiment mit dem BARLOWschen Rad scheint zu beweisen, daß die

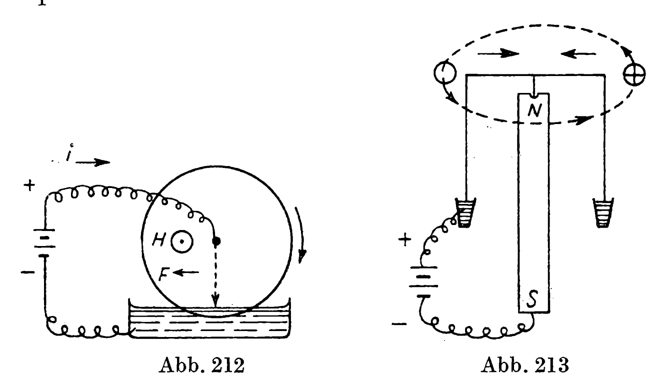


Abb. 212 Abb. 213

magnetische Induktion auf die leitende Materie wirkt; der Verlauf der Stromfäden in der Scheibe verändert sich nicht. Die Elektronentheorie gibt für diese Tatsache eine sehr einfache Erklärung: Die bewegten Elektronen im Atomgitter des Metalls übertragen diesen Atomen ihren Impuls, der von der Wirkung der LAPLACEschen Kraft auf sie bei ihrer Verschiebung herrührt (siehe weiter unten: „Wirkungen von elektrischen und magnetischen Feldern auf Elektronen“).

3. *Experiment von FARADAY.* Eine starre Anordnung möge aus zwei vertikalen leitenden Stäben bestehen, die an ihren oberen Enden durch einen horizontalen leitenden Stab verbunden sind. Diese Anordnung ist um eine von einem vertikalen Magneten getragene Achse drehbar. Die vertikalen Stäbe tauchen in eine mit Quecksilber oder mit einer Kupfersulfatlösung gefüllte Rinne. Diese Rinne und der Magnet sind mit den Polen eines Generators verbunden.

Das Feld wird durch den Magneten selbst aufgebaut. Ist der Stromkreis geschlossen, so kann man eine Rotation der Anordnung um ihre Achse beobachten. Man versteht sofort, daß die LAPLACEschen Kräfte in der in Abb. 213 angezeigten Richtung wirken.

Bei allen eben beschriebenen Experimenten führt eine Stromumpolung zu einer Umkehr der Bewegungsrichtung.

4. *Elektromagnetische Gleichstrompumpe.* Wir betrachten eine elektrisch-leitende Flüssigkeit: Schwefelsäure in Lösung, Quecksilber, geschmolzenes Natrium oder Kalium. Diese Flüssigkeit ist ohne Anwendung eines beweglichen Teils nur durch Anlegen einer LAPLACE-Kraft in Bewegung zu setzen. Eine solche Anordnung nennt man *elektromagnetische Pumpe.*

Die leitende Flüssigkeit befindet sich in einem isolierenden Rohr T (Abb. 214). Ein starker Magnet bzw. Elektromagnet NS erzeugt auf eine bestimmte Länge des

Rohres eine zu T senkrechte magnetische Induktion B. In zwei Kabeln (+, −) fließt über zwei leitende Platten P, die dem Strom einen Durchgang durch die Flüssigkeit ermöglichen, in entsprechender Richtung (von + nach −) *transversal* zu B und T ein Strom. Bezeichnen wir mit i den fließenden Gesamtstrom, mit l die Länge des Rohres, so beträgt die gesamte auf die Flüssigkeit wirkende Kraft $K = Bli$. In dem in der Abb. 214 dargestellten Fall verläuft sie in Richtung des Pfeils. Dividiert man diesen Ausdruck durch den Querschnitt F des Rohres, so erhält man den entsprechenden *Druck*, der die Flüssigkeit auf eine bestimmte Förderhöhe zu heben imstande ist und eine Zirkulation bei kleineren Druckunterschieden ermöglicht.

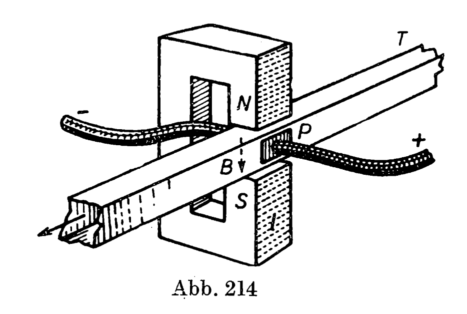


Abb. 214

Wir werden weiter unten noch elektromagnetische Wechselstrompumpen betrachten.

Cottonsche Waage

Die Messung der auf einen bekannten, von einem definierten Strom durchflossenen Leiter wirkenden Kraft gestattet die Messung von Magnetfeldern. Diese Kraft, deren Größe in mittleren Magnetfeldern relativ große und gut meßbare Werte annimmt, wird durch Auflegen von Gewichten gemessen (Abb. 215).

Der bewegliche Leiter besteht aus einem metallischen Band, das auf einem isolierten Halter befestigt ist. Dieses Band besteht aus zwei konzentrischen Kreisbögen, die durch radiale Leiterstücke verbunden sind. Die Anordnung ist an einem Waagebalken befestigt.

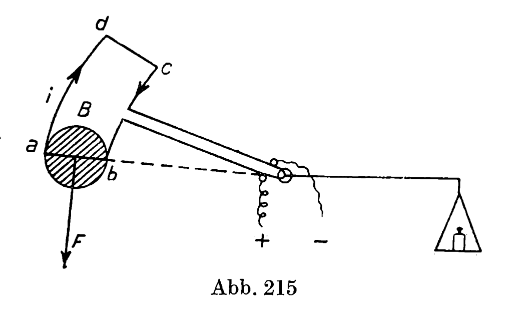


Abb. 215

Man bringt den geradlinigen Teil ab des Leiters in das zu messende Feld $\mathfrak{B}$, das in der Abbildung senkrecht zur Zeichenebene verläuft. Mit l bezeichnen wir nun die Länge ab und mit i die Stromstärke. Die auf ab wirkende Kraft ist dann eine Vertikalkraft der Größe

$$F = B \cdot i \cdot l.$$

Das Moment der Kraft in bezug auf die Achse beträgt M; d bezeichnet die Entfernung zwischen F und der Achse:

$$M = B \cdot i \cdot l \cdot d.$$

Die auf die bogenförmigen Leiter wirkenden Kräfte stehen senkrecht auf den Kreisbögen, d.h., ihr Moment in bezug auf die Achse ist Null. Der geradlinige

Teil cd unterliegt der Wirkung eines vernachlässigbar kleinen Magnetfeldes. Die Kraft F wird nun mit Hilfe von geeichten Gewichten m ausgeglichen. Wir setzen dabei voraus, daß die beiden Waagebalken gleich sind.

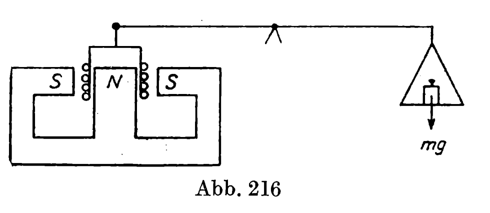


Abb. 216

Die Gleichgewichtsbedingung lautet dann

$$B \cdot i \cdot l = mg,$$

und für die Induktion erhalten wir danach den Ausdruck

$$B = \frac{mg}{il}.$$

Eine ähnliche Anordnung benutzt man zur Messung der Magnetfelder in den Spalten von Lautsprechermagneten (Abb. 216).

Der bewegliche Stromkreis wird in diesem Fall durch eine Spule gebildet, deren Windungen senkrecht zum Feld stehen. Die elektromagnetische Kraft ist also eine Vertikalkraft und hat den Wert $B \cdot l \cdot i$, wenn l die Wicklungslänge bezeichnet. Wenn die beiden Waagebalken gleich sind, gilt auch hier für das Gleichgewicht

$$B \cdot l \cdot i = mg.$$

Arbeit der elektromagnetischen Kräfte

Betrachten wir noch einmal den über zwei leitende Schienen gelegten Metallstab (Abb. 211). Wir nehmen an, daß unter der Wirkung der Resultanten F der elektromagnetischen Kräfte der Stab eine Verschiebung ds parallel zu den Schienen erfährt.

Die Arbeit der elektromagnetischen Kräfte bei dieser Elementarverschiebung hat, auf ein Längenelement dl bezogen, den Wert

$$dA = \mathfrak{F} d\mathfrak{s} = i(d\mathfrak{l} \times \mathfrak{B}) d\mathfrak{s}.$$

Der Ausdruck $(d\mathfrak{l} \times \mathfrak{B}) d\mathfrak{s}$ entspricht dem Volumen des Parallelepipeds, das von den 3 Vektoren bei übereinstimmenden Vorzeichen gebildet wird. Dies führt uns wieder zu der Feststellung, daß die Arbeit positiv ist, wenn die Kraft, die sie leistet, positiv ist und ihre Richtung mit der von $d\mathfrak{s}$ übereinstimmt.

Bei einem gemischten Produkt (das man geometrisch als Volumen eines orientierten Tetraeders betrachten kann), liefert eine zyklische Vertauschung der Faktoren den Ausdruck:

$$dA = i(d\mathfrak{s} \cdot d\mathfrak{l}) \mathfrak{B}.$$

Das Vektorprodukt $(d\mathfrak{s} \cdot d\mathfrak{l})$ stellt die vom Element dl bei der Verschiebung überstrichene Fläche dar.

Infolgedessen ist dA das Produkt des Induktionsflusses $d\Phi$ durch die überstrichene Fläche mit dem Strom i:

$$dA = i d\Phi.$$

Benutzen wir nicht Einheiten eines kohärenten elektromagnetischen Maßsystems, so müssen wir diese Formel durch einen numerischen Koeffizienten ergänzen.

Wir werden im folgenden für die Einheit des Kraftflusses immer das Maxwell, d.h. ein Gauß pro cm², benutzen. Geben wir die Stromstärke in Ampere an, so hat dA die Form

$$dA = \frac{1}{10}\, i d\Phi \quad [\text{erg}].$$

Wollen wir andererseits dA in Joule ausdrücken, so müssen wir berücksichtigen, daß ein Joule $= 10^7$ erg ist, und wir erhalten

$$dA = 10^{-8}\, i d\Phi \quad [\text{Joule}].$$

Um die Gesamtarbeit zu erhalten, müssen wir die Summe aller dA über alle Elemente des Stromkreises bilden und erhalten dann

$$A = i\Delta\Phi.$$

Dabei ist $\Delta\Phi$ der Kraftfluß, der von dem Stromkreis bei seiner Verschiebung geschnitten wird. Wir wollen nun den Stromkreis in seinen Anfangs- und Endzuständen (1) und (2) betrachten. Da der aus einer geschlossenen Fläche austretende Induktionsfluß Null ist, erhält man, wenn man mit Φ_1 und Φ_2 die Induktionsflüsse durch die Kurven (1) und (2) bezeichnet, den Ausdruck

$$A_{1-2} = i(\Phi_2 - \Phi_1).$$

Die Arbeit der elektromagnetischen Kräfte ist gleich der Veränderung der Funktion $i\Phi$, die *elektromagnetische Energie* genannt wird.

Da der aus einer geschlossenen Fläche austretende Induktionsfluß gleich Null ist, stellt die Veränderung $\Delta\Phi$ nichts anderes als die Differenz zwischen Φ_1 und Φ_2 dar, d.h. die Differenz zwischen den Flüssen, die von dem Stromkreis im Anfangszustand (1) und im Endzustand (2) geschnitten werden. (Es genügt, die durch (1) und (2) umschlossene Fläche zu betrachten, die als Begrenzung die von dem Stromkreis bei seiner Verschiebung überstrichene Fläche hat.)

Ausgehend von dieser elektromagnetischen Energie, können wir leicht die auf einen Strom ausgeübten Wirkungen berechnen.

Unterliegt der Strom einer Kraft mit den Komponenten F_x, F_y, F_z, dann gilt

$$F_x\,dx + F_y\,dy + F_z\,dz = d(i\Phi).$$

Daraus ergibt sich dann

$$F_x = \frac{\partial(i\Phi)}{\partial x}\,; \qquad F_y = \frac{\partial(i\Phi)}{\partial y}\,; \qquad F_z = \frac{\partial(i\Phi)}{\partial z}.$$

Dabei können i und Φ gleichzeitig verändert werden.

Wirkt auf den Stromkreis ein Kräftepaar, so führen die gleichen Überlegungen für das Moment zu dem Ausdruck

$$C = \frac{\partial i\Phi}{\partial\Theta}.$$

Äquivalenz von Strömen und magnetischen Doppelschichten

Zur Berechnung der auf einen Strom ausgeübten Wirkungen ersetzen wir diesen durch eine magnetische Doppelschicht, die diesem hinsichtlich der ausgeübten Wirkungen äquivalent ist.

Bringt man diese magnetische Doppelschicht zum Beispiel in ein gleichförmiges Feld, so entspricht dies einem Magneten mit dem magnetischen Moment Fi. Dabei ist F die Fläche der magnetischen Doppelschicht und so orientiert, daß das Feld durch die negative Seite der Schicht eintritt.

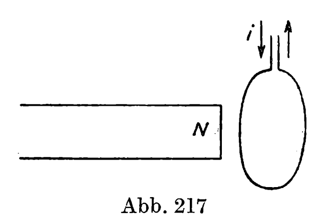


Abb. 217

Also wird sich ein Stromkreis in einem magnetischen Feld so orientieren, daß das Feld durch seine negative Seite eintritt.

Der Ausdruck $dA = i d\Phi$ zeigt andererseits, daß das Gleichgewicht stabil ist, wenn der eintretende Fluß einen Maximalwert annimmt.

Diese Resultate kann man durch folgendes Gesetz ausdrücken, das sogenannte *Gesetz des maximalen Flusses:*

Ein Stromkreis in einem Magnetfeld orientiert sich so, daß der durch seine Südseite eintretende Fluß einen Maximalwert annimmt.

Dieses Gesetz kann man experimentell nachprüfen.

Experiment. Bringt man eine Drahtschleife so in die Nähe des Nordpols eines Elektromagneten, daß seine negative Seite dem Pol gegenübersteht, dann wird die Schleife angezogen und nähert sich dem Elektromagneten. Kehrt man die Stromrichtung um, so wird die Schleife heftig abgestoßen, dreht sich und wird dann von neuem angezogen, da jetzt dem Pol wieder die negative Seite gegenübersteht (Abb. 217).

Gegenseitige Beeinflussung von Strömen

Die eben angeführten Betrachtungen für einen Stromkreis sind auch in diesem Fall anwendbar: Jeder Strom erzeugt ein Feld, das auf den anderen Stromkreis einwirkt.

Wir wollen dafür ein Beispiel angeben.

Wechselwirkung zweier paralleler Ströme

Der Strom i_1 ruft in jedem Punkt des Leiters (2) mit dem Strom i_2 ein Magnetfeld

$$H = \frac{2i}{r}$$

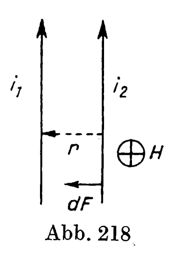


Abb. 218

hervor, das in Abb. 218 senkrecht zur Zeichenebene verläuft. Mit r ist die Entfernung der beiden Drähte voneinander bezeichnet.

Auf ein Element der Länge dl des stromdurchflossenen Leiters (2) wirkt also die Kraft

$$d\mathfrak{F} = i_2 d\mathfrak{l} \times \mathfrak{H}$$

in der Ebene der beiden Drähte:

$$dF = \frac{2\,i_1 i_2}{r}\,dl$$

in elektromagnetischen Einheiten oder

$$dF = 2\,\frac{i_1 i_2}{A^2 r}\,dl.$$

Wählt man für i andere Einheiten, dann wird A von 1 verschieden sein und z.B., bei einer Angabe von i in Ampere, den Wert 10 haben. Die AMPÈREschen Regeln zeigen, daß die Ströme sich anziehen, wenn sie die gleiche Richtung haben, während sie sich bei gegenläufigen Stromrichtungen abstoßen.

Experiment. Wir betrachten eine Selbstinduktionsspule, deren einzelne Windungen nicht starr befestigt sind. Läßt man einen starken Strom durch diese Spule fließen, dann ziehen sich die Windungen gegenseitig an. Die Erklärung dieses Phänomens ergibt sich aus den obigen Betrachtungen (Abb. 219).

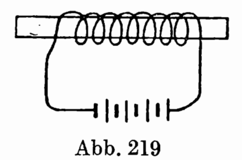


Abb. 219

Gleichheit von actio und reactio

Am Anfang dieses Kapitels hat uns das Prinzip der Gleichheit von actio und reactio den Ausdruck für die von einem Magnetfeld auf ein Stromelement ausgeübte Kraft gegeben. Die Resultante der Kräfte des Systems war Null. Damit dieses Prinzip erfüllt ist, muß außerdem das *Drehmoment* Null sein. Aus Abb. 209 ist zu ersehen, daß in dem System nur ein Drehmoment existiert, das nicht Null ist. Wir wissen jedoch, daß diese Abbildung keinem reellen Problem entspricht. Betrachtet man z.B. einen von einem Strom durchflossenen *geschlossenen Stromkreis*, so erhält man aus der Rechnung ohne weiteres, daß das resultierende Drehmoment verschwindet. Bei einem ebenen Stromkreis wählen wir einen Punkt P in der Ebene und vergleichen die Stromelemente, die von P aus unter dem gleichen kleinen Winkel gesehen werden, paarweise miteinander. Die Momente der entsprechenden Kräfte in bezug auf P kompensieren sich. Diese Kompensation erstreckt sich auf den gesamten Stromkreis. Handelt es sich um einen räumlichen Stromkreis, so kann dieser in elementare Stromkreise zerlegt werden, wobei das Drehmoment jedes einzelnen Elementes ebenfalls Null ist.

III. KAPITEL

Allgemeines über die Bestimmung der Felder. Potentialprobleme

Wir behandeln nun die sehr allgemeine Situation, bei der die Verteilung eines (elektrischen oder magnetischen) Feldes in einem Medium mit bekannten Eigenschaften (Dielektrizitätskonstante, magnetische Permeabilität) bestimmt werden soll, wobei die Grenzbedingungen mathematisch sorgfältig definiert werden müssen und physikalisch auf eine Verteilung der gegebenen Ladungen in

bestimmten Volumina bzw. eine Verteilung gegebener Potentiale auf bestimmten Flächen führen.

Die Probleme der Leitung sind genau von der gleichen Art, wie wir sie im IV. Kapitel behandelt haben: Die Verteilung des Potentials befriedigt hier ebenso wie in der Elektrostatik und auch in der Magnetostatik die Gleichung $\Delta V = 0$. In einem elektrolytischen Trog kann sich jenseits einer semipermeablen Wand ein Elektrolyt mit einer größeren Leitfähigkeit σ_1 als der Leitfähigkeit σ des äußeren Mediums befinden, ebenso wie sich in der Elektrostatik ein Körper mit der Dielektrizitätskonstanten ε_1 in einem Medium mit der Dielektrizitätskonstanten ε befinden kann. In beiden Fällen wird das Problem der Potentialverteilung genau das gleiche sein.

Auch im Falle der von Strömen erzeugten Magnetfelder ändert sich nichts: obgleich die Elementargesetze für die Felder sehr stark vom COULOMBschen abweichen, leiten sich die Felder schließlich doch von einem Potential her, mit Ausnahme vielleicht auf bestimmten Grenzflächen (siehe „magnetische Doppelschichten“, Seite 197), und man kann zu ihrer Bestimmung die gleichen mathematischen Methoden verwenden.

Wir werden uns hier auf die Bestimmung der Felder über die Potentiale in homogenen und isotropen Medien beschränken.

Das allgemeine Problem wird also in dem Auffinden einer Lösung der LAPLACEschen Gleichung

$$\Delta V = 0$$

bestehen, wobei V das Potential (Ortsfunktion) und Δ der bereits oft angegebene LAPLACE-Operator ist:

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}.$$

Die Lösung wird durch die Grenzbedingungen bestimmt, die sie befriedigen muß. Wir wollen annehmen, daß diese Bedingungen vom physikalischen Standpunkt genau die Eigenschaften besitzen, die zur mathematischen Bestimmung der Lösung erforderlich sind, wie es nach der physikalischen Natur des Problems und der Bedeutung von V offensichtlich ist. Die Einheitlichkeit dieser Lösung wurde übrigens bereits früher erkannt und in besonders einfachen Fällen angewandt, im allgemeinen in Form des Theorems der überlagerten Gleichgewichtszustände, aus denen wieder ein Gleichgewichtszustand resultiert (siehe dazu Seite 52f.).

Als Beispiel für Grenzbedingungen wollen wir die folgenden nennen:

$V = \text{const}$ auf der Oberfläche jedes Leiters in der Elektrostatik;

$V = \text{const}$ auf der Oberfläche jedes sehr guten, in einen Elektrolyten eingetauchten Leiters in der Elektrokinetik;

$\int \frac{\partial V}{\partial n}\, dF = \text{const}$; dieses Integral gibt in der Elektrostatik (siehe GAUSSsches Theorem) die Ladung eines isolierten Leiters an oder in der Elektrokinetik den gesamten, aus einer sehr gut leitenden Elektrode austretenden Strom;

$V = 0$ im Unendlichen, wenn es sich um Potentiale handelt, die von Ladungen, Dipolen oder Magneten herrühren.

Bemerkung: Wir erinnern uns, daß das Potential nur bis auf eine additive Konstante bestimmt ist und nur Potentialdifferenzen einen physikalischen Sinn besitzen. Es erweist sich jedoch häufig als bequeme Übereinkunft, die Konstante so zu wählen, daß das Potential im Unendlichen verschwindet. Ebenso kann man auch vereinbaren, das Potential V auf einen bestimmten Leiter Null zu setzen.

Wir werden noch feststellen, daß ein im ganzen Raum gleichförmiges Feld eine bequeme Abstraktion ist, die das mit unseren physikalischen Mitteln in einem bestimmten Volumen erzeugte streng gleichförmige Feld verallgemeinert. Mit E wollen wir das entlang der z-Achse gerichtete überlagerte Feld bezeichnen. Es sei abgeleitet von einem Potential $-Ez$, und es wird sich als bequem herausstellen, Potentiale der Form

$$V = -Ez + V_1$$

zu betrachten. Dabei ist V_1 ein Potential, das von einer Verteilung endlicher Ladungen in einem endlichen Abstand herrührt und für das gilt:

$$V_1(\infty) = 0.$$

Führt man einen oder mehrere Körper ein, deren spezifische Konstanten sich von denen des Mediums unterscheiden, in das sie getaucht werden, oder betrachtet man zwei Medien mit verschiedenen Eigenschaften, die durch eine Grenzfläche getrennt werden, so ist es zweckmäßig, die Potentiale in den Körpern 1, 2, ... entsprechend mit V_1, V_2, ... zu bezeichnen. Dabei ist V tatsächlich *das* Potential des Problems, besitzt aber natürlich in den einzelnen Medien einen verschiedenen analytischen Ausdruck, und man unterscheidet am besten das Potential in den verschiedenen Medien durch eine entsprechende Bezeichnung: $V = V_1$ im Medium 1, $V = V_2$ im Medium 2. ...

Nun müssen nur noch die Singularitäten dieser Funktionen betrachtet werden. Im Potential gibt es, mit Ausnahme auf den *Ladungen*, auf den *Elektroden*, auf den *Magneten* (oder auf den *Doppelschichten*) keine Singularitäten. Auf jeder Trennfläche muß man nun die Grenzbedingungen für die Ableitungen des Potentials angeben, wobei diese Bedingungen auf den Seiten 123 bis 124 für magnetische Verhältnisse bereits angeführt sind und sogenannte „magnetisierte" Medien behandelt wurden. Aus den Ausführungen ergibt sich klar, daß es sich einfach um Medien handelte, die alle eine verschiedene magnetische Permeabilität besitzen. Die gleichen Bedingungen gelten (siehe gleiche Begründungen, gleiche Beweise wie auf den Seiten 123 bis 124) für die Elektrostatik mit einer Dielektrizitätskonstanten ε, und zwar:

Die Tangentialkomponente E_t des elektrischen Feldes $\mathfrak{E}$ weist keine Diskontinuität auf:

$$(E_t)_1 = (E_t)_2,$$

wenn man vom Medium 1 durch die Trennfläche zum Medium 2 fortschreitet.

Die Normalkomponente D_n der dielektrischen Induktion ϑ weist ebenfalls keine Diskontinuität auf:

$$(D_n)_1 = (D_n)_2,$$

wobei sich diese Bedingungen auch als Funktion der Potentiale ausdrücken lassen müssen:

$$\left(\frac{\partial V}{\partial t}\right)_1 = \left(\frac{\partial V}{\partial t}\right)_2 \quad \text{und} \quad \varepsilon_1\left(\frac{\partial V}{\partial n}\right)_1 = \varepsilon_2\left(\frac{\partial V}{\partial n}\right)_2,$$

wenn ε_1 und ε_2 die Dielektrizitätskonstanten und die Indizes t und n die Richtungen tangential bzw. normal zur Trennfläche zwischen den beiden Medien mit ε_1 und ε_2 bedeuten.

Man kann diese Darstellung noch weiter präzisieren, indem man das Potential bei Annäherung an eine Ladung oder einen Magneten unendlich werden läßt:

$$V = \frac{e}{\varepsilon r} + V',$$

wenn im Punkt $r = 0$ eine Ladung e in einem Medium mit der Dielektrizitätskonstanten ε existiert. Mit V' wird das im betrachteten Punkt, der sich im Abstand r von 0 befindet, von anderen Ladungen hervorgerufene Potential bezeichnet, und dieses Potential bleibt endlich, wenn $r \to 0$, d.h., wenn sich der Punkt der Ladung nähert. Es gilt

$$V = \frac{m \cos\Theta}{r^2} + V',$$

wenn ein Magnet mit dem magnetischen Moment $\mathfrak{m}$ sich im Ursprung in einer Richtung befindet, die mit dem Vektor $\mathfrak{r}$ (der den Ursprung mit dem betrachteten Punkt verbindet) den Winkel Θ einschließt. Dabei ist μ die magnetische Permeabilität des Mediums, und V' bleibt endlich, wenn r gegen Null geht, d.h., der Punkt, in dem man V betrachtet, nähert sich dem Magneten.

Diese asymptotischen Formen von V für r gegen Null sind keine Grenzbedingungen, bieten jedoch wenigstens in den einfachen Fällen eine große Hilfe bei der Wahl der Lösungen.

Wiederholung der LAPLACEschen Gleichung und der harmonischen Funktion

In kartesischen Koordinaten lautet die LAPLACEsche Gleichung

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} = 0. \tag{1}$$

In Zylinderkoordinaten r, φ, z hat sie die Form

$$\frac{\partial^2 V}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial V}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 V}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} = 0. \tag{2}$$

Die Schreibweise in Kugelkoordinaten r, Θ, φ lautet

$$\frac{\partial^2 V}{\partial r^2} + \frac{2}{r}\frac{\partial V}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 V}{\partial \Theta^2} + \frac{\operatorname{cotg}\Theta}{r^2}\frac{\partial V}{\partial \Theta} + \frac{1}{r^2 \sin^2}\frac{\partial^2 V}{\partial \varphi^2} = 0. \tag{3}$$

Wir erinnern uns, daß im Falle der Kugelkoordinaten

$$x = r \sin\Theta \cos\varphi,$$

$$y = r \sin\Theta \sin\varphi,$$

$$z = r \cos\Theta.$$

Man nennt jede Lösung der LAPLACEschen Gleichung *harmonische Funktion*.
Es ergibt sich sofort, daß

$$\frac{1}{r}, \quad \frac{1}{|\mathfrak{r} - \mathfrak{r}_0|}, \quad r \cos \Theta \ (= z) \quad \text{und} \quad \frac{\cos \Theta}{r^2}$$

harmonische Funktionen sind.

Ebenso kann man auch feststellen, daß dies für

$$r^n P_n (\cos \Theta) \quad \text{und} \quad r^{-(n+1)} P_n (\cos \Theta)$$

gilt.

$P_n (\cos \Theta)$ ist das LEGENDREsche Polynom der Ordnung n, wobei n eine ganze Zahl ist. Will man wissen, welche Differentialgleichung $P_n (\cos \Theta)$ befriedigt, so genügt es, $V = r^n P_n (\cos \Theta)$ in der LAPLACEschen Gleichung (3) zu substituieren. Wir wollen nur die Lösungen angeben. Setzen wir $x = \cos \Theta$, dann gilt für

$$\begin{aligned} n &= 0 \quad P_0(x) = 1, \\ n &= 1 \quad P_1(x) = \cos \Theta = x, \\ n &= 2 \quad P_2(x) = \frac{3x^2 - 1}{2}, \\ n &= 3 \quad P_3(x) = \frac{1}{2} (5x^3 - 3x) \end{aligned} \tag{4}$$

mit der allgemeinen Formel

$$P_n(x) = \frac{1}{2^n n!} \cdot \frac{d^n}{d x^n} (x^2 - 1)^n.$$

Man wird natürlich feststellen, daß diese Funktionen $r^n P_n (\cos \Theta)$ der Lösung von Problemen mit Rotationssymmetrie um die Achse Oz (d.h. die Achse $\Theta = 0$) entsprechen, wobei die Azimutvariable φ keine Rolle spielt. Geht auch φ in die Gleichung ein, so müssen die Lösungen notwendig von der Form

$$r^n P_n^m (\cos \Theta) \cos m\varphi \quad (\text{oder} \sin m\varphi)$$

sein. Dabei muß m ganzzahlig sein, damit die Funktionen in einem Punkt nur einen einzigen Wert besitzen, d.h. sich nicht verändern können, wenn φ um 2π, $4\pi, \ldots$ anwächst, und $P_n^m (\cos \Theta)$ ist eine sogenannte „tesserale harmonische“ Funktion und komplizierter als ein LEGENDREsches Polynom, und wir wollen sie hier nicht näher behandeln.

Man kann nun auch den Fall betrachten, wo die Variable z keine Rolle spielt, d.h. ein zweidimensionales Problem. Führt man die Polarkoordinaten r und Θ ein, so sieht man, daß

$$\log r, \quad \log |\mathfrak{r} - \mathfrak{r}_0|, \quad r^n \cos n\Theta \quad \text{und} \quad r^n \sin n\Theta$$

und schließlich auch

$$r^{-n} \cos n\Theta \quad \text{und} \quad r^{-n} \sin n\Theta \quad (\text{wobei } n \text{ ganzzahlig ist})$$

harmonische Funktionen mit zwei Dimensionen sind.

Betrachtet man zum Schluß das allgemeine dreidimensionale Problem in Zylinderkoordinaten r, φ, z, so gelangt man zu einer *Separation der Variablen*, wenn man eine Lösung der Form

$$f(r) \cos m\varphi e^{\pm \alpha z}$$

sucht; α kann dabei beliebig sein, d.h. reell oder imaginär, während m ganzzahlig sein muß, wenn die Funktion bestimmt ist.

Man hat dann

$$\frac{\partial^2 V}{\partial z^2} = \alpha^2 V,$$

$$\frac{\partial^2 V}{\partial \varphi^2} = -m^2 V,$$

$$\frac{\partial^2 V}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial V}{\partial r} = \left(\frac{\partial^2 f}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial f}{\partial r}\right) \cos m\varphi e^{\pm \alpha z}.$$

Setzt man dies in die LAPLACEsche Gleichung ein, so ergibt sich

$$\frac{d^2 f}{dr^2} + \frac{1}{r}\frac{df}{dr} + \left(\alpha^2 - \frac{m^2}{r^2}\right) f(r) = 0,$$

was man auch in der Form schreiben kann:

$$\frac{d^2 f}{d(\alpha r)^2} + \frac{1}{\alpha r}\frac{df}{d(\alpha r)} + \left(1 - \frac{m^2}{(\alpha r)^2}\right) f = 0.$$

Die beiden linear unabhängigen Lösungen dieser Gleichung lauten

$$J_m(\alpha r) \quad \text{und} \quad N_m(\alpha r).$$

Dabei sind J_m und N_m BESSELsche Funktionen erster bzw. zweiter Art der Ordnung m, von denen wir hier weiter nicht reden wollen. Der interessierte Leser sei auf Lehrbücher der Wellenausbreitung verwiesen.

Mathematisches Beispiel. Axialsymmetrische Probleme

Als Beispiel für die Anwendung harmonischer Funktionen wollen wir den folgenden Fall betrachten (Abb. 220).

Ein Punkt P befindet sich in den Entfernungen r von O und R von A, wobei der Punkt A seinerseits von O um den Abstand h entfernt ist. Man will nun die Funktion $\frac{1}{R}$ in der Nähe des Nullpunktes (tatsächlich für $r < h$) in eine Reihe nach r entwickeln. Dabei sei Θ der in der Abbildung angegebene Winkel. Offensichtlich erhält man

$$\frac{1}{R} = \frac{1}{h} \cdot 1 + a_1 \frac{r}{h} + a_2 \frac{r^2}{h^2} + \cdots,$$

wobei die Koeffizienten $a_1, a_2, \ldots$ Funktionen nur von Θ sind.

Da nun aber $\frac{1}{R}$ eine harmonische Funktion ist, sind auch alle Terme der Reihe vom zweiten Glied an harmonische Funktionen, also ist $a_n \frac{r^n}{h^n}$ von der Form $\alpha_n P_n (\cos \Theta) \frac{r^n}{h^n}$, wobei α_n eine Konstante ist. Um die α_n zu bestimmen, betrachtet man einen Punkt auf der Achse OA, d.h. $\Theta = 0$. Die Entwicklung lautet dann

$$\frac{1}{R} = \frac{1}{h-r} = \frac{1}{h} \cdot 1 + \frac{r}{h} + \frac{r^2}{h^2} + \cdots,$$

also ist

$$\alpha_n P_n (1) = 1.$$

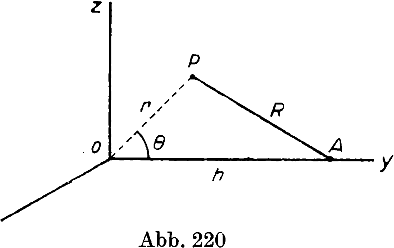


Abb. 220

Man weiß jedoch nun (oder sieht sofort), daß $P_n(1) = 1$, welchen Wert n auch habe, d.h. $\alpha_n = 1$. Allgemein gilt für beliebige r und Θ $(r < h)$:

$$\frac{1}{R} = \frac{1}{h} \cdot 1 + \frac{r}{h} \cos \Theta + \frac{r^2}{h^2} \left(\frac{3 \cos^2 \Theta - 1}{2} \right) + \cdots + \frac{r^n}{h^n} P_n (\cos \Theta) + \cdots \quad (5)$$

Die aus dem vorstehenden Beispiel gewonnenen Erkenntnisse kann man nun auf alle axialsymmetrischen Probleme übertragen: Ist man in der Lage, die harmonische oder die Potentialfunktion auf der Achse zu bestimmen, so erhält man sofort ihre Form im ganzen Raum.

Definiert tatsächlich $\Theta = 0$ diese Achse, so hat die ein beliebiges Problem befriedigende harmonische Funktion die Form[1])

$$V = \sum_n \left(a_n r^n + \frac{b_n}{r^n + 1} \right) P_n (\cos \Theta), \quad (6)$$

wobei a_n und b_n Konstante sind, die zur Befriedigung der Grenzbedingungen dienen.

Das Potential auf der Achse wird man durch die Annahme $\Theta = 0, \Theta = 1$ und $r = z$ (wenn z die Symmetrieachse ist) unter Ausnutzung der Tatsache, daß $P_n (\cos \Theta) = 1$ für $\Theta = 0$ erhalten zu

$$V_z = \sum_n \left(a_n z^n + \frac{b_n}{z^{n+1}} \right);$$

nun ist jedoch V_z nach Annahme bekannt, man hat also die Möglichkeit, die a_n und b_n zu ermitteln und erhält so die vollständige Bestimmung der Gleichung (6).

Magnetfeld einer Kreisschleife

Eine Kreisschleife mit dem Radius a, deren Mittelpunkt auf der Achse Oz liege, wird von einem Strom I durchflossen. Eine einfache Rechnung ergibt für das magnetische Potential auf der Achse

$$V_z = 2\pi I \left(1 - \frac{z}{\sqrt{a^2 + z^2}} \right).$$

[1]) Wir *nehmen an,* daß die Möglichkeit einer solchen Entwicklung gegeben sei. Der Beweis ist einfach und hat rein mathematisches Interesse.

Dieser Ausdruck kann in der folgenden Weise entwickelt werden:

$$\text{für}\quad z \leqslant a : V_z = 2\pi I\left(1 - \frac{z}{a} + \frac{z^3}{2a^3}\cdots\right)$$

$$\text{für}\quad z \geqslant a : V_z = 2\pi I\left(\frac{a^2}{2z^2} - \frac{3a^4}{8z^4} + \cdots\right).$$

Man wird sofort auf die Reihen geführt, die das Potential im gesamten Raum darstellen, wenn man die Resultate der vorstehenden Rechnung anwendet:

$$\text{Für}\quad r < a \quad V = \sum_n \alpha_n r^n P_n(\cos\Theta), \tag{1}$$

wobei

$$\alpha_0 = 2\pi I, \quad \alpha_1 = -2\pi I, \ldots, \quad \alpha_{2n+1} = 2\pi I(-1)^{n+1}$$

$$\text{für}\quad r > a \quad V = \sum_n \beta_n \frac{P_n(\cos\Theta)}{r^{n+1}} \cdot \frac{1\cdot 3\cdot\cdots\cdot(2n-1)}{2\cdot 4\cdot\cdots\cdot 2n}\,\frac{1}{a^{(2n+1)}};$$

mit

$$\beta_0 = \beta_2 = \beta_4 = \cdots = 0; \quad \beta_1 = 2\pi I\,\frac{a^2}{2};$$

$$\beta_{2n+1} = 2\pi I\cdot(-1)^n\,\frac{-1\cdot 3\cdot\cdots\cdot(2n+1)}{2\cdot 4\cdot\cdots\cdot(2n+2)}\,a^{2n-z}.$$

Bemerkung: In den meisten elektronenoptischen Geräten handelt es sich um axialsymmetrische Probleme, und die vorstehende Methode findet hier oft Anwendung.

Einfache dreidimensionale Probleme

In den folgenden Beispielen handelt es sich ebenfalls um axialsymmetrische Probleme, wobei die Potentiale jedoch mit Hilfe einer kleinen Anzahl endlicher Ausdrücke noch einfacher darstellbar sind.

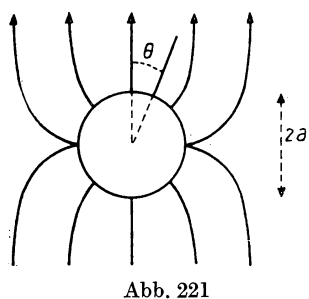


Abb. 221

1. *Leitende Kugel in einem gleichförmigen elektrischen Feld* (Abb. 221). Das gleichförmige Feld E verläuft entlang Oz. Das entsprechende Potential beträgt $-Ez$ oder $-Er\cdot\cos\Theta$, wobei neue Terme im Potential wegen der auf der Kugel mit dem Radius a induzierten Ladungsdichte $\sigma(\Theta)$ auftreten.

Setzt man $V = -Er\cos\Theta + V_1$ und erinnert sich, daß V_1 im Unendlichen verschwindet, so findet man für V_1 eine Form, die auf der leitenden Kugel $V = \text{const}$ ergibt. Setzt man diese Konstante gleich Null, so wird V_1 den Faktor $\cos\Theta$ besitzen, d. h., V_1 ist notwendigerweise von der Form

$$V_1 = \frac{B\cos\Theta}{r^2};$$

denn $\frac{\cos\Theta}{r^2}$ ist die einzige harmonische Funktion (in $r \cos\Theta$), die den Faktor $\cos\Theta$ enthält.

Setzen wir $V = 0$ für $r = a$, so gilt

$$B = E a^3,$$

und folglich ist

$$V = \left(-E r + \frac{E a^3}{r^2}\right) \cdot \cos\Theta$$

die Lösung des Problems.

Die *Ladungsdichte* σ auf der Kugel ergibt sich nach dem GAUSSschen Theorem zu

$$4\pi\sigma = -\left(\frac{\partial V}{\partial r}\right)_{r=a} = E_0\left(1 + \frac{2a^3}{r^3}\right)_{r=a} \cos\Theta$$

und

$$\sigma = \frac{3}{4\pi} \cdot E_0 \cos\Theta .$$

Die gesamte auf der Kugel induzierte Ladung ist Null: Tatsächlich ist $\cos\Theta = 0$.

Untersucht man dieses Problem jetzt bei einer Kugel, die anfänglich die Ladung Q trägt, so ergibt das Prinzip der Überlagerung von Zuständen einfach einen zusätzlichen Term in V:

$$V = -E r \cdot \cos\Theta + \frac{E a^3}{r^2} \cos\Theta + \frac{Q}{r} .$$

Entsprechend der Abb. 221 treten die Kraftlinien senkrecht aus der Oberfläche der leitenden Kugel aus.

Bemerkung. Die Lösung dieses Problems folgt auch aus der Theorie der Spiegelung, wenn man den influenzierenden Punkt ins Unendliche verschiebt.

Wir stellen fest, daß die Bedingung $V =$ const auf der leitenden Oberfläche und die Tatsache, daß kein elektrisches Feld im Leiter existiert, bei diesem Problem die zusätzlichen Kontinuitätsbedingungen für die Ableitungen verschwinden lassen, was wir in den folgenden Beispielen bestätigt finden werden.

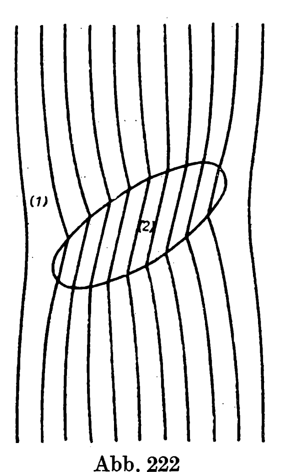


Abb. 222

2. *Dielektrische Kugel mit der Dielektrizitätskonstanten ε_2 in einem Medium mit ε_1 unter der Wirkung eines gleichförmigen Feldes.* Es existiert ein allgemeines Resultat, das wir hier zitieren wollen: Wird das Medium ε_2 durch eine *Fläche zweiten Grades* begrenzt, so ist das im Innern induzierte Feld gleichförmig (Abb. 222). Wir werden dieses Resultat bei der Betrachtung einer *Kugel* wiederfinden. Mit V_1 bezeichnen wir das Potential im äußeren Medium (ε_1), mit V_2 das Potential in der Kugel (ε_2):

$$\Delta V_1 = 0, \quad \Delta V_2 = 0,$$

$$V_1 = -E r \cos\Theta + V_1' .$$

V_1' ist dabei ein Potential, daß für $r \to \infty$ verschwindet. V_2 bleibt ohne Singularitäten in der Kugel endlich.

Weiterhin muß gelten

$$V_1 = V_2 \quad \text{für} \quad r = a \quad \text{(Kontinuität des Potentials)}, \tag{7}$$

$$\varepsilon_1 \frac{\partial V_1}{\partial r} = \varepsilon_2 \frac{\partial V_2}{\partial r} \quad \text{für} \quad r = a \quad \text{(Kontinuität der Normalkomponente der Induktion)}.$$

Die Bedingung $V_1 = V_2$ für $r = a$ wird *leichter* zu befriedigen sein, wenn V_1' und V_2 nur Ausdrücke in $\cos\Theta$ enthalten (entsprechend wird man auch Terme in $P_n(\cos\Theta)$ in V_1' und V_2 haben, die sich für $r = a$ gegeneinander aufheben).

Wir setzen also

$$\begin{aligned} V_1 &= E r \cos\Theta + \frac{A}{r^2}\cos\Theta, \\ V_2 &= B r \cos\Theta. \end{aligned} \tag{8}$$

Die beiden Bedingungen (7) bestimmen A und B, und da ein Potentialproblem nur eine Lösung besitzt, werden die Gleichungen (8) die Lösung des Problems ohne weitere Ausdrücke in $P_n(\cos\Theta)$ sein.

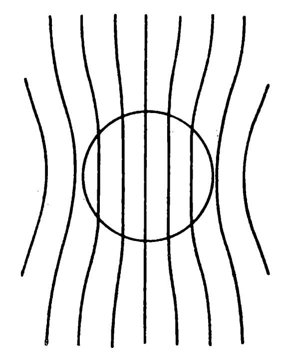


Abb. 223

Aus Gleichung (7) erhält man

$$A = \frac{\varepsilon_2 - \varepsilon_1}{\varepsilon_2 + 2\varepsilon_1} E a^3;$$

$$B = -\frac{3\varepsilon_1}{\varepsilon_2 + 2\varepsilon_1} E.$$

Dieser letzte Wert von B ergibt für die Kugel ein *gleichförmiges* Feld mit dem Wert

$$E_2 = \frac{3\varepsilon_1}{\varepsilon_2 + 2\varepsilon_1} E.$$

Dies ist das von dem äußeren gleichförmigen Feld E induzierte Feld.

In Abb. 223 ist die Form der Kraftlinien dargestellt. Sie verlaufen innerhalb der Kugel geradlinig und parallel zueinander; ihre Dichte ist gegenüber den Kraftlinien von E in größerer Entfernung (wo E_1 gleichförmig wird und mit E zusammenfällt) durch das Verhältnis

$$\frac{3\varepsilon_1}{\varepsilon_2 + 2\varepsilon_1}$$

gegeben. Physikalisch erklärt man das Nichtauftreten von Termen höheren Grades in der Lösung (mit $n > 1$) folgendermaßen: Wenn ein solcher Ausdruck existieren würde, müßte er die Form $\alpha_n r^n P_n(\cos\Theta)$ in der Kugel und $\beta_n \frac{P_n(\cos\Theta)}{r^{n+1}}$

im äußeren Medium aufweisen. $V_1 = V_2$ für $r = a$ würde ein Verhältnis von α_n zu β_n ergeben, und die Bedingung

$$\varepsilon_1 \frac{\partial V_1}{\partial r} = \varepsilon_2 \frac{\partial V_2}{\partial r} \quad \text{für} \quad r = a$$

ergäbe ebenfalls einen Wert für das Verhältnis α_n/β_n, wobei dieser offensichtlich ein anderer sein müßte, d.h.

$$\alpha_n = \beta_n = 0.$$

3. *Ein kleiner Magnet im Zentrum eines kugelförmigen Hohlraums in einem Medium mit der Permeabilität* μ. Das magnetische Moment des Magneten ist mit $\mathfrak{m}$ bezeichnet (Abb. 224):

$$V_1 = \frac{m \cos\Theta}{r^2} + V_1' \quad \text{(im Hohlraum)}.$$

Abb. 224

V_2 verschwindet in größerem Abstand, und in der Annahme einer Symmetrie in $\cos\Theta$ werden wir auf folgenden Ansatz geführt:

$$V_1 = \frac{m \cos\Theta}{r^2} + A r \cos\Theta,$$

$$V_2 = \frac{B \cos\Theta}{r^2}.$$

A und B sind bestimmt durch:

$$V_1 = V_2 \quad \text{für} \quad r = a,$$

$$\frac{\partial V_1}{\partial r} = \mu \frac{\partial V_2}{\partial r} \quad \text{für} \quad r = a.$$

Die letzte Gleichung drückt die Kontinuität der Normalkomponente der Induktion aus. Die Bedingungen sind befriedigt, wenn

$$A = \frac{2(1-\mu)\,m}{(1+2\mu)a^3}, \quad B = \frac{3m}{1+2\mu}.$$

Man findet also ein Problem, das dem vorstehenden reziprok oder invers ist. Dieses Mal bildet der Magnet die ursprüngliche Quelle der Polarisation und nicht ein gleichförmiges Feld. Auf der Innenwand des Hohlraumes bildet sich jedoch schließlich entsprechend einer Verteilung in $\cos\Theta$ ein induzierter Magnetismus aus, der seinerseits im Hohlraum ein gleichförmiges Supplementärfeld aufbaut.

Zweidimensionale Probleme

1. *Ein langer, senkrecht zu seiner Achse magnetisierter Zylinder.* Wir bezeichnen mit y das magnetische Moment der Volumeneinheit (Magnetisierungsstärke) und nehmen die Magnetisierung als gleichförmig an (Dauermagnet). Die Normalkomponente der Induktion auf der Zylinderoberfläche ergibt sich nach der Gleichung

$$\mathfrak{B} = \mathfrak{H} + 4\pi\mathfrak{J}$$

zu

$$-\frac{\partial V_1}{\partial r} + 4\pi J\cos\Theta = -\frac{\partial V_2}{\partial r} \quad \text{für} \quad r = a. \tag{9}$$

Man sieht weiterhin, daß

$$V_1 = 2\pi Jr\cos\Theta \quad \text{innen}$$

und

$$V = 2\pi J\frac{a^2}{r}\cos\Theta \quad \text{außen}$$

auf der Oberfläche die Bedingung

$$V_1 = V_2$$

und die Gleichung (9) befriedigen. Die Funktionen $r \cdot \cos\Theta$ und $\frac{\cos\Theta}{r}$ genügen im zweidimensionalen Fall der LAPLACEschen Gleichung $\Delta V = 0$. Wenn der Zylinder schließlich unendlich groß ist (was dem ebenen Problem entspricht), verschwindet das durch den Magneten im äußeren Medium erzeugte Potential im Unendlichen wie $\frac{1}{r}$. Die Symmetrie der Normalkomponenten $J \cdot \cos\Theta$ der Magnetisierung auf dem Zylinder rührt von der Symmetrie aller Potentialterme in $\cos\Theta$ her.

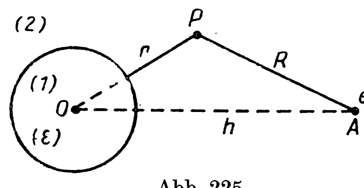


Abb. 225

2. *Polarisation eines dielektrischen Zylinders durch eine parallel zu seiner Achse verlaufende lineare elektrische Ladung.* Die in Abb. 225 dargestellte Linienladung schneidet die Bildebene im Punkt A. Ihre Ladung pro Längeneinheit beträgt e, und sie befindet sich im Abstand h vom Zentrum O des Zylinders. Der Radius des Zylinders beträgt a und die Dielektrizitätskonstante ε_1.

Das Potential dieser Linie im Raum beträgt

$$-2e\log R + \text{const}$$

in jedem Punkt P in der Entfernung R von der Linie.[1])
Man setzt

$$V_1 = \sum_{n=0}^{\infty} A_n r^n \cos n\Theta,$$

$$V_2 = -2e\log R + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{B}{r^n}\cos n\Theta. \tag{10}$$

[1]) Eine einfache Rechnung beweist dies: Man integriert das von allen Linienelementen in P aufgebaute Potential.

Erinnern wir uns daran, daß im zweidimensionalen Fall die harmonischen Funktionen der Ordnung n einfach von der Form $r^n \cos n\Theta$ und $\frac{\cos n\Theta}{r^n}$ sind, dann befriedigen V_1 und V_2 bereits die Bedingung $\Delta V = 0$. Es bleibt dann zu zeigen:

$$V_1 = V_2 \quad \text{für} \quad r = a,$$

$$\varepsilon \frac{\partial V_1}{\partial r} = \frac{\partial V_2}{\partial r} \quad \text{für} \quad r = a. \tag{11}$$

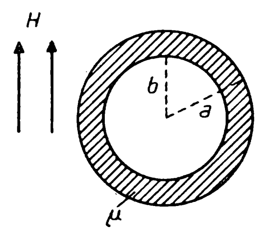


Abb. 226

Dabei ist $r = a$ kleiner als h. Man wird folglich die Entwicklung von $\log R$ als Funktion von $\frac{r}{h}$ für $\frac{r}{h} < 1$ ansetzen, die die Form besitzt:

$$\log R = \log h - \frac{r}{h} \cdot \cos\Theta - \frac{r^2}{2h^2} \cos 2\Theta \ldots \tag{12}$$

(Die entsprechende Methode besteht in folgendem: Man setzt $z = x + iy$, entwickelt $\log h - z$ in Potenzen von $\frac{z}{h}$ und betrachtet nur die Realterme.)

Drückt man nun (11) durch (10) aus und betrachtet Gl. (12), dann wird

$$A_0 = -2e \log h + B_0, \quad B_0 \text{ ist eine willkürliche Konstante}.$$

Nach Reduktion findet man

$$(\varepsilon + 1) A_n = \frac{4\varepsilon}{n h^n} \quad \text{und} \quad B_n = \frac{A_n a^{2n}}{2} (\varepsilon - 1),$$

wodurch die Lösungen vollständig bestimmt sind.

Probleme der magnetischen Abschirmung

Bei geometrisch einfachen Formen können die Probleme der *statischen* magnetischen Abschirmung, wie wir sie auch auf der Seite 329 betrachten, sehr schnell mit den bereits entwickelten Methoden gelöst werden.

1. Bei einem *Stahlrohr mit der Permeabilität* μ (siehe Abb. 226), dem Innenradius b, dem Außenradius a, das in ein gleichförmiges äußeres Magnetfeld H gebracht wird, tritt im Inneren nur ein gleichförmiges Feld

$$H_{\text{innen}} = \frac{4\mu H}{(\mu + 1)^2 - (\mu - 1)^2 \frac{b^2}{a^2}} \approx \frac{4}{\mu} \cdot \frac{H}{1 - \frac{b^2}{a^2}}$$

auf, da μ sehr groß gegen 1 ist. Eine bemerkenswerte Reduktion des Feldes tritt offensichtlich nur dann ein, wenn $\frac{b}{a}$ merklich kleiner als 1 ist:

Die magnetische Abschirmung wird durch Volumen- und Gewichtszunahme erkauft.

2. *Eine Kugelschale in einem gleichförmigen Feld H* besitzt im Inneren ein Feld

$$H_{\text{innen}} = \frac{9\mu}{2} \cdot \frac{H}{\left[(\mu+1)^2 - (\mu-1)^2 \cdot \frac{b^3}{a^3} + \frac{\mu}{2}\right]}.$$

Ist μ sehr groß und $\frac{a}{b}$ sehr klein gegen 1, dann beträgt der Grenzwert

$$H_{\text{innen}} = \frac{4{,}5}{\mu} \cdot H.$$

Es ist in jedem Fall zweckmäßig, μ so groß wie möglich zu wählen. Wir wollen auf die Ableitung dieser Formeln verzichten.

IV. KAPITEL

Elektromagnetische Induktion

Elektromotorische Induktionsspannung

Wir verschieben einen von einem Strom i durchflossenen Stromkreis in einem Magnetfeld. Die Arbeit der elektromotorischen Kräfte ist dann gegeben zu

$$\Delta A = i \Delta \Phi.$$

Mit U bezeichnen wir die elektromotorische Kraft, die den Strom erzeugt. Nach dem Prinzip der Energieerhaltung muß die vom Generator erzeugte Energie vollständig in Form von Wärme (JOULEscher Effekt) und mechanischer Arbeit wieder auftreten:

$$U i \Delta t = R i^2 \Delta t + i \Delta \Phi.$$

Dividieren wir durch $i \Delta t$, so können wir den Ausdruck umformen in

$$U = Ri + \frac{\Delta \Phi}{\Delta t}.$$

Dies ist nichts anderes als das OHMsche Gesetz; die Größe $\Delta \Phi / \Delta t$ stellt eine elektromotorische Gegenkraft oder eine der EMK entgegengerichtete Spannung dar.

Diese Größe wird *elektromotorische Induktionsspannung* genannt:

$$e = -\frac{\Delta \Phi}{\Delta t}$$

in elektromagnetischen Einheiten; in Volt ausgedrückt:

$$e = -10^{-8} \frac{\Delta \Phi}{\Delta t}.$$

In beiden Fällen wird Φ in Maxwell gemessen.

Wie wir bereits wissen, gilt folgendes: 1 Volt $= 10^8$ elektromagnetische Spannungs-Einheiten. Dieses Resultat werden wir auch aus den folgenden Energiebetrachtungen erhalten.

Für die elektrodynamische Energie $i\,\Delta\Phi$ in elektromagnetischen Einheiten kann man auch

$$\frac{1}{10}\, i\,\Delta\Phi \quad [\text{erg}]$$

setzen. Dabei wird i in Ampere, $\Delta\Phi$ in Maxwell und $10^{-8}\, i\,\Delta\Phi$ in Joule angegeben. Für die Leistung ergibt sich $10^{-8}\, i\,\frac{\Delta\Phi}{\Delta t}$ Watt. Diese Leistung kann auch durch das Produkt $e \cdot i$ dargestellt werden, wobei e bis auf das Vorzeichen die elektromotorische Induktionsspannung ist. Messen wir wieder i in Ampere und e in Volt, dann hat das Produkt $e \cdot i$ die Dimension Watt. Es gilt also

$$e\,[\text{Volt}] = 10^{-8}\,\frac{\Delta\Phi}{\Delta t} \qquad (\text{mit } \Delta\Phi \text{ in Maxwell}).$$

Bemerkung. 1. Die eben durchgeführte Überlegung zeigt die Notwendigkeit der Induktionsspannung e vom Standpunkt der Energieerhaltung, wenn im Stromkreis vorher ein Strom i existiert. Nun hängt jedoch der Ausdruck für e nicht von i ab. Durch das Experiment wird bewiesen, daß im Grenzfall selbst für jeden bei $t = 0$ verschwindenden Strom i immer eine elektromotorische Kraft e existiert.

2. Die elektromotorische Induktionsspannung ist nur vorhanden, solange sich der Kraftfluß verändert. Dies erklärt das Mißlingen aller Experimente, die vor Faraday von vielen Experimentatoren durchgeführt wurden, um die Wirkung des Magnetismus auf den elektrischen Strom nachzuweisen. Faraday hatte dann das Glück oder die Idee, sein Galvanometer gerade in dem Moment zu beobachten, in dem er den Magneten in die Spule einführte.

Abb. 227

Die Richtung des induzierten Stromes wird durch die *Lenzsche Regel* bestimmt: *Der Strom ist immer so gerichtet, daß der von dem Induktionsstrom im Stromkreis hervorgerufene Kraftfluß durch den Stromkreis der den Induktionsstrom hervorrufenden Kraftflußänderung entgegengerichtet ist.*

Bringen wir z.B. (Abb. 227) eine Drahtschleife in die Nähe eines Magnetpoles (Stellung 1) und entfernen sie dann weiter (Stellung 2), dann verringert sich der Kraftfluß durch die Schleife. Der in der Drahtschleife entstehende Strom hat die angegebene Richtung und steht dieser Verringerung des Kraftflusses entgegen. Er ruft ein zusätzliches Feld $\mathfrak{H}$ hervor, dessen Kraftfluß zu dem ursprünglich vorhandenen Fluß hinzugefügt werden muß.

Experimentell kann man leicht die Erscheinungen der Induktion zeigen:

1. Eine Drahtschleife ist mit den Klemmen eines Milliamperemeters verbunden (Abb. 228). Verschiebt man diese Drahtschleife jetzt zwischen den Polen eines Elektromagneten, so zeigt das Instrument einen Ausschlag. Kehrt man diese

Schleife um, d.h., vertauscht man ihre beiden Seiten und wiederholt man das gleiche Experiment, so verändert sich die Richtung des Ausschlags.

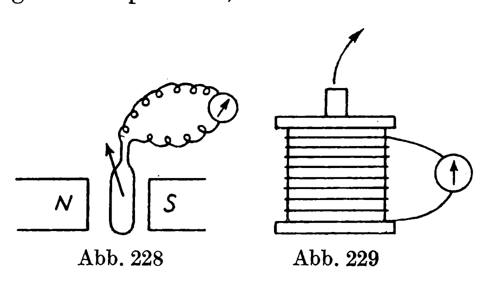


Abb. 228 Abb. 229

2. Die Enden einer Spule sind mit einem Milliamperemeter verbunden (Abb. 229). In Richtung der Spulenachse führt man nun einen magnetisierten Stab in die Spule ein. Das Instrument zeigt einen Ausschlag. Zieht man den Stab wieder heraus, so kehrt der Ausschlag seine Richtung um.

Man kann den Magneten durch ein Solenoid ersetzen und beobachtet dann die gleichen Erscheinungen. Führt man längs der Achse des Solenoids einen Eisennagel ein, so stellt man fest, daß ebenfalls ein Induktionsstrom auftritt. Dieser rührt von der Veränderung des Kraftflusses her, der durch den Unterschied der Permeabilitäten von Eisen und Luft hervorgerufen wird.

Praktische Einheit der Selbstinduktion

Um einen wichtigen Spezialfall der Induktion handelt es sich, wenn der sich verändernde Kraftfluß durch einen Strom i im Stromkreis selbst oder in einem anderen Stromkreis hervorgerufen wird. Für diesen Fall gelten die bereits angegebenen Ausdrücke für den Kraftfluß:

$$\Phi = L \cdot i; \qquad \Phi = M \cdot i.$$

Dabei sind L und M die Koeffizienten der Selbst- bzw. der Gegeninduktion.

Wir wollen jetzt annehmen, daß der Fluß Φ durch den gleichen Stromkreis hervorgerufen wird, in dem der Strom i fließt:

$$\Phi = L \cdot i.$$

Während des Einschaltvorganges gilt für den als starr und unbeweglich angenommenen Stromkreis in elektromagnetischen Einheiten:

$$e = -L\frac{di}{dt}.$$

Dabei wird L in cm ausgedrückt.

In praktischen Einheiten gilt entsprechend

$$e_{\text{Volt}} = -\,10^{-8}\,L_{\text{cm}}\frac{di}{dt} \quad \text{(in elektromagnet. Einheiten);}$$

$$e_{\text{Volt}} = -\,10^{-9}\,L_{\text{cm}}\frac{di}{dt} \quad \text{(in Ampere).}$$

Daraus ergibt sich eine praktische Einheit der Selbstinduktion, das Henry, das gleich 10^9 cm ist. Es gestattet uns, die letzte Formel wie folgt zu schreiben:

$$e_{\text{Volt}} = -L_{\text{Henry}}\frac{di}{dt} \quad \text{(in Ampere).}$$

Fundamentalgesetz der Induktion. Induzierte EMK in einem bewegten Leiter

Wir kennen *zwei Möglichkeiten*, um den Induktionsfluß in einem Stromkreis zu verändern:

Entweder wir verändern den Induktionsvektor oder die Fläche des Stromkreises. Die Veränderungen des Flusses, die aus diesen beiden Operationen resultieren, erfolgen mathematisch nach der Differentiationsformel eines Produkts:

$$\vec{\Phi} = \iint \mathfrak{B} d\mathfrak{F},$$

$$\frac{d\vec{\Phi}}{dt} = \iint \frac{\partial \mathfrak{B}}{\partial t} d\mathfrak{F} + \iint \mathfrak{B} \frac{\partial}{\partial t}(d\mathfrak{F}).$$

Der zweite Term dieser Summe liefert uns einen besonders einfachen Ausdruck. Zur Erläuterung dieser Formel betrachten wir den Stromkreis der Abb. 230.

Im nichtdeformierten Anfangszustand (1) ist der Stromkreis gegeben durch $ABCDA$. Nach der Zeit dt ist das Element $df = DA$ in EF überführt, und der Stromkreis wird durch $ABCDEGA$ gebildet.

Bei dieser Operation wird die auf (1) stehende Fläche F um $d\mathfrak{F} = \overrightarrow{DE} \times \overrightarrow{EG}$ in Richtung und Größe verändert. Das Anwachsen des Flusses ist dann gegeben zu

$$d\vec{\Phi} = \mathfrak{B} \cdot \overrightarrow{DE} \times \overrightarrow{EG}.$$

Setzen wir $\overrightarrow{DG} = d\mathfrak{l}$, dann haben wir $\frac{d\mathfrak{l}}{dt} = \mathfrak{V}$, d.h. gleich der Verschiebungsgeschwindigkeit. Wir können also schreiben

$$\frac{d\Phi}{dt} = \mathfrak{B} \cdot \mathfrak{V} \times d\mathfrak{f}$$

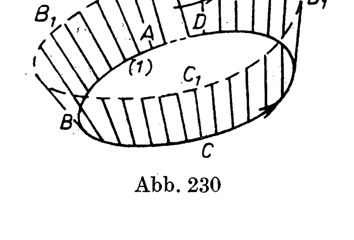


Abb. 230

oder, was das gleiche ist,

$$(\mathfrak{B} \times \mathfrak{V}) \cdot d\mathfrak{f}.$$

Die entsprechende elektromotorische Kraft genügt dann dem Ausdruck

$$de = -(\mathfrak{B} \times \mathfrak{V}) \cdot d\mathfrak{f}$$

und tritt in dem Element df auf. Dies ist das *Elementargesetz der Induktion* und hat einen eigenen physikalischen Sinn. Es fordert nicht, daß das Element df Teil eines Stromkreises ist. Es genügt, daß dieses bei seiner Verschiebung die Kraftlinien schneidet. Durch das Experiment wird dieses Gesetz sehr gut bestätigt. Drehen wir z.B. einen Dynamo, dessen Stromkreis nicht geschlossen ist, so tritt an seinen Klemmen eine elektromotorische Kraft auf, die mit einem Elektrometer gemessen werden kann.

Wenn wir den Teil der elektromotorischen Kraft der Gesamtinduktion behandeln wollen, der von einer Verschiebung des Stromkreises herrührt, müssen wir sie als Summe der elementaren EMK's de, die zu jedem Element df gehören, betrachten. Sie haben den Wert

$$de = -(\mathfrak{B} \times \mathfrak{V}) d\mathfrak{f}.$$

Wir erhalten also für e den Ausdruck

$$e = -\int (\mathfrak{B} \times \mathfrak{V})\, d\mathfrak{f}.$$

Ist im Raum ein elektrisches Feld vorhanden, dann gilt für die elektromotorische Kraft an den Enden eines Leiterelements df der Ausdruck

$$e = +\mathfrak{E}\, d\mathfrak{f}.$$

Vergleichen wir dieses Ergebnis mit dem obigen, dann können wir sagen: In einem Leiter, der mit der Geschwindigkeit $\mathfrak{V}$ verschoben wird und dabei die Induktionslinien der Induktion $\mathfrak{B}$ schneidet, entsteht ein elektrisches Feld $\mathfrak{E}$. Dieses Feld ist durch

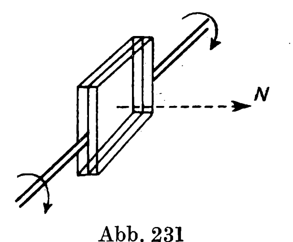


Abb. 231

$$\mathfrak{E} = -\mathfrak{B} \times \mathfrak{V}$$

gegeben.

Wir werden auf dieses Resultat bei unseren Betrachtungen über die Wellenausbreitung zurückkommen.

Numerisches Beispiel. Wir wollen ein metallisches Flugzeug mit der Spannweite L betrachten, das mit der Geschwindigkeit V horizontal fliegt. Zwischen den Enden seiner Tragflächen tritt eine Potentialdifferenz auf. Der Beitrag der Horizontalkomponente des Erdfeldes ist dabei offensichtlich Null. Wenn wir mit H die Vertikalkomponente des Erdfeldes bezeichnen, dann erhalten wir für die elektromotorische Kraft der Induktion den Ausdruck

$$e = L \cdot V \cdot H.$$

Für die einzelnen Ausdrücke wollen wir jetzt folgende Zahlenwerte annehmen:

$$L = 20 \text{ m} = 2 \cdot 10^3 \text{ cm}; \quad V = 360 \text{ km/h} = 10^4 \text{ cm/sec}; \quad H = 0{,}5 \text{ Gauß}.$$

Für die elektromotorische Kraft ergibt sich mit diesen Zahlenwerten:

$$e = 10^7 \text{ elektromagnetische CGS-Einh.} = 0{,}1 \text{ Volt}.$$

Dieser Effekt wird beim Induktionskompaß ausgenutzt, der in letzter Zeit immer mehr den Magnetkompaß in den Flugzeugen ersetzt. Dieser Kompaß besteht aus einem Rahmen mit einer horizontalen Achse und ist um diese drehbar. Der hindurchtretende Fluß und damit auch die elektromotorische Induktionskraft hängen von dieser Orientierung ab. Mit Hilfe dieses Instruments kann man also die Lage des magnetischen Nordpols feststellen.

Richtung der elektromotorischen Induktionsspannung

Die oben angegebene Formel $de = -(\mathfrak{B} \times \mathfrak{V})\, d\mathfrak{f}$ ist an die universelle Ampèresche Regel für die Rotation gebunden; d.h., daß diese Regel die Richtung des Vektors $\mathfrak{B} \times \mathfrak{V}$ festlegt und damit auch die Richtung der elektromotorischen Kraft der Induktion und des von ihr verursachten Stromes.

Ein einfaches Hilfsmittel zur Bestimmung dieser Richtung ist die Benutzung eines beliebigen Stromkreises, der das betrachtete Element df enthält (Abb. 232). Durch diesen Stromkreis (C) hat die Induktion einen bestimmten Fluß; durch eine Verschiebung V vergrößert oder verringert sich dieser Fluß. Dadurch wird nach Anwendung der LENZschen Regel die Richtung des zusätzlichen Flusses, der von einer Verschiebung des Induktionsstromes herrührt, festgelegt. Durch diesen zusätzlichen Fluß wird der ursprüngliche Fluß entweder verringert oder vergrößert. Dadurch ist die Richtung des Stromdurchganges und entsprechend die Richtung der elektromotorischen Kraft, die diesen Strom erzeugt, bestimmt.

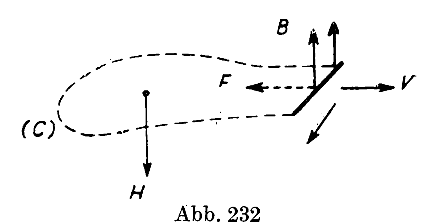


Abb. 232

Betrachten wir das Beispiel in der Abb. 232, dann wird die Fläche durch die Verschiebung vergrößert, und der Induktionsfluß wächst an. Der von einem eventuellen Induktionsstrom hervorgerufene Fluß entspricht also einem nach unten gerichteten Feld $\mathfrak{H}$. Damit ist die Richtung der elektromotorischen Kraft gegeben. Wir sehen, daß nach dem LAPLACEschen Gesetz die Richtung der elektromotorischen Kraft so verläuft, daß die ursprüngliche Induktion B eine V entgegengesetzte Kraft F hervorruft, d.h. also eine *Reibungskraft*. Dies ist eine *andere Formulierung* der LENZschen Regel.

Induzierte Elektrizitätsmenge

In einem Stromkreis, der keinen Generator enthält und in dem eine elektromotorische Induktionsspannung auftritt, gilt

$$R i \Delta t = -\Delta \Phi .$$

Dabei sind R der Widerstand des Stromkreises und i die Stromstärke.

Den Ausdruck $i \Delta t$, die Größe der induzierten Elektrizität, wollen wir mit ΔQ bezeichnen. Wir erhalten dann

$$\Delta Q = -\frac{\Delta \Phi}{R} .$$

Für die gesamte induzierte Elektrizität bei einer Veränderung des Induktionsflusses von Φ_1 auf Φ_2 erhalten wir dann den Ausdruck

$$Q = \frac{\Phi_1 - \Phi_2}{R} .$$

Anwendungen

a) *Messung der Komponenten des Erdfeldes.* 1. Die Vertikalkomponente. Wir bringen in horizontaler Lage einen Rahmen mit bekanntem Querschnitt (siehe Abb. 231) an, der mit den Klemmen eines ballistischen Galvanometers verbunden ist. Nun dreht man diesen um 180° und kann so die induzierte Elektrizitätsmenge Q

mit dem Galvanometer messen. Aus der Formel $Q = \frac{2\Phi}{R}$, in der Φ den Fluß durch den horizontal gelagerten Rahmen darstellt, kann man Q und damit die Vertikalkomponente des Erdfeldes berechnen.

2. Horizontalkomponente. Wir bringen den Rahmen in vertikale Lage und bestimmen auf ganz analoge Weise die Horizontalkomponente des Erdfeldes, indem wir den Rahmen wieder um 180° drehen.

b) *Messung der magnetischen Permeabilitäten.* Wir schließen einen magnetischen Kreis mit einem Stab aus dem zu untersuchenden Material. Es sei l die Länge dieses

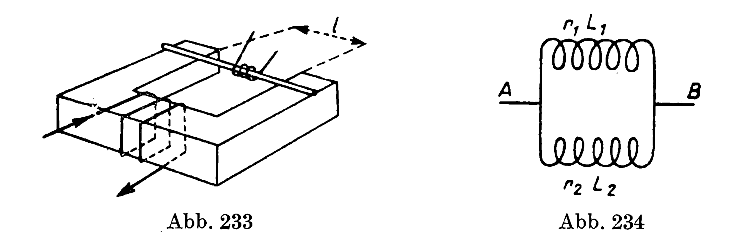


Abb. 233 Abb. 234

Stabes und F der Querschnitt (Abb. 233). Der magnetische Widerstand dieses Stabes beträgt

$$\frac{l}{\mu F}.$$

Die Induktion in diesem Stab ist gegeben zu

$$B = \frac{4\pi N i}{\frac{l}{\mu F}}.$$

Dabei ist N die Anzahl der Windungen der Magnetspule. Der magnetische Widerstand des restlichen magnetischen Kreises kann vernachlässigt werden.

Um den Stab werden einige Windungen einer Spule gewickelt, deren Enden mit einem ballistischen Galvanometer verbunden sind. Nun bringen wir den Stab in ein Feld Null. Aus dem Ausschlag des Galvanometers können wir auf die Veränderung des Flusses schließen. Die Formel

$$\Phi = B \cdot F$$

gibt uns den Wert für B, und damit können wir auf μ rückschließen.

c) *Stromkreis mit zwei parallelen Selbstinduktionen.* Wenn wir mit U die Potentialdifferenz zwischen A und B bezeichnen (Abb. 234), dann erhalten wir für sie den Ausdruck

$$U = r_1 i_1 + L_1 \frac{di_1}{dt} = r_2 i_2 + L_2 \frac{di_2}{dt}.$$

Dafür können wir auch

$$U = r_1 i_1 + \frac{d\Phi_1}{dt} = r_2 i_2 + \frac{d\Phi_2}{dt}$$

und nach Integration

$$\int U\,dt = r_1 Q_1 + (\Phi_1' - \Phi_1) = r_2 Q_2 + (\Phi_2' - \Phi_2)$$

schreiben.

Unter der Annahme, daß die Stromstärke am Anfang und am Ende gleich ist,

$$\Phi' = \Phi,$$

erhalten wir

$$r_1 Q_1 = r_2 Q_2.$$

Die Elektrizitätsmengen verteilen sich so, als besäßen die Leiter keine Selbstinduktion. *Diese Überlegungen gestatten uns, ein ballistisches Galvanometer zu shunten.*

d) *Experiment von H. A. Lorentz* (Abb. 235). Wir lassen durch einen Stahldraht einen Strom fließen. Schalten wir den Strom ab, so bleibt der Draht magnetisiert. Wir verbinden die Drahtenden mit einem ballistischen Galvanometer G und üben auf

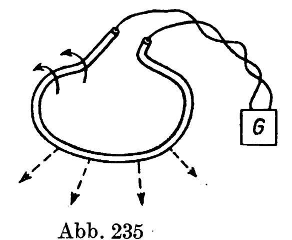


Abb. 235

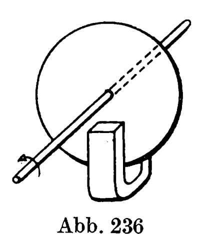


Abb. 236

ihn jetzt, um die Fläche zu vergrößern, einen Zug aus. Dann wird durch das Galvanometer ein starker Induktionsstrom angezeigt. (Tatsächlich ändert sich ja wegen der Oberflächenvergrößerung der Induktionsfluß.)

e) *Foucaultsche Ströme.* Bisher haben wir nur drahtförmige Leiter betrachtet. Verschieben wir jetzt in einem Feld einen dreidimensionalen Leiter, so entstehen in ihm induzierte Ströme, die Foucaultsche Ströme genannt werden. Diese Foucaultschen Ströme unterliegen elektromagnetischen Wirkungen, die die Bewegung durch die auftretenden elektromagnetischen Kräfte behindern, da keine mechanische Rückwirkung entsteht. Diese Energie kann übrigens in Form von Wärme wiedergefunden werden (Joulescher Effekt).

Experiment. Ein kleiner Metallzylinder wird zwischen den Polen eines Elektromagneten in schnelle Rotationsbewegung versetzt. Beim Einschalten des Stroms wird diese Bewegung heftig gebremst.

Elektromagnetische Bremse. Die Foucaultschen Ströme können zum Bremsen von Fahrzeugen verwendet werden. Weiter oben haben wir gesehen,

daß die elektromotorische Induktionskraft der Geschwindigkeit proportional ist. Das Bremsen wird also um so wirksamer sein, je größer die Geschwindigkeit des Fahrzeugs ist. Der Elektromagnet wird durch die Autobatterie gespeist und der Bremseffekt durch eine Metallscheibe auf die Räder übertragen. Man erreicht ein sehr wirksames Bremsen bereits bei einem Gewicht der Bremsapparatur von 2% des Fahrzeuggewichtes.

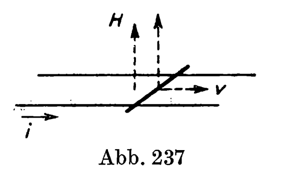


Abb. 237

Dämpfung von Meßinstrumenten. Am Zeiger eines Meßinstrumentes wird eine kleine Kupferscheibe befestigt, die zwischen den Polen eines Hufeisenmagneten beweglich angeordnet ist (Abb. 236).

Die Dämpfung des Instrumentes erfolgt dann proportional der Winkelgeschwindigkeit.

In elektrischen Zählern wird ein der Geschwindigkeit proportionales Widerstandsmoment nach dem gleichen Prinzip ausgenutzt (siehe weiter unten).

f) *Gegen-EMK eines Motors.* Wir wenden uns der Betrachtung eines leitenden Stabes zu, der beweglich auf zwei Schienen liegt und unter der Wirkung eines Feldes B steht, das sich senkrecht zu der von Stab und Schienen gebildeten Ebene befindet (Abb. 237). Wird dieser Stab nun mit einer Geschwindigkeit V verschoben, so wird dabei eine Leistung verbraucht, die die Größe $B \cdot V \cdot i$ hat. Die elektromotorische Induktionsspannung wirkt dem Motorenstrom entgegen und hat den Wert

$$\frac{d\Phi}{dt} = B \cdot V.$$

Wir wollen sie mit e bezeichnen, d. h. als elektromotorische Gegenspannung dieses Motors ansehen. Die Leistung $e \cdot i$ ist dabei gerade gleich der mechanischen Leistung $B \cdot V \cdot i$. Wegen der Reziprozität des LAPLACEschen Gesetzes einerseits und der elektromotorischen Induktion andererseits wird die mechanische Energie mit dem Wirkungsgrad 1 in elektrische Energie umgewandelt und umgekehrt.

Konstruktion eines Motors

Wir betrachten einen Metallring mit dem Radius l (Abb. 238) und einer radialen leitenden Speiche, der an einer Rolle koaxial befestigt ist. Wir schicken jetzt über die Achse unseres Ringes einen Strom und bringen die Anordnung in ein senkrecht zu seiner Ebene verlaufendes Magnetfeld.

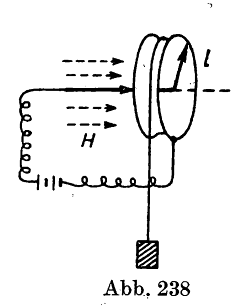


Abb. 238

Damit nun die an der Rolle befestigten Gewichte mg mit einer gleichförmigen Geschwindigkeit gehoben werden, müssen das Moment der Schwerkraft und das elektromagnetische Moment in bezug auf die Achse OM gleich sein.

Die resultierende elektromagnetische Kraft greift in der Mitte der Speiche an und hat den Wert Hi. (Wir setzen hier H und B in elektromagnetischen Einheiten ein.)

Wir erhalten also die Bedingung

$$mgl = \frac{Hl^2 i}{2}$$

und nach Division durch $\frac{l}{2}$

$$2mg = Hli.$$

Da Gewicht und Motordaten (d.h. l und H) vorgegeben sind, ergibt sich die Stromstärke zu

$$i = \frac{2mg}{H \cdot l}.$$

Wenn wir jetzt mit E die elektromotorische Kraft des Generators, der den Strom liefert, und mit e die elektromotorische Gegenspannung dieses Motors bezeichnen, dann gilt

$$E = Ri + e.$$

Die elektromotorische Gegenspannung e ist also eindeutig bestimmt.

Bezeichnen wir nun mit V_1 die Geschwindigkeit der sich bewegenden Gewichte, dann erhalten wir aus Gründen der Energieerhaltung

$$ei = mgV_1.$$

Wir sehen also, daß auch die Geschwindigkeit der Gewichte eindeutig bestimmt ist.

Für die elektromotorische Gegenspannung des Motors finden wir in Abhängigkeit von der Geschwindigkeit auch den Ausdruck

$$e = \frac{mgV_1}{i} = \left(\frac{Hl}{2}\right) V_1.$$

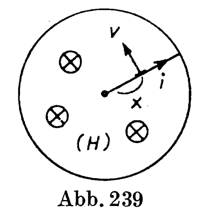


Abb. 239

Dieses Resultat ergibt sich auch bei einer direkten Berechnung der elektromotorischen Induktionsspannung.

Dazu betrachten wir ein Element dx, das sich in der Entfernung x vom Mittelpunkt befindet. Die Geschwindigkeit dieses Elements beträgt $V = \omega x$, wobei ω die Winkelgeschwindigkeit ist (Abb. 239).

Die elektromotorische Induktionsspannung hat also den Wert

$$de = H\omega \cdot dx.$$

Durch Integrieren erhalten wir

$$e = \int_0^l H\omega \cdot dx = \frac{H\omega l^2}{2}.$$

Nun ist aber

$$\omega = \frac{V_1}{l},$$

und wir erhalten endgültig für die elektromotorische Kraft den Ausdruck

$$e = \left(\frac{Hl}{2}\right) V_1,$$

der mit dem oben angegebenen Ausdruck übereinstimmt.

Elektromagnetische Induktionsspannung bei veränderlichem Strom

Wir betrachten einen Stromkreis, der aus einem Generator mit der elektromotorischen Kraft E, dem Widerstand R (wobei wir annehmen, daß R der Gesamtwiderstand ist) und einer Selbstinduktion L besteht (Abb. 240).

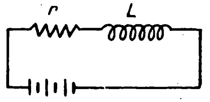


Abb. 240

Durch Anwendung des OHMschen Gesetzes erhalten wir

$$E = Ri + \frac{d\Phi}{dt};$$

Φ ist dabei der Fluß durch diesen Stromkreis, $-\frac{d\Phi}{dt}$ die elektromotorische Induktionsspannung.

Unter der Annahme, daß es sich um einen festen Stromkreis handelt und die Veränderung des Flusses nur von einer Veränderung des Stromes abhängt, können wir schreiben:

$$\frac{d\Phi}{dt} = L\frac{di}{dt}.$$

Bei veränderlichem Strom gilt folgende lineare Differentialgleichung:

$$E = Ri + L\frac{di}{dt}.$$

Wir setzen $E = 0$ und schreiben die Gleichung um in

$$\frac{di}{i} = -\frac{R}{L}\,dt.$$

Als Lösung des allgemeinen Integrals ergibt sich der Ausdruck

$$i = i_0 e^{-\frac{R}{L}t}.$$

Das allgemeine Integral der inhomogenen Gleichung erhalten wir, wenn wir zu dem Integral der inhomogenen Gleichung ein partikuläres Integral der vollständigen Gleichung hinzufügen:

$$i = \frac{E}{R}.$$

Für i erhalten wir also den Ausdruck

$$i = \frac{E}{R} + i_0 \cdot e^{-\frac{R}{L}t}.$$

Der Stromkreis wird im Zeitpunkt $t = 0$ geschlossen. Für $t < 0$ gilt dann $i \equiv 0$. Für $t = 0$ ist auch $i = 0$; die Ableitung ist jedoch

$$\frac{di}{dt} \neq 0 .$$

Wir können also schreiben:

$$i = \frac{E}{R}\left(1 - e^{-\frac{R}{L}t}\right).$$

Theoretisch erreicht die Stromstärke erst nach einer unendlich langen Zeit den Wert E/R. Praktisch hat sie jedoch durch den exponentiellen Verlauf bereits nach kurzer Zeit einen Wert erreicht, der nur sehr wenig vom Endwert E/R abweicht (Abb. 241).

Zeitkonstante des Stromkreises nennt man die Zeit Θ, nach der der Wert von i nur um $1/e$ vom Endwert abweicht. Man sieht sofort, daß

$$\Theta = \frac{L}{R}$$

und

$$i = \frac{E}{R}\left(1 - e^{-\frac{t}{\Theta}}\right)$$

gilt.

Abb. 241

Wir wollen jetzt die Zeit Θ' berechnen, nach der die Stromstärke nur um $^1/_{1000}$ vom Endwert verschieden ist:

$$e^{\Theta'/\Theta} = 1000; \qquad \frac{\Theta'}{\Theta} = \frac{3}{\log e} = \frac{3}{0{,}434} = 6{,}9 .$$

Man kann experimentell leicht zeigen, daß der Strom in einer Selbstinduktion exponentiell ansteigt.

Schalten wir z. B. eine Selbstinduktion und einen Widerstand parallel und

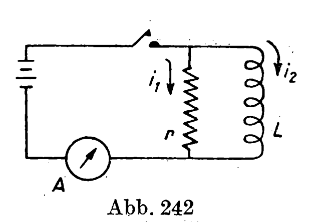
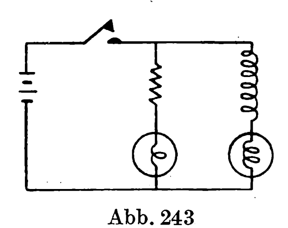


Abb. 242


Abb. 243

messen die Summe der Ströme $i_1 + i_2$ mit einem in den Hauptkreis geschalteten Amperemeter.

Schließen wir dann den Stromkreis, so zeigt das Meßinstrument sofort den Strom i_1 an und steigt dann langsamer auf den Wert $i_1 + i_2$ (Abb. 242).

Diesen Aufbau können wir abändern, indem wir je eine Lampe mit der Selbstinduktion und dem Widerstand in Reihe schalten (Abb. 243). Beim Schließen des

Stromkreises leuchtet die mit dem Widerstand in Reihe liegende Lampe sofort auf, während die mit der Selbstinduktion in Reihe liegende Lampe erst nach einiger Zeit leuchtet. (Damit das Experiment gut zu beobachten ist, muß eine große Selbstinduktion verwendet werden.)

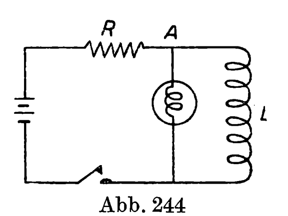


Abb. 244

Mit einer anderen Anordnung können wir die Existenz einer elektromotorischen Kraft der Selbstinduktion im veränderlichen Bereich nachweisen. Dazu schalten wir eine reine Selbstinduktion mit einer Lampe parallel (Abb. 244). Schließen wir jetzt den Stromkreis, so erzeugt die elektromotorische Kraft der Selbstinduktion zwischen A und B eine Spannung, die ausreicht, um die Lampe zum Leuchten zu bringen. Sobald der Strom seinen konstanten Wert erreicht hat, erlischt die Lampe, da sie praktisch über den kleinen Widerstand der Selbstinduktion kurzgeschlossen ist. Das gleiche Phänomen beobachtet man beim Öffnen des Stromkreises.

Wir wollen nun zwei Beispiele betrachten, die uns die Gleichung der Ströme im Stromkreis liefern.

Schwingungskreis

Schwingungskreis nennt man einen Stromkreis, bei dem ein Widerstand, eine Selbstinduktion und eine Kapazität in Reihe liegen (Abb. 245).

Legen wir jetzt an diesen Kreis eine Spannung U, dann ist der Potentialabfall in diesem Kreis gegeben durch die Summe der elektromotorischen Gegenkraft der Selbstinduktion $L\frac{di}{dt}$, dem OHMschen Spannungsabfall $R \cdot i$ und der Spannung zwischen den Kondensatorplatten $V = q/C$. Nun wird die vom Strom transportierte Ladung q gegeben durch

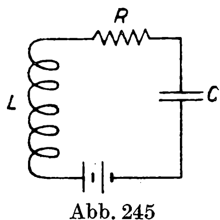


Abb. 245

$$q = \int i dt.$$

Daraus folgt dann

$$U = L\frac{di}{dt} + Ri + \frac{1}{C}\int i dt.$$

Gekoppelte Kreise

Wir betrachten zwei Stromkreise, die durch gegenseitige Induktion gekoppelt sind (Abb. 246). An den ersten Stromkreis legen wir eine Spannung U, während der zweite keine Stromquelle enthält.

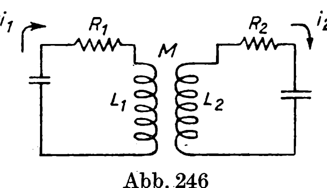


Abb. 246

Für den ersten Stromkreis erhalten wir

$$U = \frac{1}{C_1}\int i_1 dt + R_1 i_1 + \frac{d\Phi_1}{dt},$$

und da

$$\Phi_1 = L_1 i_1 + M i_2$$

(dabei ist M der Koeffizient der Gegeninduktion), ergibt sich also

$$U = \frac{1}{C_1}\int i_1 dt + R_1 i_1 + L_1 \frac{di_1}{dt} + M \frac{di_2}{dt}$$

und analog für den zweiten Stromkreis

$$\Phi_2 = L_2 i_2 + M i_1;$$

$$0 = \frac{1}{C_2}\int i_2 dt + R_2 i_2 + L_2 \frac{di_2}{dt} + M \frac{di_1}{dt}.$$

Wir wollen uns hier mit diesen Gleichungen nicht weiter beschäftigen.

Entladung eines mit einer Selbstinduktion und einem Widerstand in Reihe liegenden Kondensators

Die Spannung zwischen den Platten des Kondensators für unseren betrachteten Fall ist gegeben zu

$$U = \frac{q}{C}.$$

Der Strom, der in jedem Zeitintervall fließt, genügt der Gleichung

$$i = \frac{dq}{dt},$$

und die Spannungsgleichung kann in der oben angegebenen Form geschrieben werden:

$$L \frac{di}{dt} + Ri + \frac{1}{C}\int i dt = 0.$$

Wenn wir nun i eliminieren, können wir setzen:

$$U + RC \frac{dU}{dt} + LC \frac{d^2 U}{dt^2} = 0.$$

Diese Gleichung ist uns gut bekannt; es handelt sich um die Gleichung eines gedämpften Pendels.

1. Ist R klein genug, dann können wir

$$RC \frac{dU}{dt}$$

vernachlässigen und erhalten

$$U + LC \frac{d^2 U}{dt^2} = 0.$$

Die Lösung dieser Gleichung hat die Form

$$U = A \cdot \sin(\omega t + \varphi),$$

wobei $\omega = \frac{1}{\sqrt{LC}}$ ist. Es handelt sich also um einen *Schwingungsbereich* mit $\frac{1}{\sqrt{LC}}$ als Kreisfrequenz und $T = 2\pi\sqrt{LC}$ als Schwingungsdauer; A ist eine Amplitude und φ eine sich aus den *Grenzbedingungen* ergebende Phasenverschiebung. Handelt es sich um eine Entladung mit der Anfangsspannung U_0 für $t = 0$, dann sind die Anfangsbedingungen gegeben durch

a) für $t < 0$ $\quad U = U_0; \quad \frac{dU}{dt} = 0; \quad \frac{d^2U}{dt^2} = 0.$

b) für $t = 0$ $\quad U = U_0.$

Damit die obige Gleichung erfüllt ist, muß $\frac{d^2U}{dt^2} = -\frac{U}{LC}$ sein; $\frac{dU}{dt}$ muß anfangs Null betragen, damit $\frac{d^2U}{dt^2}$ nicht unendlich wird. Dies erfordert also, daß

$$\varphi = \frac{\pi}{2}; \qquad A = U_0,$$

und damit gilt

$$U = U_0 \cos\omega t.$$

2. Wir sehen also, daß

$$RC\frac{d}{dt} \ll LC\frac{d^2}{dt^2} \ll 1$$

erfüllt sein muß, damit die obengenannte Vernachlässigung gerechtfertigt ist.

Da

$$\left(\frac{d}{dt}\right) = \omega; \quad \left(\frac{d^2}{dt^2}\right) = \omega^2 \quad \text{und} \quad LC\omega^2 = 1$$

gelten, genügt es, wenn

$$RC\omega \ll 1 \quad \text{oder} \quad R \ll \sqrt{\frac{L}{C}}$$

ist.

3. Kann man R nicht vernachlässigen, so setzt man die Spannung am Kondensator in der Form

$$U = Ae^{pt}$$

an. Dann ergibt sich

$$LCp^2 + RCp + 1 = 0$$

und

$$p = -\frac{R}{2L} \pm \sqrt{\frac{R^2}{4L^2} - \frac{1}{LC}}.$$

Gilt nun

$$\frac{R^2}{4L^2} \ll \frac{1}{LC},$$

dann ist der Ausdruck

$$\sqrt{\frac{R^2}{4L^2} - \frac{1}{LC}}$$

nur um eine Größe zweiter Ordnung von $j\,\omega$ verschieden. Die Lösungen verändern sich dann mit

$$\sin(\omega t + \varphi)\, e^{-\frac{Rt}{2L}}.$$

Die *Zeitkonstante* T des Stromes wird durch $2L/R$ dargestellt; nach der Zeit T ist also die Amplitude der Schwingung auf $1/e$ ihres ursprünglichen Wertes abgesunken. Nun ist es noch von Bedeutung, die Anzahl der Schwingungen während der Zeit T zu kennen. Wir erhalten die Zahl $n = T_1/T$ für die Anzahl dieser Schwingungen. Sie wird durch den Ausdruck

$$n = \frac{2L}{R} \cdot \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}} = \frac{1}{\pi R}\sqrt{\frac{L}{C}} = \frac{1}{\pi R}\sqrt{\frac{L\omega}{C\omega}} = \frac{1}{\pi}\frac{L\omega}{R}$$

dargestellt.

Wir werden weiter unten sehen, daß $L\omega/R$ eine *dimensionslose Zahl* ist, die man *Güte* des Stromkreises nennt und die angibt, wie oft die Energie zwischen Selbstinduktion und Kondensator und umgekehrt ohne größere Verluste schwingt. Das Rechnen mit dieser Zahl ist viel bequemer als die Benutzung der Dämpfungskonstanten $R/2L$ und der Zeitkonstanten $2L/R$, die beide nicht dimensionslos sind.

4. Wächst R an, dann werden auch Dämpfung und Schwingungsdauer größer. Für $R^2/4L^2 = 1/LC$ oder $R = 2\sqrt{L/C}$, d.h. für eine Güte $L\omega/R \leqq 1/2$, erreicht man die *kritische Dämpfung*. Die Spannung nimmt aperiodisch mit einer bestimmten Geschwindigkeit ab:

$$e^{-\frac{Rt}{2L}} = e^{-\frac{t}{\sqrt{LC}}}.$$

Die Zeitkonstante $\sqrt{LC}$ *beträgt dann* $1/2\,\pi \cdot \omega_0$, *wobei* ω_0 *die Frequenz des Kreises ohne Widerstand darstellt.*

5. Wächst R weiter über die kritische Dämpfung hin an, dann liefert die Gleichung

$$LCp^2 + RCp + 1 = 0$$

zwei negative Wurzeln für p, d.h., es ergeben sich *zwei verschiedene Zeitkonstanten* für die beiden unabhängigen linearen Lösungen. Die eine Zeitkonstante ist größer als $\sqrt{LC}$, während die andere kleiner ist. Ströme und Spannungen nehmen *weniger schnell* ab als bei *kritischer Dämpfung*. Die Betrachtungen gelten für alle Anordnungen mit Gleichungen ähnlich Gl. (1) und zeigen die große Bedeutung der kritischen Dämpfung für den Physiker (siehe Kapitel „Galvanometer").

Der oszillatorische Charakter der Entladung wurde zuerst mit einem Drehspiegel beobachtet, in dem man die durch die Entladung eines Kondensators über eine Selbstinduktion in einer Funkenstrecke erzeugten Funken betrachtete. Der Widerstand R war dabei veränderlich und (wenigstens teilweise) durch die Leitfähigkeit der Luft während des Funkenüberganges gegeben. Zwischen je zwei Übergängen wurde der Widerstand wieder unendlich. Dies ist in gewissem Sinne ein Analogon zu einer festen Reibung und läßt nur eine geringe Zahl von Schwingungen von Strom und Spannung zu.

Experiment. Heute ist es einfach, die experimentellen Untersuchungen der Entladungskurven mit Oszillographen (siehe folgendes Kapitel) oder Drehspiegeln durchzuführen. Die oszillierenden Ströme werden einfach durch kurzzeitiges Anlegen der EMK einer Akkumulatorbatterie erzeugt, wodurch die Aufladung erfolgt, oder indem man diese plötzlich abschaltet und so eine Entladung über die Überbrückung hervorruft.

In einer Selbstinduktion gespeicherte elektromagnetische Energie

Der Induktionsfluß durch eine Selbstinduktion L ist gegeben durch den Ausdruck

$$\Phi = Li.$$

Verändern wir nun den Strom i, so wird im Stromkreis eine Energie

$$W = \int_0^i i\,d\Phi = \int_0^i Li\,di = \frac{Li^2}{2}$$

gespeichert.

Entsprechend finden wir in zwei Stromkreisen mit den Selbstinduktionen L_1 und L_2, die durch die Gegeninduktion M gekoppelt sind, die Energie

$$W = \frac{1}{2} L_1 i_1^2 + \frac{1}{2} L_2 i_2^2 + M i_1 i_2.$$

Maxwell stellte fest, daß i die *Geschwindigkeit* $\frac{dq}{dt}$ von q ist (wie $v = \frac{dx}{dt}$ die Geschwindigkeit von x ist), daß $\frac{1}{2} Li^2$ somit dem $-\frac{mv^2}{2}$ entspricht und damit die Rolle einer *kinetischen Energie* spielt, die bei den Schwingungen eines sogenannten Oszillatorkreises, bestehend aus Selbstinduktion und Kapazität, in die potentielle Energie des Kondensators $\frac{1}{2}\frac{q^2}{C}$ übergeht, ebenso wie beim Pendel eine Umwandlung von kinetischer in potentielle Energie auftritt.

Wir haben schon gesehen, daß ein elektrodynamischer Generator kinetische Energie an die Ladungsträger abgibt, während ein elektrostatischer Generator auf sie potentielle Energie überträgt. Dadurch wird diese Analogie noch vertieft.

Die Induktionsspule und ihre Anwendungen

Die Induktionsspule – auch Ruhmkorff-Spule genannt – (Abb. 247) besteht aus zwei Wicklungen, der Primär- und der Sekundärwicklung, die beide auf dem gleichen Weicheisenkern sitzen. Dieser Weicheisenkern besteht aus einzelnen

Stäben, die gegeneinander isoliert sind, um FOUCAULTsche Ströme zu vermeiden. Die Primärwicklung hat nur eine geringe Anzahl von Windungen aus dickerem Draht, damit starke Ströme fließen können. Sie sitzt direkt auf dem Weicheisenkern. Die Sekundärwicklung dagegen hat eine sehr große Anzahl von Windungen aus dünnem Draht und ist um die Primärwicklung herumgewickelt.

Abb. 247

Wird der Strom i_1 in der Primärwicklung verändert, dann ist die Spannung an den Klemmen der Sekundärwicklung durch den Ausdruck

$$U = M \frac{di_1}{dt}$$

bestimmt.

Nun ist M proportional zu $n_1 n_2$, wenn n_1 und n_2 die Windungszahlen der Primär- bzw. der Sekundärwicklung sind, und kann sehr groß sein. Wenn die Veränderung des Stromes in der Primärspule sehr schnell erfolgt, nimmt U beträchtliche Werte an.

Diese Veränderungen des Stromes werden mit Hilfe eines Unterbrechers hervorgerufen. Eine Blattfeder aus Weicheisen, die den Primärkreis schließt, wird von einem Elektromagneten angezogen, der selbst durch den Primärstrom gespeist wird. Der Stromkreis ist dann geöffnet, und der Magnet wirkt nicht mehr. Die Blattfeder geht in ihre Ruhelage zurück, schließt den Stromkreis erneut. Dieser Vorgang wiederholt sich.

Wir wollen nun die Stromstärke in der Primärwicklung graphisch auftragen (Abb. 248). Beim Schließen des Stromkreises tritt in der Sekundärwicklung eine Spannung auf, die gegenüber der beim Öffnen des Stromkreises auftretenden Spannung sehr klein und entgegengesetzt gerichtet ist. Wir erhalten also an den Klemmen der Sekundärwicklung eine unsymmetrische Wechselspannung. Die algebraische Summe der in Abb. 248 gestrichelten Flächen ist Null. Wenn wir annehmen, daß der Sekundärkreis über einen Widerstand geschlossen ist, sind diese gestrichelten Flächen tatsächlich den im Stromkreis transportierten Elektrizitätsmengen proportional. Da nun die Anfangs- und die Endbedingungen identisch sind, ist die induzierte Elektrizitätsmenge Null. Die Öffnungsdauer ist gegenüber der Schließdauer sehr kurz und entspricht einer sehr schnellen Veränderung des Flusses, d.h. einer sehr viel höheren Spannung an den Klemmen der Sekundärwicklung.

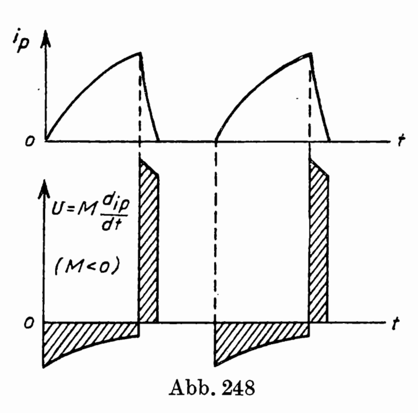


Abb. 248

Zur Erzeugung sehr hoher Gleichspannungen wird die Sekundärspannung einer Induktionsspule gleichgerichtet. Dazu wird die Sekundärwicklung über eine Funkenstrecke mit einem Verbraucherkreis derart verbunden, daß der Funkenüberschlag nur bei Stromunterbrechung möglich ist (genügend hohe Durchschlags-

spannung). Der Strom fließt also nur in der Richtung, die den höheren Potentialen entspricht, da er das Vorhandensein eines Funkens erfordert.

Diese Gleichrichtung kann man noch verbessern, indem man an die Klemmen der Sekundärspule einen Verbraucherkreis legt, der aus einem Widerstand R und

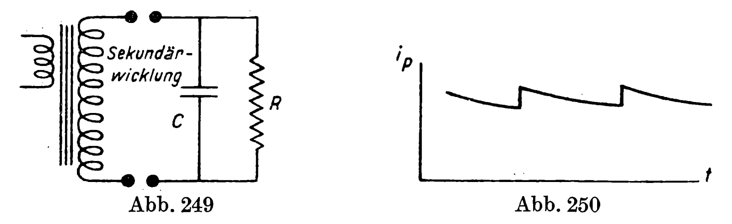


Abb. 249 Abb. 250

einem zu ihm parallel liegenden Kondensator C besteht. Die Zeitkonstante der Entladung $C\,R$ muß groß gegen die Schließdauer des Primärkreises sein. Der Strom im Widerstand R ist dann nahezu kontinuierlich (Abb. 250).

Rotationsunterbrecher

Bei sehr großen Anlagen (50000–100000 V) wird der Unterbrecher, der den Primärstrom unterbricht, zweckmäßig durch einen sich drehenden Quecksilberstrahl ersetzt, der über eine Reihe von sich einander gegenüberstehenden Elektroden hinwegläuft und zum Schließen und Unterbrechen des Primärstroms dient. Das Schließen und Öffnen des Stromkreises erfolgt abhängig von der Rotationsgeschwindigkeit.

Wehnelt-Unterbrecher

Eine Platinelektrode (Anode) berührt einen Glasstopfen, der ein Bleigefäß verschließt, in welchem eine Lösung von $MgSO_4$ elektrolysiert wird. Der Strom, der dabei fließt, erwärmt den Elektrolyten, und es bildet sich an der Anode eine Gasblase, die den Strom unterbricht. Kurze Zeit nach der Unterbrechung wird die Gasblase wieder absorbiert, der Kontakt ist von neuem gebildet, und der Strom fließt wieder. Man zerhackt so Gleichströme von 15–20 Ampere bei Spannungen bis 110 V etwa 1000 mal pro Sekunde.

Delcozündung bei Explosionsmotoren

Hierbei handelt es sich um eine feste Induktionsspule, für die die Batterie des Wagens den Primärstrom liefert. Dieser wird periodisch von einem Unterbrecher, der sich im Takt des Motors dreht, zerhackt (Abb. 251).

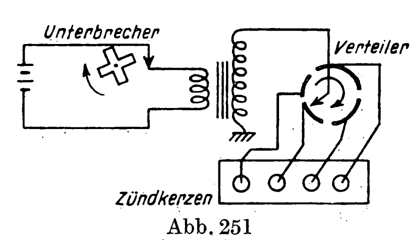


Abb. 251

An der Sekundärspule legt ein rotierender Verteiler die Hochspannung nacheinander an alle Zündkerzen, an denen dadurch ein Funke überspringt.

Magnetzündung

Zwischen den beiden Polen NS eines Permanentmagneten dreht sich ein Eisenanker mit der in Abb. 252 dargestellten Querschnittsform. Auf diesen Anker

wickelt man eine Primär- und eine Sekundärspule. Die Sekundärspule ist wie bei der Delcozündung mit einem Verteiler verbunden. Die Primärspule ist kurz geschlossen, und der Strom wird über einen Zerhacker im Takt der Rotation unterbrochen. Wir haben also eine *rotierende Induktionsspule*, bei der während der Rotation der Kraftfluß und damit der Primärstrom verändert wird, wobei starke Flußänderungen möglich werden, wenn man ihn unterbricht.

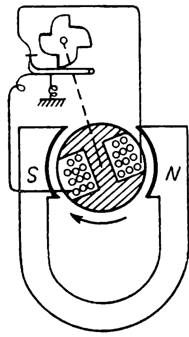


Abb. 252

Die in Abb. 252 angegebene Form des Ankers erhöht die Änderungsgeschwindigkeit des Flusses, da der magnetische Widerstand des Kreises sich plötzlich verändert, wenn sich der Anker um jeweils 180° dreht. Daraus folgt, daß der Primärstrom kurze und intensive Maxima aufweist. Der Strom wird nun durch den Zerhacker gerade im Augenblick des Maximalwertes unterbrochen, wodurch eine große Flußänderung

$$\frac{d\Phi}{dt} = \frac{\Phi - 0}{\Delta t} = \frac{Li - 0}{\Delta t}$$

und damit proportional dazu eine große elektromotorische Kraft in der Sekundärspule entsteht.

Anker, Unterbrecher und Verteiler rotieren mit einer Geschwindigkeit, die der des Motors proportional ist.

Die Zündung von Flugzeugmotoren wird ausschließlich durch Magnetapparate erzielt, da man aus Sicherheitsgründen ein Versagen der Batterie ausschließen muß. Im allgemeinen hat jeder Flugzeugmotor sogar zwei magnetische Zündvorrichtungen.

Differentialform der elektromotorischen Induktionsspannung in einem festen Stromkreis. MAXWELL-FARADAYsche Beziehung

Wir wollen nun einen festen Stromkreis C in einem veränderlichen Feld betrachten. Die hierbei auftretende elektromotorische Induktionsspannung hat den Wert

$$e = -\frac{\partial \varphi}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial t}\iint\limits_{(F)} \mathfrak{B}\, d\mathfrak{F}.$$

Dabei ist F eine beliebige auf C liegende Fläche.

Wenn $\mathfrak{E}$ das elektrische Induktionsfeld im Leiter (C) darstellt, gilt

$$e = \int\limits_{(C)} \mathfrak{E}\, ds = \iint\limits_{(F)} \operatorname{rot} \mathfrak{E}\, d\mathfrak{F} \qquad \text{(STOKESscher Satz).}$$

Daraus ergibt sich

$$\iint\limits_{(F)} \operatorname{rot} \mathfrak{E}\, d\mathfrak{F} = -\frac{\partial}{\partial t}\iint\limits_{(F)} \mathfrak{B}\, d\mathfrak{F} = \iint\limits_{(F)} -\frac{\partial \mathfrak{B}}{\partial t}\, d\mathfrak{F}.$$

Da die Fläche F bis auf ihre Kontur unbestimmt ist, müssen die beiden Integrale einander gleich sein. Daraus ergibt sich die sogenannte MAXWELL-FARADAYsche Beziehung

$$\mathrm{rot}\,\mathfrak{E} = -\frac{\partial \mathfrak{B}}{\partial t}.$$

Diese Beziehung gilt allgemein, da die durch die Ladungsverteilung in den Leitern (NEWTONsche Felder) und die durch elektromotorische Kräfte chemischen Ursprungs hervorgerufenen Felder von einem Potential abgeleitet werden. Außerdem ist die Rotation der Felder Null. Es ist also im obigen Beispiel nicht erforderlich, daß $\mathfrak{E}$ nur die von der elektromotorischen Induktionsspannung herrührende Feldstärke ist.

Wenn die elektromotorische Induktionsspannung von einer Verschiebung des Stromkreises C herrührt, bei der die Kraftlinien eines festen Feldes geschnitten werden, so gelten die obigen Überlegungen, da man die gleiche elektromotorische Kraft wie beim Verschieben des Feldes mit entgegengesetzter Geschwindigkeit gegen den Stromkreis erhält. Dies aber ist gerade der Fall, den wir oben betrachteten. Zur Berechnung kann auch die Formel

$$de = -[\mathfrak{B} \times \mathfrak{V}]\,ds$$

benutzt werden, die

$$E_x = -[\mathfrak{B} \times \mathfrak{V}]_x, \ldots \quad \text{usw.}$$

ergibt.

Wir berechnen rot $\mathfrak{E}$, und wegen div $\mathfrak{B} = 0$ erhalten wir

$$\mathrm{rot}_x\,\mathfrak{E} = -\left(\frac{\partial B_x}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial B_x}{\partial y}\frac{dy}{dt} + \frac{\partial B_x}{\partial z}\frac{dz}{dt}\right)$$

und

$$\mathrm{rot}\,\mathfrak{E} = -\frac{\partial \mathfrak{B}}{\partial t}.$$

V. KAPITEL

Galvanometer

Als Galvanometer bezeichnet man Instrumente, die zur Messung von Stromstärken verwendet werden und dabei einen dem zu messenden Strom proportionalen Ausschlag durch ein bewegliches System liefern. Wir unterscheiden dabei zwei verschiedene Typen.

Drehmagnet-Galvanometer (Lord KELVIN)

Prinzip. Ein kleiner Magnet NS befindet sich unter der Wirkung eines beliebigen Feldes H im Gleichgewicht (z.B. des Erdfeldes). Nun läßt man auf ihn ein weiteres Feld h wirken, das durch einen Strom erzeugt wird und senkrecht zur Drehachse des Magneten und dem Feld H verläuft (Abb. 253). Genau

betrachtet, müßte man hierbei nicht die Felder, sondern die *Induktionen* betrachten.

Der Magnet zeigt einen Ausschlag um den Winkel Θ, der durch den Ausdruck

$$\operatorname{tg} \Theta = \frac{h}{H}$$

gegeben ist.

Da h von der Form $A\,i$ ist, wobei A eine vom Stromkreis abhängige Konstante und i die Stromstärke darstellt, können wir auch schreiben:

$$\operatorname{tg} \Theta = \frac{A\,i}{H}.$$

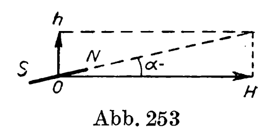


Abb. 253

Der Ausdruck in dieser Form zeigt uns, daß man eine größere Empfindlichkeit erreichen kann, wenn das Richtfeld H verkleinert wird. Zu diesem Zweck bringt man über dem beweglichen System einen festen Kompensationsmagneten NS an, der ein dem Feld H nahezu gleiches, jedoch entgegengesetzt gerichtetes Feld erzeugt. Diese Anordnung hat außerdem den Vorteil, daß dem Richtfeld H jede gewünschte Richtung gegeben werden kann. Andererseits muß man eine größere Nullpunktstabilität in Kauf nehmen (Veränderung der magnetischen Deklination und der Horizontalkomponente des Erdfeldes).

Um die Wirkung des Erdfeldes auszuschalten, wird das bewegliche System durch ein astatisches, aus zwei gleichen kleinen Magneten ns und $n's'$ bestehendes System ersetzt, die einander entgegengesetzt orientiert sind und deren Zentren durch ein Aluminiumstäbchen verbunden sind (Abb. 254).

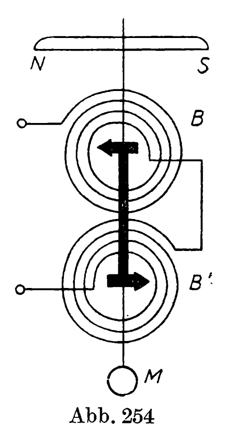


Abb. 254

Diese Anordnung wirkt sich auch in einer Erhöhung der Empfindlichkeit des Instrumentes aus. Man bringt den Magneten $n's'$ in das Zentrum einer Spule B', die in Reihe mit der Spule B liegt. Wird die Schaltung so gewählt, daß die in B und B' fließenden Ströme in einander entgegengesetzten Richtungen verlaufen, so erhalten die bei dieser Anordnung auf die beiden Magnete ausgeübten Drehmomente gleichen Sinn.

Das bewegliche System ist an einem direktionsfreien Draht aufgehängt, der mit einem Spiegel M versehen ist, mit dessen Hilfe die Ausschläge nach der POGGENDORFFschen Methode abgelesen werden können.

Drehspulgalvanometer (DÉPREZ-D'ARSONVAL)

In einem gleichförmigen magnetischen Feld hängt an einem Torsionsfaden eine von einem Strom durchflossene Drehspule. Diese dreht sich solange, bis das elektromagnetische Drehmoment $A\,i$ durch das Torsionsmoment ausgeglichen wird.

Im allgemeinen wird das Feld durch einen Hufeisenmagneten erzeugt; die Feldstärke kann man vergrößern, indem man einen Zylinder aus Weicheisen in das Innere der Spule bringt (Abb. 255).

Bei den verbesserten Ausführungen ist das Radialfeld und damit der Induktionsfluß durch die Spule auch für große Ausschlagwinkel konstant, wozu man den Polschuhen des Magneten eine zylindrische Form gibt.

Abb. 255

Bewegung des beweglichen Systems eines Galvanometers

Wir wollen zuerst die Eigenschwingung des beweglichen Galvanometersystems betrachten. Beim Drehspulgalvanometer ist das Rückstellmoment ein Torsionsmoment, das dem Ausschlag Θ proportional ist. Beim Galvanometer mit beweglichem Magneten dagegen ist das Rückstellmoment magnetischen Ursprungs und proportional $\sin\Theta$. In diesem Fall wollen wir Θ als klein annehmen. Das Rückstellmoment hat dann bei beiden Typen die Form $C \cdot \Theta$, und wenn I das Trägheitsmoment und f der Dämpfungskoeffizient ist, dann nimmt die Gleichung der Eigenschwingung des Galvanometers die Form

$$I \frac{d^2\Theta}{dt^2} = - C\Theta - f \frac{d\Theta}{dt}$$

an. Diese Gleichung kann man umschreiben in

$$I \frac{d^2\Theta}{dt^2} + f \frac{d\Theta}{dt} + C\Theta = 0.$$

Wenn das Instrument von einem Strom i durchflossen wird, wirkt auf dieses ein von Θ unabhängiges Drehmoment, wenn es sich um einen Drehspulgalvanometer handelt. Da wir angenommen hatten, daß Θ klein sei, können wir in diesem Fall sagen, daß das Richtmoment immer unabhängig von Θ ist. Die Bewegungsgleichung des beweglichen Systems hat also die Form

$$I \frac{d^2\Theta}{dt^2} + f \frac{d\Theta}{dt} + C\Theta = ki.$$

Das allgemeine Integral erhalten wir, wenn wir eine partikuläre Lösung dieser Gleichung der allgemeinen Lösung der obigen Gleichung hinzufügen. Für die partikuläre Lösung gilt

$$\Theta = \frac{k}{C} i.$$

Dieser Ausdruck für Θ ist nichts anderes als der Ausschlag, den wir für die Gleichgewichtslage der vom Strom i durchflossenen Anordnung erhielten. Wir dürfen also sagen, daß die Bewegung des Systems um seine Gleichgewichtslage

seiner Eigenschwingung entpricht. Es genügt also, die Eigenschwingung zu untersuchen, d.h., die Gleichung

$$I\frac{d^2\Theta}{dt^2} + f\frac{d\Theta}{dt} + C\Theta = 0$$

zu integrieren.

Das allgemeine Integral wird von zwei Konstanten abhängen, die durch die Anfangsbedingungen

$$\Theta = \Theta_0; \quad \frac{d\Theta}{dt} = \left(\frac{d\Theta}{dt}\right)_0 \quad \text{für} \quad t = 0$$

bestimmt sind.

Setzen wir nun $\Theta = e^{rt}$. Die Werte von r sind durch die charakteristische Gleichung

$$Ir^2 + fr + C = 0$$

gegeben, deren Diskriminante

$$f^2 - 4IC$$

ist.

1. Schwache Dämpfung:

$$f^2 - 4IC < 0.$$

Wir setzen

$$\omega = \sqrt{\frac{C}{I} - \frac{f^2}{4I^2}},$$

$$r = -\frac{f}{2I} \pm j\omega.$$

Das allgemeine Integral ist dann von der Form

$$\Theta = \Theta_0 e^{-\frac{ft}{2I}} \cos(\omega t + \varphi).$$

Es handelt sich also um eine gedämpfte sinusförmige Schwingung mit der Pseudoschwingungsdauer

$$T = \frac{2\pi}{\omega}.$$

Diese Schwingungen sollten möglichst vermieden werden, damit die Messungen kurzzeitig durchgeführt werden können. Man muß also das Galvanometer stärker dämpfen.

Wenn wir mit a_n die Amplitude der n-ten Schwingung bezeichnen, sollte das Verhältnis $\frac{a_{n+1}}{a_n}$ möglichst klein sein:

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = e^{-\frac{fT}{2I}};$$

$\frac{f}{2I}$ wird der *Dämpfungskoeffizient* und der Ausdruck

$$\frac{fT}{2I} = \ln\frac{a_n}{a_{n+1}}$$

logarithmisches Dämpfungsdekrement genannt.

Die Vergrößerung der Dämpfung verursacht jedoch auch eine größere Pseudoschwingungsdauer. Bei schwachen Dämpfungen ist diese Veränderung vernachlässigbar, da sie nur vom Quadrat der Dämpfung abhängt. Diese Vergrößerung führt schließlich zu einer unendlichen Schwingungsdauer, wenn im Grenzfall

$$\frac{C}{I} = \frac{f^2}{4I^2}$$

wird.

2. Kriechen:
$$\frac{f^2}{4I^2} > \frac{C}{I}.$$

Das allgemeine Integral hat dann die Form

$$\Theta = \Theta_1 e^{r_1 t} + \Theta_2 e^{r_2 t},$$

wobei r_1 und r_2 negativ sind:

$$r = -\frac{f}{2I} \pm \sqrt{\frac{f^2}{4I^2} - \frac{C}{I}}.$$

Wir nehmen an, daß r_2, absolut betrachtet, die größere der beiden Wurzeln darstellt. $\Theta_2 e^{r_2 t}$ nimmt sehr schnell ab, und zwar um so schneller, je größer f ist. Andererseits nimmt $\Theta_1 e^{r_1 t}$ sehr viel langsamer ab, so daß wir dabei nichts gewinnen. Es ist also nutzlos, zu stark zu dämpfen.

3. Aperiodischer Grenzfall:
$$\frac{f^2}{4I^2} = \frac{C}{I}.$$

In diesem Fall gilt

$$r_1 = r_2 = -\frac{f}{2I}$$

und

$$\Theta = (At + B)e^{-\frac{f}{2I}t}.$$

Wir haben damit die *kritische Dämpfung* eingestellt. Trotzdem ist es sehr vorteilhaft, einige stark gedämpfte Schwingungen auftreten zu lassen. In jedem Fall müssen Reibungskräfte vermieden werden. Sind diese vorhanden, so wird das bewegliche System im allgemeinen eine falsche Nullpunktseinstellung aufweisen. Stellt sich die Gleichgewichtslage erst nach einigen Schwingungen ein, so ist man sicher, daß diese nicht durch Reibungsfehler beeinträchtigt wird.

Wir wollen uns nun der Lösung eines speziellen Problems zuwenden, das auftritt, wenn wir Ladungen messen wollen, die während eines kurzzeitigen starken Stromstoßes abfließen. Betrachten wir also ein bewegliches System mit kritischer Dämpfung, das im Augenblick $t = 0$ aus der Stellung $\Theta = 0$ mit der Winkelgeschwindigkeit ω_0 bewegt wird.

1. Fall. Das System zeigt kritische Dämpfung:

$$\Theta = \omega_0 t e^{-\frac{t}{\tau}},$$

wobei τ für den Ausdruck $\frac{2I}{f}$ gesetzt ist und als Zeitkonstante bezeichnet wird. Wir wollen jetzt die maximale Auslenkung

$$\frac{1}{\omega_0}\frac{d\Theta}{dt} = e^{-\frac{t}{\tau}}\left(1 - \frac{t}{\tau}\right)$$

suchen. Der maximale Ausschlag wird nach der Zeit τ erreicht und hat den Wert

$$\frac{\omega_0 \tau}{e}.$$

2. Fall. Das System ist ungedämpft:

$$\Theta = \Theta_0 \sin\left(2\pi \frac{t}{\tau_0} + \varphi\right).$$

Dabei werden

$$\varphi = 0 \quad \text{und} \quad \Theta_0 = \omega_0 \frac{\tau_0}{2\pi}.$$

Die maximale Auslenkung wird hierbei nach der Zeit $\frac{\tau_0}{4}$ erreicht und hat den Wert $\omega_0 \frac{\tau_0}{2\pi}$.

Nun ist

$$\tau_0 = 2\pi \sqrt{\frac{I}{C}} = 2\pi \frac{2I}{f} = 2\pi\tau,$$

da

$$\frac{f^2}{4I^2} = \frac{C}{I} \quad \text{und} \quad \tau = \frac{2I}{f}$$

gilt.

Die Amplitude ist also e mal so groß wie bei der gedämpften Schwingung und wird nach einer $\frac{2\pi}{4} = 1{,}57$ mal so langen Zeit erreicht.

Drehmagnetgalvanometer

Die vorstehende Theorie ist auch hier vollständig anwendbar. Das vom Strom erzeugte Feld ist der Anzahl der Windungen proportional. Betrachten wir noch einmal die Anordnung in Abb. 254. Wenn wir eine der Spulen durch eine gleichdimen-

sionierte, jedoch mit einem Draht von $p$mal kleinerem Querschnitt gewickelte Spule ersetzen, wird die Anzahl der Windungen und folglich auch das Feld mit p multipliziert. Ferner ist die Länge des Drahtes mit p und der Widerstand der Spule dabei mit p^2 zu multiplizieren. Das Verhältnis $\frac{\Theta}{i}$ ist also der Wurzel des Widerstandes proportional:

$$\frac{\Theta}{i} = c\sqrt{r}$$

oder

$$\Theta = c\sqrt{ri^2}.$$

Für ein gegebenes Richtfeld und bekannte Dimensionen der Spule *hängt der Ausschlag nur von der im System verbrauchten Leistung ab.*

Mit R bezeichnen wir den Widerstand des äußeren Stromkreises, der von einem Generator mit der elektromotorischen Kraft e gespeist wird (sein Widerstand ist in R enthalten):

$$i = \frac{e}{R + r}.$$

Daraus ergibt sich

$$\Theta = \frac{c\sqrt{r}\,e}{r + R} = \frac{ce}{\frac{R}{\sqrt{r}} + \sqrt{r}}.$$

Wir erhalten einen maximalen Ausschlag, wenn

$$\frac{R}{\sqrt{r}} = \sqrt{r}$$

ist. Es erweist sich also als zweckmäßig, *eine Spule zu wählen, deren Widerstand ungefähr gleich dem des äußeren Stromkreises ist.*

Unter diesen Umständen kann man noch Ströme in der Größenordnung von 10^{-12} Ampere nachweisen.

Weicheisenamperemeter und -voltmeter

Für industrielle Zwecke werden stabile Instrumente benötigt, die, in beliebiger Gebrauchslage aufgestellt, ein unmittelbares Ablesen gestatten.

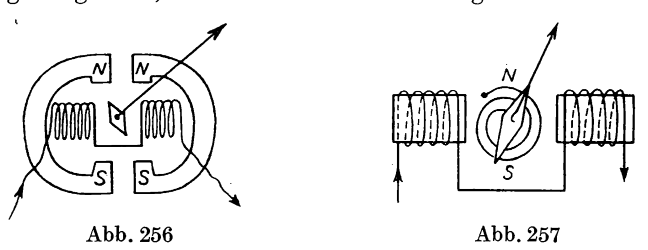


Abb. 256 Abb. 257

Das Richtfeld wird von zwei starken Permanentmagneten (Abb. 256) erzeugt und ist so stark, daß das Erdfeld vernachlässigt werden kann. Der bewegliche Magnet besteht aus einem Weicheisenstab und ist an einer Achse befestigt,

die sich in Achatlagern dreht. Unter dem Einfluß der wirkenden Felder magnetisiert sich der Weicheisenstab und orientiert sich in Richtung der Resultante der Felder. Er ist mit einem Zeiger verbunden, der sich vor einer Skala bewegt.

Bei den sogenannten *elektromagnetischen* Instrumenten wird das Richtfeld durch eine Spiralfeder ersetzt. Diese Apparate haben den Vorzug, daß Entmagnetisierungseffekte im Laufe der Zeit (Abb. 257) keine Rolle spielen.

Das Drehmoment ist dem Quadrat der Stromstärke ungefähr proportional. Diese Instrumente haben den Vorteil, auch bei Wechselströmen verwendet werden zu können, haben jedoch den Nachteil, daß ihr Ausschlag durch die Hysteresis des Weicheisens beeinflußt wird. Durch die Verwendung von Eisennickellegierungen mit einer geringen Hysteresis kann man heute eine Meßgenauigkeit von 1–2 Tausendstel des Maximalausschlages erreichen.

Drehspulgalvanometer

Die Spule dieser Galvanometer besteht aus n Windungen der Höhe l und der Breite $2a$ (Abb. 258). Das Radialfeld übt auf die horizontalen Windungsabschnitte keine Wirkungen aus. Dagegen unterliegen die vertikalen Teile elektromagnetischen Kräften. Das Drehmoment, das auf den Rahmen wirkt, ist gegeben durch den Ausdruck

$$D = 2a\,l\,n\,H i = n\,F\,H i = \Phi i,$$

wobei Φ der Fluß durch die *senkrecht zum Feld angenommene* Spule ist.

Die Bewegungsgleichung der Spule hat also die Form

$$I\frac{d^2\Theta}{dt^2} + f\frac{d\Theta}{dt} + C\Theta = \Phi i.$$

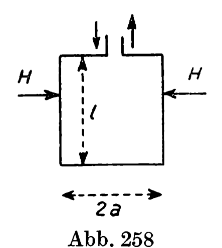


Abb. 258

Die Gleichgewichtslage ist gegeben durch

$$\Theta = \frac{\Phi}{C}\,i.$$

In der Spule wird die elektromotorische Kraft e induziert, die sich zu

$$e = -2nHlv = -2nHal\frac{d\Theta}{dt} = -\Phi\frac{d\Theta}{dt}$$

ergibt. Wenn mit R der Gesamtwiderstand bezeichnet wird und die Spule geschlossen ist, erhalten wir für die Stromstärke den Ausdruck

$$i = i_0 - \frac{\Phi}{R}\frac{d\Theta}{dt}.$$

Dabei ist i_0 der zu messende Strom.

Die Bewegungsgleichung stellt sich also in der Form

$$I\frac{d^2\Theta}{dt^2}+\left[f+\frac{\Phi^2}{R}\right]\frac{d\Theta}{dt}+C\Theta=\Phi i_0$$

dar.

Wir sehen, daß durch die Induktion eine zusätzliche Dämpfung auftritt, der gegenüber f im allgemeinen vernachlässigbar ist.

Bei konstantem Trägheitsmoment ist der Ausschlag eines Galvanometers dem Quadrat seiner Eigenschwingung proportional. Wir erhalten also

$$\Theta=\frac{\Phi i_0}{C}$$

und

$$C=I\omega^2=I\frac{4\pi^2}{T^2}.$$

Dabei ist T die Schwingungsdauer der Anordnung. Für Θ können wir damit schreiben:

$$\Theta=\frac{\Phi T^2}{4\pi^2}\frac{i_0}{I}.$$

Weiterhin kann man zeigen, daß für ein gegebenes Richtfeld der Galvanometerausschlag proportional der Quadratwurzel aus der in der Anordnung verbrauchten Leistung ist. Es gelten die gleichen Bedingungen wie beim Galvanometer mit beweglichem Magneten für die Anpassung des Spulenwiderstandes an den Widerstand des Stromkreises.

Diese Drehspulgalvanometer sind im allgemeinen bis zu 10^{-11} Ampere benutzbar. Mit einigen Spezialinstrumenten können sogar 10^{-14} Ampere gemessen werden. Da das Arbeiten mit Drehspulgalvanometern Vorteile bietet, verdrängen diese Instrumente immer mehr die Galvanometer mit beweglichem Magneten, obwohl mit diesen noch Ströme von 10^{-15} Ampere gemessen werden können.

Amperemeter und Voltmeter mit Drehspule

Ein Mikroamperemeter besteht aus einem beweglichen Aluminiumrahmen, um den die Windungen einer Spule gelegt werden. Der Rahmen ist mit Hilfe zweier Zapfen um seine Achse drehbar. Das Rückstellmoment des Rahmens wird durch eine Spiralfeder hervorgerufen. Der Aluminiumrahmen selbst stellt eine Kurzschlußwindung dar, in der Induktionsströme auftreten. Wenn wir mit Φ_0' den Fluß durch diese Windung und mit R ihren Widerstand bezeichnen, tritt in der Bewegungsgleichung ein Reibungsterm der Form

$$\frac{\Phi_0'^2}{R}\frac{d\Theta}{dt}$$

auf.

Um dieses Mikroamperemeter als Amperemeter verwenden zu können, wird es so geshuntet, daß der ihm äquivalente Widerstand so klein ist, daß der Stromkreis, in dem das Amperemeter liegt, nicht beeinflußt wird.

Zur Konstruktion eines Voltmeters genügt es, einen großen bekannten Widerstand mit dem Mikroamperemeter in Reihe zu schalten. Je größer dieser Widerstand ist, um so empfindlicher muß das Instrument sein. Man hat heute in der Praxis Voltmeter mit 10000 Ω pro Volt (d.h., bei 110 V hat das Instrument einen Widerstand von $11 \cdot 10^5$ Ω) und sogar mit 20000 Ω pro Volt konstruiert.

Mikroradiometer nach Boys

Dieses Instrument wird von einer Spule mit einer einzigen Windung gebildet, die aus zwei verschiedenen Metallen besteht. Die Spule wird, an einem Torsionsdraht hängend, zwischen die Pole eines Magneten gebracht. Eine geringe Temperaturdifferenz zwischen den Lötstellen S_2 und S_1 verursacht eine Thermokraft. Durch diese Thermokraft wird ein Strom hervorgerufen, der einen meßbaren Ausschlag zur Folge hat. Der Widerstand der Spule ist sehr gering. Für einen Ausschlag der beweglichen Spule (Abb. 259) genügt bereits die Strahlungsenergie einer brennenden Kerze, die aus 100 m Entfernung auf eine der beiden Lötstellen fällt.

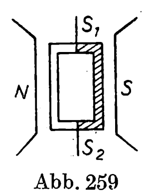


Abb. 259

Elektrodynamometer und Wattmeter

Diese Instrumente bestehen aus einer Spule, die im Richtfeld beweglich angeordnet ist und durch eine Feder in der Gleichgewichtslage gehalten wird. Die Spule wird von dem Strom i durchflossen. Das Richtfeld rührt von einer eisenlosen Spule ohne Kern her, die vom Strom I durchflossen wird (Abb. 260).

Für den Gleichgewichtszustand gilt

$$C\Theta = KHi = K'iI.$$

Das Feld H ist also proportional zu I. Wenn die Feldspule mit der Drehspule in Reihe liegt, dann ist $I = i$, und wir können

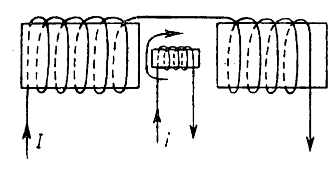


Abb. 260

$$C\Theta = K'i^2$$

schreiben. Auf diese Weise erhält man ein *elektrodynamisches Amperemeter*, das für Wechselstrom zu verwenden ist.

Wenn die Drehspule mit einem zusätzlichen Widerstand zwischen die Klemmen eines Verbraucherkreises gelegt wird, ist die Stromstärke i der Spannung U an den Klemmen des Verbraucherkreises proportional.

Die Spulen, die das Richtfeld erzeugen und nur einen geringen Widerstand haben, befinden sich in diesem Kreis in Reihe. Der Ausschlag ist dann $U \cdot I$ proportional, d.h. proportional der verbrauchten Leistung. Wir haben damit ein *Wattmeter* konstruiert. Selbstverständlich ist I der Strom, der im Verbraucherkreis fließt, oder, anders gesagt, die Spule mit dem Strom I liegt mit diesem Kreis in Reihe.

Die Messung der in einem Kreis verbrauchten Energie wird mit Hilfe eines *Zählers* vorgenommen, der nach dem gleichen Prinzip gebaut ist. Die bewegliche Spule ist durch einen kleinen eisenlosen Motoranker ersetzt, der mit einer Kupferscheibe auf einer Achse befestigt ist, die sich zwischen den Schenkeln eines Hufeisenmagneten befindet. Die in der Scheibe auftretenden FOUCAULTschen Ströme verursachen ein Dämpfungsmoment $\gamma \frac{d\Theta}{dt}$.

Bei gleichförmiger Rotationsgeschwindigkeit steht dieses Moment im Gleichgewicht mit dem elektromagnetischen Moment, das wir gleich $U I$ setzen können (γ wird entsprechend gewählt):

$$\gamma \frac{d\Theta}{dt} = U I.$$

Daraus folgt

$$\Theta = \frac{1}{\gamma} \int U I \, dt = \frac{W}{\gamma}.$$

Die (durch ein Zählwerk festgestellte) Gesamtdrehzahl kennzeichnet also die verbrauchte Energie W.

Ballistisches Galvanometer

Ein ballistisches Galvanometer ist grundsätzlich nichts Neues, sondern stellt ein Galvanometer zur Messung einer während einer sehr kurzen Zeit τ durch einen Stromkreis fließenden Elektrizitätsmenge dar.

Wenn zur Zeit t die Stromstärke i in der Galvanometerspule fließt, dann gilt

$$I \frac{d^2\Theta}{dt^2} + f \frac{d\Theta}{dt} + C\Theta = \Phi_0 i.$$

Nach Multiplikation mit dt und nachfolgender Integration von 0 bis τ ergibt sich

$$I \left[\frac{d\Theta}{dt}\right]_0^\tau + f\,[\Theta]_0^\tau + C \int_0^\tau \Theta \, dt = \Phi_0 \int_0^\tau i\,dt = \Phi_0 q.$$

Das Zeitintervall τ sei so kurz, daß keine merkliche Drehung der Spule auftritt:

$$\Theta = 0 \quad \text{für} \quad 0 < t < \tau.$$

Andererseits ist für $t = 0$ auch die Winkelgeschwindigkeit 0, während sie zur Zeit τ den Wert ω_0 besitzt.

Die obige Gleichung vereinfacht sich also zu

$$I\omega_0 = \Phi_0 q.$$

Der Maximalausschlag ist der Winkelgeschwindigkeit ω_0 und damit auch der Elektrizitätsmenge q proportional. Der Proportionalitätsfaktor ist eine Funktion der Dämpfung und der Schwingungsdauer T_0.

Für den Fall der kritischen Dämpfung erhielten wir den Ausdruck

$$\Theta_m = \omega_0 \frac{T_0}{2\pi} \cdot \frac{1}{e}.$$

Für unsere Betrachtungen ergibt sich also die Gleichung

$$\frac{\Theta_m}{q} = \frac{\Phi_0 T_0}{2\pi I} \cdot \frac{1}{e},$$

die uns gestattet, den Wert für q anzugeben, da wir Θ_m messen und alle anderen Faktoren als bekannt vorausgesetzt werden können.

Fluxmeter

Hierbei handelt es sich wieder um ein Drehspulgalvanometer, bei dem keine Rückstellkraft vorhanden ist. Jede beliebige Stellung der Spule ist also eine Gleichgewichtsstellung, solange sie nicht von einem Strom durchflossen wird. Eine Vorrichtung gestattet es, den Rahmen in die Nullage zurückzubringen. Bezeichnen wir mit Φ_0 den Kraftfluß durch die Spule, mit e_0 die elektromotorische Kraft des äußeren Stromkreises und mit R den Gesamtwiderstand, so ergibt sich die Bewegungsgleichung in der Form

$$I \frac{d^2\Theta}{dt^2} + \left[f + \frac{\Phi_0^2}{R}\right] \frac{d\Theta}{dt} = \Phi_0 \frac{e_0}{R}.$$

Wir nehmen nun an, daß diese elektromotorische Kraft e_0 nur in einem bestimmten Zeitintervall wirkt und daß das Fluxmeter zur Zeit τ erneut im Gleichgewicht steht. Multiplizieren wir nun wieder die oben angegebene Gleichung mit dt und integrieren von 0 bis τ, dann erhalten wir

$$I \left[\frac{d\Theta}{dt}\right]_0^\tau + \left(f + \frac{\Phi_0^2}{R}\right) [\Theta]_0^\tau = \frac{\Phi_0}{R} \int_0^\tau e_0 dt$$

und

$$\left(f + \frac{\Phi_0^2}{R}\right) \Theta = \frac{\Phi_0}{R} \int_0^\tau e_0 dt.$$

Fluxmeter werden hauptsächlich zur Messung von Kraftflußveränderungen verwendet. Bezeichnen wir mit e_0 die elektromotorische Induktionsspannung, dann ist

$$e = -\frac{d\Phi}{dt}.$$

Wird z.B. der äußere Kreis von einer Spule mit einigen Windungen bekannter Fläche gebildet, die sich in dem zu messenden Feld befindet, so tritt bei Ent-

fernung der Spule aus dem Feld eine Veränderung des Flusses um $\Delta\Phi$ auf. Es entsteht eine momentane elektromotorische Kraft

$$e = -\frac{d\Phi}{dt}.$$

Wir erhalten also

$$\int_0^\tau e_0 dt = -\Delta\Phi$$

und daraus bis auf das Vorzeichen

$$\Theta = \frac{\frac{\Phi_0}{R}}{f + \frac{\Phi_0^2}{R}} \Delta\Phi.$$

Sind R und f klein, dann gilt

$$\Theta = \frac{\Delta\Phi}{\Phi_0}.$$

Durch Messung von Θ erhalten wir wenigstens die 1. Näherung für $\Delta\Phi$ einen von dem Widerstand R des äußeren Stromkreises unabhängigen Ausdruck.

VI. KAPITEL

Gleichstrommaschinen

Allgemeine Betrachtungen

Gleichstrommaschinen sind Erzeuger einer gleichsinnigen elektromotorischen Kraft, die bei Antrieb einen definierten Gleichstrom liefern, oder Verbraucher, die einen bestimmten Motorstrom aufnehmen und dafür eine bestimmte Leistung abgeben, wenn sie mit Gleichstrom gespeist werden. Es handelt sich also um *Dynamos* (dynamoelektrische Maschinen) und *Gleichstrommotoren.* In einem Dynamo wird ein Leiter der Länge l, der senkrecht zur Richtung des Magnetfeldes H liegt, mit der zu l und H senkrecht stehenden Geschwindigkeit v bewegt und erzeugt dabei nach dem Induktionsgesetz die elektromotorische Kraft

$$e = Hlv.$$

Im Gleichstrommotor wirkt auf den gleichen Leiter l, der von einem Strom i durchflossen wird, die LAPLACEsche Kraft

$$F = Hli.$$

Wenn wir jetzt annehmen, daß sich der Leiter in der Zeit dt um dx verschiebt, sehen wir sofort, daß die LAPLACEsche Kraft die mechanische Arbeit

$$dA = Hlidx = Hlivdt$$

liefert. Während der Verschiebung mit der Geschwindigkeit v entsteht an den Enden des Leiters l eine Gegen-EMK

$$e = -Hlv,$$

die den Ladungen idt die elektrische Energie $Hlvidt = dA$ entzieht. Dreht sich ein Dynamo mit der Geschwindigkeit v und erzeugt dabei einen Strom i, so sehen wir wieder, daß die während der Zeit dt verfügbare elektrische Energie $eidt$ gerade gleich der Arbeit der LAPLACEschen Kraft F ist, die ihrerseits gerade die zur Erzeugung des Stromes i notwendige Geschwindigkeit v hervorruft.

Bei Dynamos und Elektromotoren, die auf den Induktionsgesetzen und der LAPLACEschen Kraft beruhen, wird die Energie also vollständig, d.h. mit dem Wirkungsgrad 1, umgewandelt, entweder von elektrischer in mechanische Energie oder umgekehrt. Die auftretenden Energieverluste (z.B. durch JOULEschen Effekt in den Leitern oder mechanische Reibung) können durch eine geeignete Konstruktion der Gleichstrommaschinen sehr klein gehalten werden. Der Wirkungsgrad für kleine Maschinen liegt zwischen 85 und 90%, der für große bei 95%.

Verschiedene Gleichstrommaschinen

Notwendigkeit der Kommutation

Einem Leiter der Länge l, der sich in einem Magnetfeld H befindet, wird durch eine gleichförmige Rotationsbewegung die Geschwindigkeit v erteilt. Um eine von der Zeit unabhängige gleichförmige elektromotorische Kraft zu erhalten, muß das Magnetfeld H eine *radiale* Symmetrie besitzen. Der Leiter l muß aber einem *geschlossenen* Stromkreis angehören. Eine solche Konstruktion ist nicht realisierbar, da ein fester Körper nicht dauernd eine geschlossene Oberfläche überstreichen kann, wie sie das radiale Induktionsfeld darstellt.

Betrachten wir einige mögliche Bauformen:

Das BARLOWsche Rad

Das uns bereits bekannte BARLOWsche Rad (Abb. 212) ist ein Beispiel eines Gleichstrommotors. Übertragen wir nun umgekehrt auf dieses Rad eine Rotationsbewegung. In einem bestimmten Zeitpunkt verschiebt sich der Leiter, der aus dem im Quecksilber befindlichen Teil der Scheibe besteht, senkrecht zu H. Dies ist also der Sitz der elektromotorischen Kraft, die man zwischen A und B feststellen kann. Die Funktion dieser Anordnung beruht auf der Tatsache, daß der in das Quecksilber eintauchende Teil der Scheibe infolge der „Kommutation" durch das Quecksilber in jedem Augenblick durch den nachfolgenden Teil der Scheibe ersetzt wird.

Unipolarmaschine

Bei dem unipolaren Dynamo werden die gleichen Konstruktionsformen benutzt (Abb. 261). Ein Zylinder aus magnetisiertem Eisen wird um seine Achse drehbar angeordnet. Die Induktion auf der Oberfläche des Eisens möge der Pfeilrichtung

in der Abb. 261 entsprechen. Zwei Bürsten, von denen eine an der Achse und eine auf dem Umfang des Zylinders angreifen, dienen zur Zu- und Ableitung des Stromes. In einem gegebenen Zeitpunkt verschiebt sich der Leiter OMP und schneidet die Kraftlinien. Dabei tritt in ihm eine elektromotorische Kraft auf, die man auch zwischen A und B feststellen kann. Diese elektromotorische Kraft ist recht beträchtlich, da die Induktion im Eisenzylinder groß ist. Gegenüber dem BARLOWschen Rad bietet sich daher ein erheblicher Vorteil. Die Kommutation in der eben beschriebenen Anordnung wird durch die Bürsten realisiert.

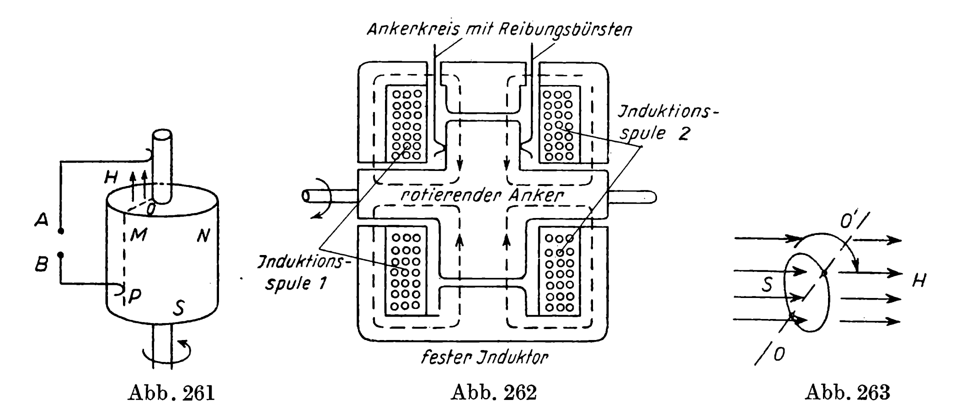


Abb. 261 Abb. 262 Abb. 263

Die erste von FARADAY benutzte Konstruktion dieser Art ist in Abb. 261 dargestellt. Dabei ist NS ein zylindrischer Permanentmagnet. In Abb. 262 ist eine moderne Ausführungsform von POIRSON (600 kW-Dynamo) dargestellt.

Der unipolare Dynamo mit einem einzigen Leiter und sehr großem Querschnitt ist besonders zur Erzeugung sehr starker Ströme (einige zehntausend Ampere) bei sehr schwachen elektromotorischen Kräften (einige Zehntel Volt) konstruiert. Er wird speziell zur Erzeugung der Ströme bei der industriellen Elektrolyse verwendet.

In einem gleichförmigen Magnetfeld H möge sich die Drahtschleife S um die Achse OO' senkrecht zur Zeichenebene der Abb. 263 drehen. Wie wir bereits im Kapitel „Induktion" gesehen haben, tritt bei dieser Drehbewegung eine *elektromotorische Wechselspannung* auf. Um von dieser Anordnung zum klassischen Dynamo zu gelangen, muß man Kommutationsmethoden anwenden.

Der elektrische Dynamo

Die erste derartige Maschine zur Erzeugung geglätteter Wechselspannung durch Ausnutzen der Induktion wurde 1832 von AMPÈRE entwickelt. Die erste wirklich brauchbare Maschine war die von GRAMME, die aus einem festen Induktor, einem sich drehenden Anker und einem Kommutator, dem Kollektor, bestand.

Auf den Weicheisenzylinder, der um die Achse OO' drehbar ist, werden Drahtwindungen gelegt, wie es in Abb. 264 dargestellt ist. Dieser Zylinder bildet den *Anker* des Dynamos.

Der *Stator* besteht aus einem Weicheisengestell mit zwei einander gegenüberstehenden Polschuhen, zwischen denen und dem Anker ein nur enger Spalt vorhanden ist. Diese beiden *Polschuhe* N und S sind jeweils mit einer Feldspule versehen. Läßt man nun durch die Spule N in Pfeilrichtung einen Strom fließen, so tritt im Stator und im Anker eine magnetische Induktion in der in der Abbildung angegebenen Richtung auf. Das durch diese magnetische Induktion aufgebaute Magnetfeld im Spalt ist ebenso stark wie die Induktion im Stator und im Anker. Wir betrachten nun die um den Anker gelegte Wicklung 1–2–3–4–5–6–7–8–9 und lassen in Pfeilrichtung einen Strom i hindurchfließen (Richtung 1, 2, ..., 9). Die Drahtabschnitte 2–3, 4–5, 6–7 und 8–9 befinden sich außerhalb des Feldes. Dagegen befinden sich die Drahtabschnitte 1–2 und vor allem 5–6 im linken Spalt und unterliegen dort einer nach oben gerichteten LAPLACEschen Kraft

$$F = Hli,$$

wobei l die Länge jedes Drahtabschnittes ist. Ebenso kann man zeigen, daß auf die Drahtabschnitte 3–4 und 7–8, die sich im rechten Spalt befinden, unter den gleichen Bedingungen die nach unten gerichtete Kraft F wirkt. Die auf alle Drahtabschnitte 1–2, 3–4, 5–6, 7–8, ... wirkenden Kräfte stellen also ein Drehmoment dar und drehen den Anker im Uhrzeigersinn.

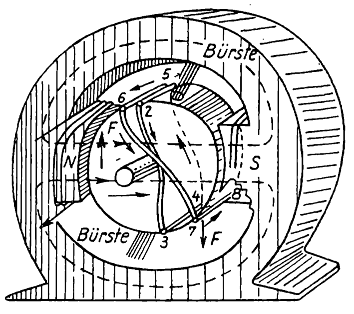


Abb. 264

Nun wollen wir jedoch annehmen, daß unsere Wicklung 1–2, ..., 9–10, ... auf die gesamte Oberfläche des Ankers verteilt sei und daß durch die Wicklung immer ein Strom in der gleichen Richtung fließe. Dabei werden wir feststellen, daß die Drahtabschnitte, wenn sie sich im rechten Spalt befinden, wo der Strom umgekehrt zu 7–8 fließt, einer Kraft $-F$ unterliegen und daß das auftretende Moment gerade das vorhergehende aufhebt. Bei einer Betrachtung der gesamten Ankeroberfläche heben sich die einzelnen Drehmomente also auf.

Um eine Drehbewegung des Ankers zu erzielen, müssen durch irgendein Verfahren die Drahtabschnitte 1–2, 5–6 usw. (die wir $4K + 1$ nennen und die dem Drahtabschnitt 1′–2′ entsprechen) von den Abschnitten der Art 3–4, 7–8 usw. (die wir mit $4K + 3$ bezeichnen) aufgeteilt werden. Ist diese Aufteilung einmal gemacht, so können wir ein Drahtstück der Art 1′–2′ sofort von einem der Art $4K + 3$ unterscheiden und durch alle Drahtabschnitte der Art $4K + 1$, die sich links von der vertikalen Achse in unserer Abbildung (Seite N) befinden, einen Strom in Richtung 1–2 fließen lassen. Dadurch erhalten wir ein bestimmtes Drehmoment. Lassen wir nun durch alle Drahtenden der Art $4K + 1$, die sich rechts von der vertikalen Achse unserer Abbildung (Seite S) befinden, einen Strom in entgegengesetzter Richtung 2′–1′ fließen, so tritt ein Drehmoment der gleichen Richtung auf.

Zu diesem Zweck entfernen wir die Isolation der Ankerdrähte der Art $4K + 1$ (1–2, 5–6, ...) wenigstens auf dem äußeren Teil des Ankers, nicht dagegen die der Drahtabschnitte $4K + 3$ (3–4, 7–8, ...). Nun bringen wir zwei Bürsten an, wie sie in Abb. 264 dargestellt sind, und verbinden sie mit Plus- und

Minuspol einer Stromquelle. Aus der Abbildung ist zu sehen, daß beim Durchgang der Drahtenden der Art $4K + 1$ unter den Bürsten der Strom im gewünschten Sinne fließt, nämlich in Richtung 1–2 links und im Sinne $2'$–$1'$ rechts der vertikalen Achse. Durch das Entfernen der Isolation und das Anbringen der Bürsten erreichen wir also die notwendige Kommutation.

Tatsächlich liegen die Bürsten jedoch nicht direkt auf den Drähten, sondern an einem besonderen Teil, dem sogenannten *Kollektor*, der eine Beschädigung der Drähte vermeidet. Er besteht aus soviel kleinen leitenden Sektoren $C_1, C_2, \ldots$, wie Drahtabschnitte der Art $4K + 1$ in der Wicklung vorhanden sind (Abb. 265). Diese Sektoren sind durch Glimmerschichten voneinander getrennt und durch feste Anschlüsse jeweils mit einem Draht der Art 1–2, d.h. $4K + 1$, verbunden. Während der Rotation berühren nacheinander die einzelnen Sektoren die Bürste F und stellen dabei den Kontakt der entsprechenden Windung mit dem Stromkreis her. Wenn es n Windungen (d.h. n Drahtabschnitte der Art $4K + 3$, also insgesamt $2\,n$ wirksame Drahtabschnitte) gibt, besitzt der Kollektor n Sektoren und n Anschlüsse.

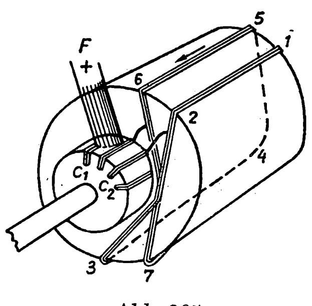


Abb. 265

Befindet sich in der Abbildung der Sektor C_2 unter der positiven Bürste, so fließt der Strom in der von den Pfeilen angezeigten Richtung. Man sieht, daß er in dem Drahtabschnitt 2–1 in umgekehrter Richtung fließt, wenn dieser Abschnitt sich rechts von der vertikalen Achse befindet, und ebenso im Drahtstück 5–6, wenn dieser sich links davon befindet.

Es ist nicht unbedingt notwendig, jede Drahtschleife mit einer Kollektorlamelle zu verbinden, es können auch je zwei oder mehrere mit einer Kollektorlamelle in Verbindung stehen.

Nach diesem Prinzip sind die Ankerwicklungen der modernen Dynamos ausgeführt. In der Konstruktion von Gramme wird die Drahtwicklung nicht auf einem zylindrischen Anker, sondern auf einem Ankerring angebracht. Dabei liegen die Drahtabschnitte 1–2 usw. (der Art $4K + 1$) auf der äußeren Oberfläche und 3–4 usw. (der Art $4K + 3$) auf der inneren Oberfläche des Ringes, wodurch sich die Wirkung des Feldes verringert. Dieser Aufbau ist zwar theoretisch einfach, erfordert jedoch die doppelte Kupfermenge und hat dadurch keine praktische Bedeutung erlangt.

Bei modernen Dynamos und Motoren besteht das Bestreben, den Anker immer mehr zu verlängern, um eine bessere Ausnutzung des Kupfers durch eine Verlängerung der wirksamen Drahtenden 1–2, 3–4 usw. gegenüber den nicht wirksamen 2–3, 4–5 zu erreichen. Die Anker sind dadurch ebenfalls kompakter geworden und erzielen im Magnetfeld ein größeres Moment.

Bei der Drehung wird das Vorzeichen der Induktion jedes Ankerbereichs mit der Umlauffrequenz verändert (der Anker selbst wird nicht wie der Wicklungsdraht „kommutiert"). Diese Induktionsveränderung führt zu Verlusten durch Hysteresis und Foucaultsche Ströme. Ihre mechanische Auswirkung ist ein entgegengesetztes Reibungsmoment, die elektrische Auswirkung ist ein Auftreten

von Hysteresiswärme oder JOULEscher Wärme. Um diese Verluste möglichst klein zu halten, wird der Anker aus Weicheisenblechen (am besten siliziumhaltig), die möglichst dünn sind und voneinander durch eine Lackschicht isoliert werden, zusammengesetzt. Diese Bleche haben die in der Zeichnung angegebene Form. In die durch die Ausschnitte entstandenen Nuten wird nun der Draht der Ankerwicklung gelegt, so daß die Ankeroberfläche mit der Oberfläche der Wicklung abschließt (Abb. 266).

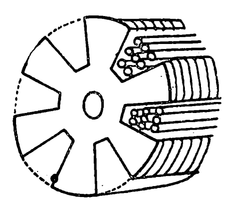


Abb. 266

Die Beschreibung, die wir im vorhergehenden Abschnitt gegeben haben, und die Erläuterungen der Arbeitsweise beruhten auf der Wirkung des Momentes, das bei einem Stromfluß in jeder Hälfte der Ankerwicklung auftrat. Wir haben also einen *Gleichstrommotor* beschrieben. Bei einem *Generator* dreht sich der Anker um seine Achse. Der Stator wird erregt, und in der rechten und linken Hälfte der Ankerwicklung tritt jeweils eine elektromotorische Kraft auf. Diese elektromotorischen Kräfte sind einander entgegengesetzt, wenn der Anker kurz geschlossen ist, d.h., wenn in ihm kein Strom fließt, sie jedoch zwischen den Bürsten in Reihe liegen. Wenn man die Gesetze der Induktion anwendet, ist es einfach, die Richtung dieser elektromotorischen Kraft in der Abb. 267 zu bestimmen. Nehmen wir an, daß sich der Anker in Richtung des angegebenen Pfeiles dreht. In die Drahtschleife 5–6–7–8 z.B. tritt der Kraftfluß zuerst durch die untere Fläche ein und nimmt bei der Rotation zu. Es entsteht eine elektromotorische Kraft, die einen Strom hervorruft, der ein Feld aufbaut, das (in der Abb.) von oben nach unten verläuft. Dieser Strom fließt von 8 nach 7 und von 6 nach 5 in einem äußeren Verbraucher R, der mit beiden Bürsten verbunden ist, in der in der Abbildung angezeigten Richtung und läßt folglich einen Pluspol und einen Minuspol an den Bürsten entstehen (F_+ und F_-).

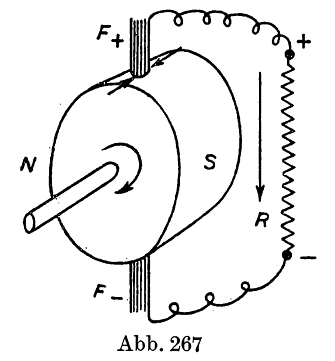


Abb. 267

Wir müssen noch darauf hinweisen, daß bei einem Generator eine Induktion in gleicher Richtung wie bei einem Motor auftritt. Wird der Strom im Stator umgepolt, so ändert auch das Feld seine Richtung. Die im Generator auftretende elektromotorische Kraft sowie das Drehmoment im Motor ändern ebenso ihre Richtung.

Fassen wir noch einmal zusammen: Die Gegen-EMK entspricht der elektromotorischen Kraft, wenn man vom Motor zum Generator übergeht. Die Stromrichtung im äußeren Stromkreis wird also umgekehrt, wenn man unter sonst gleichen Bedingungen vom Motor zum Generator übergeht, ohne die Drehrichtung zu ändern.

Berechnung der elektromotorischen Kraft eines Generators und des Drehmomentes eines Motors

Wenn sich die Drahtschleife i in einer Ebene befindet, die mit der Vertikalen den Winkel Θ einschließt und sich in der Zeit Δt um $\Delta\Theta$ verschiebt, so tritt eine elektromotorische Induktionskraft

$$\Delta e = -\frac{\Delta\Phi_i}{\Delta t} = -\frac{\Delta\Phi_i}{\Delta\Theta}\frac{\Delta\Theta}{\Delta t} = -\omega\frac{\Delta\Phi_i}{\Delta\Theta}$$

auf.

Setzen wir für $\Delta\Theta$ den Winkel α zwischen zwei aufeinanderfolgende Drahtschleifen ein, so ist $\Delta\Phi_i$ gerade gleich der Differenz der Kraftflüsse, die zu diesem Zeitpunkt durch die Drahtschleifen $i+1$ und i hindurchtreten:

$$\Delta\Phi_i = \Phi_{i+1} - \Phi_i .$$

Addiert man die von allen Drahtschleifen herrührenden elektromotorischen Kräfte, dann ergibt sich der Ausdruck

$$e = \Sigma\Delta e = -\frac{\omega}{\alpha}[(\Phi_n - \Phi_{n-1}) + (\Phi_{n-1} - \Phi_{n-2}) + \cdots + (\Phi_1 - \Phi_0)].$$

Da Φ_n und Φ_0 einander entgegengesetzte Werte haben, jeder von ihnen jedoch absolut genommen dem Maximalfluß Φ_0 durch die Drahtschleife (der Maximalfluß tritt auf, wenn die Drahtschleife senkrecht steht) gleich ist, ergibt sich

$$e = 2\omega\frac{\Phi_0}{\alpha} .$$

Nun ist

$$\omega = 2\pi N;$$

dabei ist N die Umdrehungszahl pro Sekunde. *Wenn n die Gesamtzahl der wirksamen Leiter ist,* von denen es pro Windung zwei gibt, dann muß

$$\alpha = \frac{2\pi}{\frac{n}{2}} = \frac{4\pi}{n}$$

sein, und daraus folgt endlich

$$e = 10^{-8}\,Nn\Phi_0$$

in Volt, wenn Φ_0 in Maxwell gemessen wird.

Die Berechnung des Drehmomentes eines Motors bietet keine weiteren Schwierigkeiten: Wenn sich der Anker um den Winkel $\Delta\Theta$ dreht, so leistet die Drahtschleife k die Arbeit

$$\Delta D\,\Delta\Theta = i\,\Delta\Phi .$$

Setzen wir nun

$$\Delta\Theta = \alpha \quad \text{und} \quad \Delta\Phi = \Phi_k - \Phi_{k-1},$$

so ist das Gesamtdrehmoment bestimmt zu

$$D = \Sigma \Delta D = \frac{i}{\alpha} \Sigma \Delta \Phi = i \frac{2\Phi_0}{\alpha}$$

und endlich

$$D = i \frac{n\Phi_0}{2\pi}$$

in CGS-Einheiten, wenn Φ_0 in Maxwell gemessen wird.

Stellt man die elektromotorische Kraft als Funktion der Winkelgeschwindigkeit und das Drehmoment als Funktion von i (Stromstärke) dar, so erhält man zwei Ausdrücke, die den *gleichen Koeffizienten* enthalten:

$$D = i \frac{n\Phi_0}{2\pi}, \quad e = \frac{n\Phi_0}{2\pi} \omega .$$

Diese Übereinstimmung der Faktoren in beiden Ausdrücken ist offensichtlich durch die Forderung der Energieerhaltung

$$D\omega = e i,$$

d.h. mechanische Leistung gleich elektrische Leistung, bedingt, die sowohl beim Motor als auch beim Generator gilt.

Ankerrückwirkung und Kommutation

Tatsächlich ist das Feld im Anker nur dann horizontal (wie es in der Abb. 268 gezeigt ist), wenn es sich um einen offenen Stromkreis handelt (unbelasteter Dynamo). Sobald im Anker ein Strom fließt, wird dieser natürlich magnetisiert. Untersuchen wir jetzt die Richtung des auftretenden Feldes für den Fall der Abb. 268. Der Strom i in der Windung 1–2–3–4 fließt in Pfeilrichtung und baut also ein Feld auf, das (nach der Regel von AMPÈRE) die Richtung des Pfeiles h hat. Die dazu symmetrische Drahtschleife 1′–2′–3′–4′ wird ihrerseits von einem Strom in Richtung 4′–3′–2′–1′ durchflossen und erzeugt ein Feld h'. Die Horizontalkomponenten beider Felder h und h' heben sich auf, während sich ihre Vertikalkomponenten addieren und ein resultierendes, zum Erregerfeld H senkrecht stehendes Feld h_v hervorrufen. Das durch die Komponenten der Felder H und h_v im Anker gebildete Feld ist also gegen die Horizontale geneigt. Die Kraftlinien haben die in Abb. 269a angegebene Form.

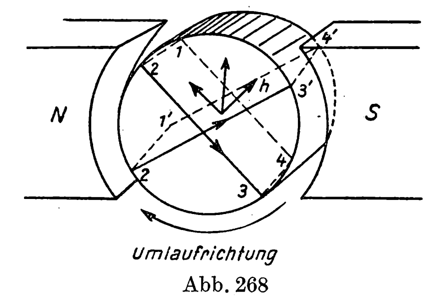


Abb. 268

Bei einem belasteten Dynamo, der im gleichen Sinn erregt und in der gleichen Richtung angetrieben wird, fließen, wie wir gesehen haben, die Ströme im Anker

in umgekehrter Richtung wie beim Motor. Das Feld h_v ist nach unten gerichtet, und die Kraftlinien haben die in Abb. 269b angegebene Form.

Die Rückwirkung des Ankers verringert den Kraftfluß Φ_0 durch die Windungen im Augenblick der Kommutation und damit die elektromotorische Kraft der Maschine, zumindest wenn man die Bürsten in senkrechter Stellung läßt (daher der Ausdruck: Ankerrückwirkung). Der Wirkungsgrad der Maschine wird etwas verringert, da die Länge der Kraftlinien im magnetischen Kreis vergrößert wird. Der magnetische Widerstand wird vergrößert und die Induktion B schließlich verringert. Durch den Kommutator darf andererseits die Ankerwicklung nicht zeitweise von

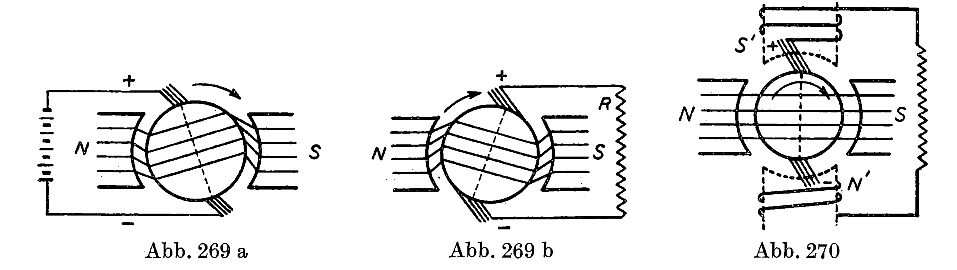


Abb. 269 a Abb. 269 b Abb. 270

dem äußeren Stromkreis abgeschaltet werden, man schließt daher für einen kurzen Augenblick unter den Bürsten zwei aufeinanderfolgende Windungen (oder Gruppen von Windungen, wenn jede Kollektorlamelle mit p Windungen verbunden ist) kurz. Durch diesen Kurzschluß fließen in der Maschine schädliche Ströme, wenn in den betreffenden Windungen eine große elektromotorische Kraft vorhanden ist. Es ist also bedeutend besser, die Funken an den Bürsten zu verhindern, indem man diese unter dem günstigsten Winkel anbringt. Fließt im Anker kein Strom, so handelt es sich um die Stellung, in der der maximale Fluß durch den Querschnitt tritt (da

$$e = -\frac{d\Phi}{dt} = 0,$$

siehe Abb. 269 und 270). Der Ankerstrom i kehrt sich jedoch plötzlich um, wenn sich die Windung an der Bürste vorbeibewegt, wobei eine Veränderung des Flusses um $2Li$ (L ist die Selbstinduktion dieser Windung) in der Zeit $\frac{1}{Nn}$ durch die Kommutation der Windung auftritt. Daraus folgt eine neue elektromotorische Kraft, die Funken erzeugt. Dieser zum Ankerstrom i proportionale Effekt folgt der Ankerrückwirkung in allen ihren Veränderungen. Zweckmäßig wird der Bürstenhalter beweglich ausgeführt, damit durch empirische Versuche die günstigste Stellung, d.h. die geringste Funkenbildung, festgestellt werden kann.

Durch die bewegliche Halterung der Bürsten können einige Nachteile auftreten. Dies ist z.B. der Fall bei Maschinen, die wechselweise als Motor und als Dynamo arbeiten sollen. Dabei kann man jedoch das Feld im Anker zur Ankerrückwirkung entgegenwirkend verändern. Dazu genügt es, *Kommutationspole* N' und S' anzubringen, wie sie in Abb. 270 gestrichelt angedeutet sind, und diese

im geeigneten Sinn zu erregen (durch einen Strom, der seine Richtung genau wie der Ankerstrom verändert; man erregt sie also in Reihe mit dem Anker selbst). Diese Kommutationspole werden rechtwinklig zu den Hauptpolen N und S angebracht. Man reguliert ihre Stromstärke so, daß man die Funken an den Bürsten zum Verschwinden bringt. Die Bürsten bleiben gegenüber N und S um 90° versetzt.

Andere Ursachen für Verluste in Gleichstromdynamos und -motoren

Außer der Ankerrückwirkung haben wir bereits im Eisen Verluste durch Hysteresis und FOUCAULTsche Ströme festgestellt. Das Eisen des Ankers unterliegt einer *wechselnden* Magnetisierung. Zeigt das Eisen eine geringe Hysteresis, dann wird seine Magnetisierung in bezug auf die Rotation eine gewisse Phasenverschiebung besitzen. Dadurch bildet sich immer ein bestimmter Magnet S_1N_1 (Abb. 271), dessen Anziehung durch NS bei der Rotation überwunden werden muß. Die FOUCAULTschen Ströme rufen einen analogen Effekt hervor, der die Überwindung eines mechanischen Bremsmomentes erfordert.

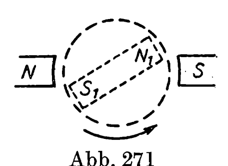


Abb. 271

Die Verluste durch den JOULEschen Effekt in den Leitern verdienen ebenfalls Beachtung. Man kann sie jedoch verschwindend klein machen, indem man den Drahtdurchmesser sehr groß wählt. Dies ist aber unzweckmäßig, da das Verhältnis von Drahtdurchmesser zu Ankerquerschnitt zu groß wird und andere Verluste dabei auftreten. Die Techniker haben festgestellt, daß das günstigste Verhältnis vorliegt, wenn *die Verluste im Kupfer gleich den Verlusten im Eisen sind*. Dies setzt jedoch voraus, daß der Motor für einen bestimmten Arbeitsbereich konstruiert wird. Wie wir sehen werden, hat bei Zugmotoren eine Vergrößerung des Widerstandsmomentes ein plötzliches starkes Anwachsen des aufgenommenen Stromes zur Folge. Dadurch steigen die JOULEschen Verluste an, was aber sehr bedenklich ist, wenn man nicht den Leiterquerschnitt beträchtlich vergrößert.

Eine letzte Art von Verlusten, die erwähnt werden muß (abgesehen von der mechanischen Reibung), ist die *Übergangsspannung an den Bürsten*, die in der Größenordnung von 1 Volt liegt und die für die am Übergangswiderstand hervorgerufenen Verluste verantwortlich ist. Diese Verluste können bei Maschinen mit hohen Spannungen (600 Volt) vernachlässigt werden, sind jedoch bei kleinen Maschinen mit niedriger Spannung recht bedeutend und der Grund dafür, daß der Wirkungsgrad dieser Maschinen kleiner als der großer Maschinen ist.

Lange Erfahrungen in der Untersuchung der Ursachen haben ergeben, daß der Kontakt an den Bürsten zweckmäßig zwischen Kohle und Kupfer hergestellt wird. Daher werden die Bürsten der Dynamos aus Graphit gefertigt. Die Kontakte Metall auf Metall bringen Nachteile mit sich.

Schließlich ist bei der Bilanz des erreichbaren Wirkungsgrades noch die Berechnung der Energieverluste in den festen Stromkreisen der Maschine, des Stators, der Kommutationspole N' und S' (soweit sie vorhanden sind) usw. notwendig. Die Verluste könnten sehr verringert werden, wollte man Material (Kupfer oder Eisen) vergeuden. Man wählt daher einen Kompromiß. Zur Erregung des Stators ist ein bestimmter Strom notwendig, der in einer Spule mit einem gegebenen

Widerstand fließt. Daraus folgen wieder JOULEsche Verluste. Um in einem gegebenen magnetischen Kreis einen bestimmten Wert der Induktion zu erreichen, ist unabhängig von der Beschaffenheit der Erregerspule (viele Windungen eines dünnen Drahtes mit hoher Spannung oder wenige Windungen eines dicken Drahtes mit niedriger Spannung) eine ganz bestimmte Wattzahl erforderlich. Zur Erregung einer Gleichstrommaschine auf einen nahe der Sättigung liegenden Wert benötigt man nur 1–4% der Maschinenleistung.

Unter Berücksichtigung aller betrachteten Verluste erhält man einen Wirkungsgrad von maximal 95% bei großen Maschinen.

Leerlaufcharakteristik

Wir lassen einen Dynamo mit konstanter Geschwindigkeit rotieren und messen im offenen Stromkreis die auftretende elektromotorische Kraft E (d.h., der Dynamo ist unbelastet). Diese elektromotorische Kraft ist dem magnetischen Feld im Spalt proportional, das selbst wiederum vom Strom i in den Spulen des Stators entsprechend der Magnetisierungskurve abhängt (tatsächlich ist das magnetisierende Feld zu i proportional). Es ergibt sich also, daß die Charakteristik des offenen Dynamokreises, d.h. E als Funktion von i, für eine gegebene Rotationsgeschwindigkeit nichts anderes als die Magnetisierungskurve des aus Stator und Anker gebildeten magnetischen Kreises darstellt (siehe Abb. 272). Die gestrichelte Kurve gilt für eine starke Hysteresis.

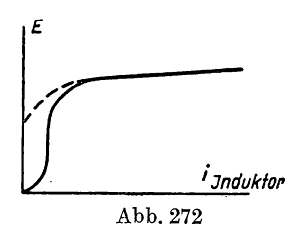


Abb. 272

Hauptschlußmotor (-dynamo). Nebenschlußmotor (-dynamo). Compoundmotor (-dynamo). Belastungskennlinie. Stabilitätsbereich

Obgleich es immer möglich ist, einen Dynamo mit einer gesonderten Erregerwicklung zu verwenden, ist im allgemeinen der Erregerkreis nicht unabhängig vom Ankerkreis.

a) Die Erregerwicklung kann aus wenigen Windungen dicken Drahtes bestehen, die in Reihe mit dem Anker liegen. Man hat dann einen sogenannten *Hauptschlußdynamo* oder *-motor*, bei dem sich das Erregerfeld mit dem durch den Anker fließenden Strom verändert.

b) Die Erregung kann durch eine Spule hervorgerufen werden, die parallel zum Anker liegt und aus der gleichen Stromquelle gespeist wird. Diese Art wird *Nebenschlußdynamo* bzw. *-motor* genannt.

c) Die Erregung kann auch teilweise durch eine in Reihe und teilweise durch eine parallel liegende Spule hervorgerufen werden. Diese Art nennt man *Compounddynamo* oder *-motor*.

Für alle diese Maschinen kann man die Charakteristiken aufzeichnen. Dazu trägt man auf der Abszisse den gesamten die Maschine durchfließenden Strom (je nachdem, ob es sich um einen Motor oder einen Generator handelt) und auf der

Ordinate die zwischen den Bürsten gemessene Potentialdifferenz auf. Dabei ist allerdings vorausgesetzt, daß die Maschine eine konstante Drehzahl besitzt oder daß man die Kennlinien bei verschiedener Rotationsgeschwindigkeit aufnimmt.

So hat also ein Hauptschlußdynamo eine ganz bestimmte Belastungscharakteristik (Abb. 273, Kurve II), die von der Leerlaufcharakteristik (Abb. 273, Kurve I) abweicht, obwohl die elektromotorische Kraft ebenfalls durch eine Magnetisierungskurve als Funktion von i gegeben ist. Die Abweichung der beiden Kurven ist durch

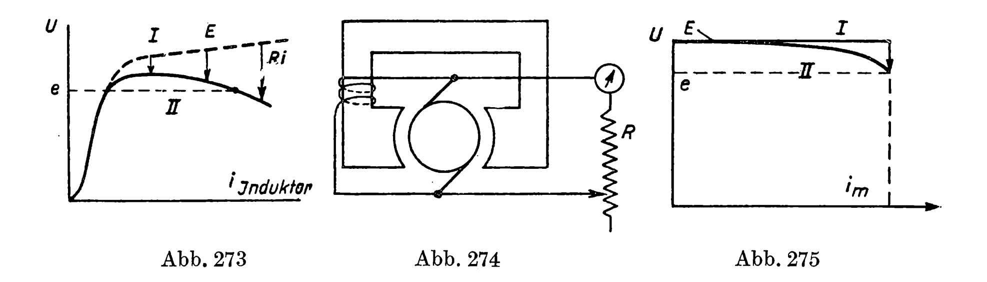


Abb. 273 Abb. 274 Abb. 275

die Potentialdifferenz bestimmt, die bei Belastung der Maschine durch den Strom i auftritt und die

$$U = e - Ri$$

beträgt, wobei R der OHMsche Widerstand aller Stromkreise ist, die zwischen den Bürsten in Reihe liegen (Stator, Anker und, falls vorhanden, die Wicklungen der Kommutationspole). Die Kurve verläuft durch ein flaches Maximum und fällt bei hohen Stromstärken schließlich ab.

Jetzt wollen wir die Charakteristik einer Nebenschlußmaschine (Abb. 274) bei ebenfalls konstanter Drehzahl aufnehmen. Am Anfang der Kurve, wenn der Strom im äußeren Stromkreis Null ist, belastet der Erregerkreis den Anker. Die Maschine erregt sich durch die vorhandene remanente Magnetisierung selbst, genau wie ein Hauptschlußdynamo unter gleichen Bedingungen. Eine bestimmte elektromotorische Kraft tritt auf, die auch bei dieser Belastung der Maschine im äußeren Stromkreis erhalten bleibt. Wird jedoch diese Belastung sehr groß, dann nimmt die Potentialdifferenz an den Klemmen der Bürsten $E - R(i + i_1)$ ab. Die Erregung nimmt daher etwas ab; die auftretende Ankerrückwirkung verringert in zunehmendem Maß die elektromotorische Kraft. Für einen bestimmten Belastungsstrom i_m wird die Charakteristik II (Abb. 275) zu einer Vertikalen: die Erregung verschwindet, und die Spannung bricht zusammen.

Beim Compounddynamo wird, wie man leicht einsieht, der Abfall der Nebenschlußcharakteristik mehr oder weniger durch den Anstieg der Hauptschlußcharakteristik kompensiert. Man erhält eine innerhalb eines großen Belastungsbereiches völlig unabhängige Spannung.

Die Kenntnis der Belastungscharakteristiken gestattet die Untersuchung der Stabilität des Arbeitsbereiches der Maschinen unter gegebenen Bedingungen.

1. Wir wollen nun die Ladung einer Akkumulatorenbatterie durch einen Hauptschlußdynamo untersuchen, die eine konstante Gegen-EMK e und einen vernachlässigbaren Innenwiderstand besitzt. Der Dynamo, der mit seiner normalen Drehzahl rotiert, muß in einem bestimmten Moment mit der Batterie verbunden werden. Der unbelastete Hauptschlußdynamo besitzt jedoch nur eine sehr geringe elektromotorische Kraft. Der Akku wird dadurch nicht von der Maschine aufgeladen, sondern über die Maschine entladen. Diesen unerwünschten Effekt kann man vermeiden, wenn man den Dynamo zuerst mit einem Widerstand R belastet und dann die Batterie dazu parallel schaltet. Gilt nun

$$U = Ri > e,$$

so befindet man sich im Aufladungsbereich. Hat jedoch der Strom i einen solchen Wert, daß man sich auf dem ansteigenden Ast der Charakteristik befindet, so folgt aus einer Erhöhung des Stromes auch eine Vergrößerung von U, wodurch in die Batterie ein stärkerer Strom fließt usw. Anders ausgedrückt, ein Arbeitspunkt auf dem ansteigenden Ast der Charakteristik (Abb. 273) ist nicht stabil. Der Strom steigt plötzlich an, bis die Maschine mit einer bedeutend höheren Belastung im zweiten, aber gleichen Punkt e auf dem absteigenden Ast der Charakteristik arbeitet.

Folgerung: Betrachtet man weiterhin die auftretenden gefährlichen Schäden (z. B. das Durchbrennen des Widerstandes R), so sieht man, daß es *niemals* günstig ist, eine Akkumulatorenbatterie mit einem Hauptschlußdynamo aufzuladen.

2. Diese Unbequemlichkeit tritt beim *Nebenschlußdynamo* nicht auf. Der Arbeitspunkt A liegt, wenn e nicht sehr klein gegen E ist, auf dem abfallenden Teil der Charakteristik, ist also stabil (Abb. 275).

3. Allgemeiner ausgedrückt: Die Potentialdifferenz an den Dynamoklemmen in der Nähe des Arbeitspunktes hat die Form

$$U_0 + R\Delta i,$$

wenn U_0 die Potentialdifferenz am Arbeitspunkt ist.

Dabei stellen Δi die Stromzunahme und R die positive oder negative Steigung der Charakteristik dar. Diese Steigung wird in Ω gemessen. Der Stromkreis setzt dem eine Gegen-EMK der Form $e + R_1 \Delta i$ entgegen, wobei $e = U_0$ ist, wenn $\Delta i = 0$ einem Arbeitspunkt entspricht. Setzen wir diese beiden Werte einander gleich, so sehen wir, daß dies einer Maschine mit konstanter EMK und einem Verbraucherkreis mit dem Innenwiderstand $R_1 - R$ entspricht. Ist $R_1 - R$ positiv, so ist der Arbeitsbereich stabil, und die einzige Lösung lautet

$$\Delta i = 0.$$

Kleine Abweichungen vom Arbeitspunkt führen wieder zum Anfangszustand zurück. Ist dagegen $R_1 - R$ negativ, so wächst Δi unaufhörlich an, und ein Kurzschluß ist die Folge. *Man kann also sagen, daß als Ursache für die Stabilisierung des Dynamos der Widerstand $-R$ im Verbraucherkreis angesehen werden kann.* Wenn R ursprünglich positiv war, ergibt sich daraus eine Instabilität, die man nur durch Hinzufügen eines Widerstandes $R_1 > R$ in den Stromkreis ausgleichen kann.

Um einen solchen Fall handelt es sich bei der Speisung eines *Kohlebogenprojektors*. Zwischen den Kohleelektroden tritt eine Potentialdifferenz e auf, die mit wachsender Stromstärke i im Bogen abnimmt. Die Charakteristik des Bogens ist negativ (Abb. 276) $[R_1 < 0]$. Dabei ist R_1 die Steigung der Tangente an die Kurve $e = f(i)$. Also ergibt ein von einem Generator mit konstanter elektromotorischer Kraft gespeister Bogen einen Kurzschluß, wenn der Bogen mit dem Generator in Reihe liegt. Zur Stabilisation muß man einen positiven Widerstand ϱ, mit $\varrho > R_1$, in Reihe schalten, wodurch Leistungsverluste auftreten. Will man den Bogen mit einem Hauptschlußdynamo speisen, der eine steigende Charakteristik R $(R > 0)$ besitzt, so muß man einen sehr großen Widerstand ϱ $(\varrho > |R_1| + R)$ in Reihe schalten, wobei die Verluste recht beträchtlich werden. Diesen Nachteil kann man vermeiden, wenn man zur Speisung des Bogens einen Dynamo mit fallender Charakteristik verwendet, wobei $R < 0$ und $R_1 - R$ positiv sind.

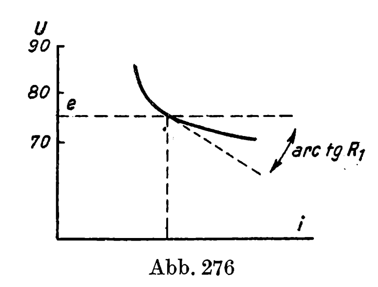
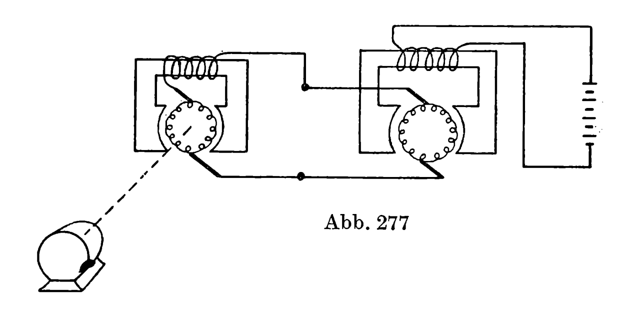


Abb. 276

4. *Experiment von* PAUL JANET. Der negative Widerstand eines Hauptschlußdynamos mit steigender Charakteristik kann verwendet werden, um sich selbsterregende Schwingungen zu erzeugen. In Abb. 277 wird ein Hauptschlußdynamo von einem Motor mit konstanter Drehzahl, der links dargestellt ist, angetrieben. Der Motor besitzt eine gesonderte Erregerwicklung. Die elektromotorische Kraft des Dynamos als Funktion des Belastungsstroms kann man in der Form

$$Ri - \beta i^3$$

darstellen, wenn man die Charakteristik in der einfachsten möglichen Form ausdrückt. Im Stromkreis ist die Gegen-EMK des Motors proportional seiner Geschwindigkeit, und wir schreiben dafür $K\omega$. Wenn nun R_1 der Widerstand und L die Selbstinduktion des Stromkreises sind, dann gilt


Abb. 277

$$Ri - \beta i^3 = K\omega + R_1 i + L\frac{di}{dt}.$$

Die im Motor verbrauchte Leistung $K\omega i$ dient jedoch nur zur Erhöhung seiner kinetischen Energie. Bezeichnen wir nun mit J das Trägheitsmoment, dann ergibt sich

$$K\omega i = \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2} J\omega^2\right) = J\omega\frac{d\omega}{dt}$$

oder

$$\frac{d\omega}{dt} = \frac{K}{J} i\,.$$

Formen wir diese Gleichung nun um und betrachten $\frac{d\omega}{dt}$ als Funktion von i, dann erhalten wir

$$\frac{K^2}{J} i + R_1\frac{di}{dt} + L\frac{d^2 i}{dt^2} = (R - 3\beta i^2)\frac{di}{dt}$$

oder

$$\frac{K^2}{J} i + (R_1 - R + 3\beta i^2)\frac{di}{dt} + L\frac{d^2 i}{dt^2} = 0\,.$$

Im allgemeinen ist R sehr groß, jedenfalls größer als R_1: Für kleine Werte von i ist der Gesamtwiderstand des Kreises negativ. Wir erhalten eine *Schwingungsgleichung mit negativer Dämpfung.* Die Schwingungsamplituden wachsen an, bis i genügend große Werte erreicht, damit $3\beta i^2$ während eines Teils der Schwingungsdauer im Mittel den negativen Widerstand $R_1 - R$ ausgleicht. Tatsächlich beobachtet man zuerst einen Stromanstieg in einer Richtung, der dann aufhört, wonach der Strom seine Richtung ändert, usw. Die Rotationsgeschwindigkeit ω des Motors, die durch $\frac{K}{J}\int i\,dt$ gegeben ist, unterliegt den gleichen Richtungsveränderungen, jedoch mit um $\pi/2$ verschobener Phase. Die Schwingungsdauer des Systems ist annähernd durch den Ausdruck

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{L}{K^2/J}}$$

gegeben, wenn die Schwingung annähernd sinusförmig ist.

Wenn die Ausdrücke

$$(R_1 - R)\frac{di}{dt}$$

sehr groß gegen

$$L\frac{d^2 i}{dt^2}$$

oder gegen

$$\frac{K^2}{J} i$$

sind, ist eine kompliziertere Untersuchung notwendig (Relaxationsschwingungen).

Mehrpoliger Dynamo. Dynamo mit drei Bürsten

Betrachten wir kurz die verschiedenen Möglichkeiten, die mit einem Dynamoanker realisiert werden können.

a) Das Prinzip des *mehrpoligen Dynamos* ist in Abb. 278 dargestellt. Bei einer Konstruktion mit vier Polen verändert sich der Kraftfluß einer Windung doppelt so oft wie bei einem zweipoligen Dynamo. Wir bringen die vier abwechselnd positiven und negativen Bürsten an den Punkten α, β, γ und δ an. Man wird dabei α und γ sowie β und δ parallel schalten und erhält so eine Anordnung, in der die elektromotorischen Kräfte im Anker entgegengesetzt sind, d. h., der Zirkulationsstrom wird eliminiert und nur der äußere Kreis belastet. Es ist auch möglich, eine Reihenparallelschaltung zu verwenden, immer unter der Bedingung, daß sich der Zirkulationsstrom im Anker aufhebt.

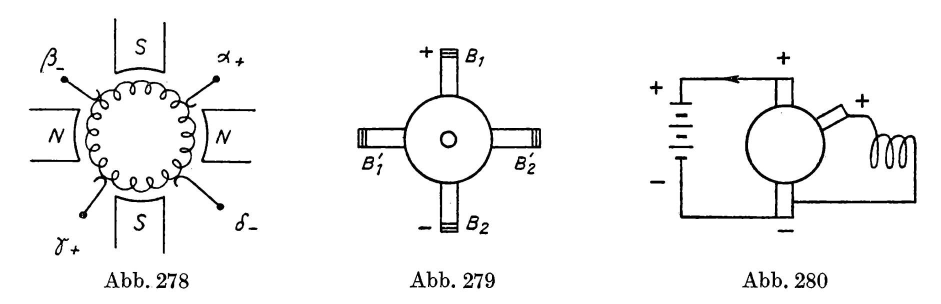


Abb. 278 Abb. 279 Abb. 280

b) Unter der Wirkung des Stromes, der den Bürsten B_1, B_2 zugeführt wird, magnetisiert sich ein Dynamoanker auch ohne Erregerkreis. Die beiden Hälften rechts und links (in Abb. 279) magnetisieren sich in entgegengesetztem Sinn. Die Feldverteilung im Anker ist schließlich die gleiche, als würde sie durch Induktion von Polen N und S hervorgerufen, die sich an den Stellen von B_1 und B_2 befänden. Daraus folgt bei einer Anordnung von zwei zusätzlichen Bürsten in B_1' und B_2' und rotierendem Anker zwischen diesen eine neue elektromotorische Kraft. Diese Besonderheit gestattet uns, eine Reihe von Anordnungen zu verwirklichen, in denen im allgemeinen zu der äußeren Erregung noch eine zusätzliche äußere Erregung hinzutritt. Wir wollen davon nur die folgende betrachten.

Dynamo mit drei Bürsten (Abb. 280). Bei diesem Dynamo liegt die Feldwicklung zwischen der dritten und einer der Hauptbürsten. Eine sehr einfache Theorie, die wir jedoch hier nicht ausführen wollen, zeigt, daß die von der Maschine geleistete elektromotorische Kraft als Funktion der Rotationsgeschwindigkeit ein sehr flaches Maximum besitzt. Dieser Dynamo ist gut zum Aufladen von Akkumulatorenbatterien in Fahrzeugen zu verwenden, deren Motoren über einen großen Drehzahlbereich variieren.

Das Amplidyn

Ein Amplidyn läßt sich vom klassischen Dynamo ableiten und gestattet eine große Verstärkung von Gleichströmen.

In Abb. 281 stellt der mittlere Kreis den Anker dar, während (1) den ersten Erregungskreis bezeichnet. Da der Magnetkreis des Stators nur wenig gesättigt ist, hat eine geringe Veränderung des Erregerstromes (1) bereits einen großen Einfluß auf das Feld. Der Anker dreht sich mit konstanter Drehzahl.

Die beiden Bürsten B_1 sind kurzgeschlossen und liegen in einer Ebene, die um einen Winkel von 90° *gegenüber dem vom Erregerstrom aufgebauten Feld gedreht ist.* Daraus ergibt sich im Anker ein sehr starker Strom, der eine beträchtliche transversale Magnetisierung (in unserem Falle horizontal) hervorruft (siehe Rückwirkung des Ankers).

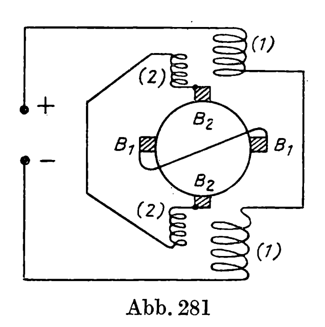


Abb. 281

Bringt man nun zwei Bürsten B_2 um 90° versetzt gegenüber den ersten an, so tritt zwischen diesen eine elektromotorische Kraft auf, die durch den oben betrachteten Effekt bedingt ist, durch den die Maschine zur normalen Erregung eine zusätzliche, sehr bedeutende Erregung erhält, die durch die Wicklungen (2) auf dem Stator erzeugt wird. Selbstverständlich kann man den Bürsten B_2, die parallel oder in Reihe mit (2) liegen, auch Ströme für andere Zwecke entnehmen. Wir haben also damit einen Dynamo, der mit einer kleinen Leistung im Kreis (1) leicht reguliert werden kann. Auf diese Art kann man Amplidyns mit einem Stromverstärkungsfaktor bis zu 10000 (abgegebener Strom dividiert durch primären Erregerstrom) herstellen. Diese Maschinen haben eine sehr große Bedeutung für die Fernsteuerung. Man kann mit ihnen z.B. folgendes Problem lösen: die Drehung eines Radargerätes oder einer Kanone mit einem Geberstrom von 10–15 Milliampere, der von einem Sender ausgeht. Dieser Strom kann sehr leicht durch ein Amplidyn auf 100 bis 150 Ampere verstärkt werden, der dann die entsprechenden mechanischen Drehmomente erzeugt.

Gegen-EMK eines Gleichstrommotors

Diese EMK kann man von zwei verschiedenen Gesichtspunkten aus betrachten: Erstens ist sie nach Definition gleich der gelieferten mechanischen Leistung W, dividiert durch den aufgenommenen Strom (dies ist allgemein auf alle Verbraucher anzuwenden). Zweitens: Bei der Rotation des Motors wird dieser zu einem Dynamo, und die Bewegung der wirksamen Windungen der Ankerspule liefert die elektromotorische Kraft

$$e = 10^{-8}\, N n \Phi_0 .$$

Nach der LENZschen Regel wird diese elektromotorische Kraft negativ und nimmt den Charakter einer Gegen-EMK an. Jedes durch den Motor fließende Coulomb ergibt einen Verlust von e Joule. Wie wir bereits im Kapitel über die Induktion ganz allgemein festgestellt haben, stimmen diese beiden Definitionen völlig überein. Es müssen nur einige jeweils entsprechende Voraussetzungen gemacht werden, wenn entweder die durch mechanische Reibung oder die durch einen elektrischen Widerstand verursachten Verluste betrachtet werden sollen. Ein Coulomb, das durch den Motor fließt, verliert also e Joule, unabhängig davon, ob die

Arbeit des Motors entnommen wird oder durch Reibung verlorengeht. Bei der Berechnung von e nach der Definition W/i enthält W die gelieferte mechanische Leistung und alle mechanischen Verluste, die durch die Arbeit des Momentes der LAPLACEschen Kräfte auftreten. Weiter darf man nicht vergessen, daß die Potentialdifferenz an den Klemmen der Maschine größer als die Gegen-EMK e ist, und zwar um die Größe Ri, entsprechend den JOULEschen Verlusten im Leiter.

Zur Behandlung der vielen Probleme elektromechanischer Natur ist der Begriff der Gegen-EMK unumgänglich, der von vielen Technikern, speziell in der Mechanik und in der Elektrotechnik, häufig vernachlässigt wird, obwohl seine Bedeutung jedoch recht beträchtlich ist. Wir wollen ein Beispiel dafür geben und ein elektrisch betriebenes Fahrzeug auf einer Gebirgsfahrt betrachten.

Für diesen Wagen brauchen wir als erstes eine Akkumulatorenbatterie. Es sei M die Masse des Wagens und Mg sein Gewicht. Wir nehmen an, daß die rollende Reibung und alle mechanischen Verluste gerade 2% des Gewichtes ausmachen. Den Luftwiderstand werden wir vernachlässigen (er kommt erst bei 60 km/h in die Größenordnung der rollenden Reibung. Man kann jedoch die Geschwindigkeit des Wagens nur bis 30 km/h steigern, wenn man noch einen brauchbaren Aktionsradius haben will. Beträgt dieser etwa 60–80 km, so macht das Batteriegewicht bereits ein Drittel des Wagengewichtes aus). Zur Vereinfachung nehmen wir an, daß es sich um einen Nebenschlußmotor handelt (dann können wir die Erregerleistung vernachlässigen) und der Motor einen Wirkungsgrad von 90% habe. Alle auftretenden elektrischen Verluste (im Anker oder im Zuführungskabel) seien JOULEsche Effekte. Der Motor sei dem Wagen angepaßt, d.h. seinem Drehzahlbereich entspricht die mittlere Wagengeschwindigkeit auf einer horizontalen Ebene.

Es gilt also:

$E - e = Ri$ beschreibt den Stromdurchgang im Anker. E ist dabei die elektromotorische Kraft der Batterie, R der Widerstand des Ankerkreises, e die Gegen-EMK des Motors mit dem Wert $AH\omega$ (H ist das gegebene Erregerfeld, ω die Winkelgeschwindigkeit des Motors und A ein Proportionalitätsfaktor).

$D\omega = 0{,}02\,Mgv$ drückt die Leistung des Motors aus, die notwendig ist, um den Wagen mit der Geschwindigkeit v trotz der auftretenden Reibung von $0{,}02\,Mg$ anzutreiben. (D stellt das Drehmoment des Motors dar.)

Bei einer konstanten Geschwindigkeit ist ω proportional zu v, und D hat den Wert AHi *mit dem gleichen Proportionalitätsfaktor* A, wie er sich aus einem früheren Resultat ($AH = 2\Phi_0/\alpha$) ergibt. Setzen wir nun noch β gleich $\frac{Mgv}{\omega}$, so erhalten wir

$$E - AH\omega = Ri\,,$$

$$AHi = 0{,}02\beta\,.$$

Wir müssen noch hinzufügen, daß der Wirkungsgrad von 90% bei einer Geschwindigkeit ω_0 gilt. Bei einer Leistung Ei_0 gilt also

$$R\,i_0^2 = \frac{1}{10}\,Ei_0$$

und

$$A H \omega_0 i_0 = \frac{9}{10} E i_0,$$

wenn man mit i_0 den Strom bei der Geschwindigkeit ω_0 bezeichnet. Dann ist also

$$R i_0 = \frac{E}{10},$$

und wir können

$$E = (A H \omega_0) \frac{\omega}{\omega_0} + \frac{E}{10} \frac{i}{i_0},$$

$$(A H i_0) \frac{i}{i_0} = 0{,}02\,\beta$$

schreiben.

Nun ist aber

$$A H \omega_0 = 0{,}9 E.$$

Setzen wir noch die Kraft, die der Fahrzeugbewegung entgegenwirkt, gleich F, dann erhalten wir

$$\frac{i}{i_0} = \frac{0{,}02\,\beta}{A H i_0} \frac{F}{F_0}$$

mit $F_0 = 0{,}02\, M g$. Es ist also

$$1 - 0{,}9 \frac{\omega}{\omega_0} = 0{,}1 \frac{i}{i_0},$$

$$\frac{i}{i_0} = \frac{F}{F_0}.$$

Mit diesen beiden Gleichungen können wir die Bewegung des Wagens und des Motors immer beschreiben, wenn $F \neq F_0$ ist.

1. *Steigung von* 6%:

$$F = \frac{2}{100} M g + \frac{6}{100} M g = \frac{8}{100} M g = 4 F_0,$$

also ist

$$\frac{i}{i_0} = 4 \quad \text{und} \quad 1 - 0{,}9 \frac{\omega}{\omega_0} = 0{,}4,$$

$$\frac{\omega}{\omega_0} = \frac{0{,}6}{0{,}9} = 0{,}667.$$

Der Strom steigt an, und zwar auf den vierfachen Wert, um das Drehmoment zu liefern. Dadurch werden die JOULEschen Verluste größer, und der Wirkungsgrad ist höchstens $1 - 0{,}4 = 60\%$; die Geschwindigkeit beträgt dabei nur $2/3\, \omega_0$.

Obwohl die Batterie die vierfache Leistung Ei liefert, kann der Wagen nur $\frac{F\omega}{F_0\omega_0} = \frac{8}{3}$ der ursprünglichen Leistung verwerten, der Rest von $4 - \frac{8}{3} = \frac{4}{3}$ wird im Anker in JOULEsche Wärme umgesetzt.

2. *Gefälle von* 2%:

$$F = \frac{2}{100} Mg - \frac{2}{100} Mg = 0,$$

also ist

$$i = 0 \quad \text{und} \quad 1 - 0{,}9\,\frac{\omega}{\omega_0} = 0,$$

$$\omega = 1{,}11\,\omega_0.$$

Rollt der Wagen mit einer Geschwindigkeit von $1{,}11\,\omega_0$, so liefert der Motor eine Gegen-EMK, die gerade ausreicht, um das Fließen eines Stromes i zu verhindern, da bei $F = 0$ kein Motorenmoment geliefert zu werden braucht.

3. *Gefälle von* 6%:

$$F = \frac{2}{100} Mg - \frac{6}{100} Mg = -2\,F_0.$$

Man hat also

$$\frac{i}{i_0} = -2 \quad \text{und} \quad 0{,}9\,\frac{\omega}{\omega_0} = 1{,}2,$$

$$\frac{\omega}{\omega_0} = 1{,}333.$$

Der Motor dreht sich um 20% schneller als unter (2). Seine Gegen-EMK übersteigt die der Batterie, und dadurch wirkt die Maschine als *Generator*. Es fließt ein Strom $i = -2i_0$ *in umgekehrter Richtung, der die Batterie auflädt.* Die mechanische Leistung des Wagens auf dem Gefälle wird durch einen elektrodynamischen Reibungseffekt in elektrische Energie umgewandelt. (Das vom Motor erzeugte Moment ist negativ.) Die Tatsache, daß der Wagen nicht beschleunigt wird, zeigt, daß die gesamte vorhandene Leistung zur Aufladung der Batterie verwendet wird (ausgenommen die JOULEsche Wärme).

4. *Bei veränderlicher Geschwindigkeit* muß zu F ein Zusatzterm $M\,\frac{dv}{dt}$ hinzugefügt werden, den wir in der Form $\frac{\beta}{g}\,\frac{d\omega}{dt}$ schreiben können. Wir bezeichnen nun mit F_1 den bisher betrachteten Teil von F (Reibung und Neigung). Wir erhalten dann

$$1 - 0{,}9\,\frac{\omega}{\omega_0} = 0{,}1\,\frac{i}{i_0},$$

$$\frac{i}{i_0} = \frac{F_1}{F_0} + \frac{\beta}{gF_0}\,\frac{d\omega}{dt}.$$

Eliminieren wir $\frac{i}{i_0}$, dann erhalten wir für ω eine Differentialgleichung:

$$0{,}9\,\frac{\omega}{\omega_0} + 0{,}1\,\frac{\beta\,\omega_0}{g\,F_0}\,\frac{d}{d\,t}\left(\frac{\omega}{\omega_0}\right) = 1 - 0{,}1\,\frac{F_1}{F_0},$$

die für die Berechnung des Übergangsbereiches bei Geschwindigkeitsänderungen dient. Wir finden eine *Analogie zur Gleichung der Ent- und Aufladung eines Kondensators über einen Widerstand.* Der Wagen besitzt also eine *Zeitkonstante*, die, in Sekunden ausgedrückt, den Wert

$$\frac{0{,}1}{0{,}9}\,\frac{\beta\,\omega_0}{g\,F_0}$$

hat.

5. Man kann dieses Problem variieren, indem man *die Geschwindigkeit*, d.h., die Erregung H und dadurch ω *verändert.* Wenn wir die bereits aufgestellte Beziehung

$$E - A\,H\,\omega = R\,i$$

betrachten, so sehen wir, daß bei einer Verkleinerung des Feldes H der Strom i *sehr stark* anwächst (bei kleinem R), so daß sich das Moment $A\,H\,i$ vergrößert. Dann wird der Motor beschleunigt, bis sich ein neuer Gleichgewichtszustand einstellt:

$$E - A\,H'\,\omega' = R\,i'$$

mit

$$i' > i, \quad H' < H \quad \text{und} \quad \omega' > \omega.$$

Um einen Gleichstrommotor zu beschleunigen, muß man also seinen Erregerstrom verringern. Die Geschwindigkeit wird daher durch einen *Widerstand im Erregerkreis* variiert.

6. Tatsächlich verringert man bei guten Antriebsmotoren die JOULEschen Verluste soweit irgend möglich (bis auf 2–3% der Gesamtleistung), damit die Änderungen der Feldbahn, die Veränderungen von i, d.h. Veränderungen des Drehmomentes, keine zu große Abnahme des Wirkungsgrades zur Folge haben. Man verwendet daher für die Ankerwicklung stärkeren Draht.

Anwendung: Gleichstromzähler

Ein Gleichstromzähler besteht aus einem eisenlosen GRAMMEschen Ring, der sich in einem von eisenlosen Spulen erzeugten Feld dreht. Das Drehmoment dieses Motors hat dann die Form $A\,H\,I_0$, wenn I_0 der Strom im GRAMMEschen Ring ist. Der von der Stromquelle zum Verbraucher gelieferte starke Strom I fließt durch einige in Reihe geschaltete Windungen, und das Statorfeld H ist dem Strom I proportional. In dem GRAMMEschen Ring fließt also ein Strom i, der zwischen den Klemmen der Stromquelle über einen großen Widerstand R entnommen wird. Dabei ist $R\,i$ sehr viel größer als die eventuelle Gegen-EMK des Systems. Es gilt also

$$i = \frac{E}{R}.$$

Das zu Hi proportionale Moment des Motors wird also EI sein. Schaffen wir jetzt ein zur Geschwindigkeit proportionales Widerstandsmoment $D' = B\omega$, indem wir eine elektromagnetische Reibung anbringen (z. B. eine sich zwischen zwei Magnetpolen drehende Kupferscheibe), so erhalten wir die Gleichung

$$B\omega \approx EI,$$

wobei sich ω mit EI verändert. Die Anzahl der Umdrehungen des Motors (die aufgezeichnet wird), ist ein Maß für die verbrauchte Energie (in kWh).

Spezielle Anwendungen von Gleichstrommotoren

1. *Fernübertragung mit Gleichstrom*

Die elektrische Fernübertragung hat die Aufgabe, die Verschiebung eines Zeigers auf einer Skala auf größere Entfernungen durch elektrische Methoden zu übertragen. Ein solcher Apparat besteht also aus einem „*Geber*", der aus einem Zeiger auf einer geeichten Scheibe besteht und jede Stellung zwischen 0° und 360° einzustellen gestattet, und einem *Empfänger* mit einem ähnlichen Zeiger, mit dem die erste Stellung reproduziert werden kann.

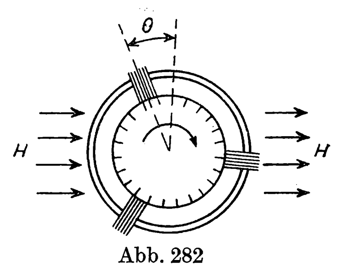


Abb. 282

In einigen Konstruktionen erreicht man die Lösung dieses Problems durch eine zweckmäßige Kombination von Gleichstromgeneratoren und Gleichstrommotoren. In Abb. 282 ist das Schema eines solchen Übertragers angegeben. Dargestellt ist der Kollektor eines Dynamoankers, der mit konstanter Drehzahl rotiert, die Richtung des Erregungsfeldes stimmt mit der Pfeilrichtung überein. Der Kollektor ist mit drei Bürsten ausgerüstet, die um $2/3\,\pi$ gegeneinander auf einem Kreis C versetzt angebracht sind. Der Ring ist um die Ankerachse drehbar.

Nach der Theorie der Dynamos ist es klar, wenn Θ der Winkel ist, der die Lage des Ringes C angibt (Θ sei z. B. der Winkel zwischen der Stellung der Bürste 1 und der Senkrechten zur Feldrichtung), daß sich für die Potentiale in den Punkten 1, 2, 3 (bis auf eine gleiche additive Konstante und einen fast konstanten Faktor) die Werte

$$V_1 = \cos\Theta, \quad V_2 = \cos\left(\Theta + \frac{2\pi}{3}\right), \quad V_3 = \cos\left(\Theta + \frac{4\pi}{3}\right)$$

ergeben.

Legt man den gleichen Widerstand R zuerst zwischen V_1 und V_2, dann zwischen V_2 und V_3 und schließlich zwischen V_3 und V_1, so fließen in diesem Widerstand entsprechend die folgenden drei Ströme:

$$i_{12} \sim V_1 - V_2 = \cos\Theta - \cos\left(\Theta + \frac{2\pi}{3}\right) = \sqrt{3}\,\sin\left(\Theta + \frac{\pi}{3}\right),$$

$$i_{23} \sim V_2 - V_3 = -\sqrt{3}\,\sin\Theta,$$

$$i_{31} \sim V_3 - V_1 = -\sqrt{3}\,\sin\left(\Theta + \frac{2\pi}{3}\right).$$

Die Stromrichtung richtet sich nach der Reihenfolge ihrer Indizes; der Strom ist positiv von 2 nach 3, usw.

Nun wollen wir das Schema eines *Empfängers* betrachten (Abb. 283).

Der Empfänger besteht aus einem *Dynamoanker* (der in der Abbildung durch einen GRAMMEschen Ring dargestellt ist) und einem Stator, der in der Abbildung nicht enthalten ist und der das Feld H_r aufbaut. Der Dynamoanker ist mit drei isolierten leitenden Ringen ausgerüstet.

Die Ankerstellung ist durch den Winkel Θ bestimmt, d.h. den Winkel, den die Senkrechte zum Feld mit der Zuleitung des Lötpunktes bildet, der den Ring 1 mit dem Anker verbindet.

An die drei Ringe 1, 2, 3 werden durch drei Leitungen die vom Sender herrührenden Spannungen V_1, V_2, V_3 gelegt. Die Symmetrie unserer Abbildung veranschaulicht einen gleichen Widerstand R zwischen V_1 und V_2, V_2 und V_3 sowie V_3 und V_1. Die entsprechenden Ströme i_{12}, i_{23} und i_{31} sind also die Ströme, die von V_1 nach V_2, von V_2 nach V_3 und von V_3 nach V_1 abfließen. Das Moment des Feldes H_r auf den Anker ist also (bis auf einen Faktor) leicht zu berechnen.



Aus den elementaren Gesetzen ergibt sich:

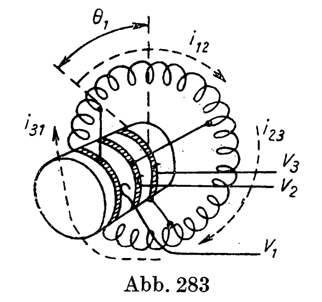


Abb. 283

Der Strom i_{12} ruft ein Moment

$$i_{12} \sin\left(\Theta_1 + \frac{\pi}{3}\right),$$

der Strom i_{23} ruft

$$i_{23} \sin(\Theta_1 + \pi)$$

und der Strom i_{31} ein Moment

$$i_{31} \sin\left(\Theta_1 - \frac{\pi}{3}\right)$$

hervor.

Für das Gesamtmoment ergibt sich mit den vorstehenden Werten für die Ströme

$$\frac{3}{2}(\cos\Theta \cos\Theta_1 + \sin\Theta \sin\Theta_1) = \frac{3}{2}\cos(\Theta - \Theta_1).$$

Bis auf irgendwelche Schwingungen, die durch die proportional zur Geschwindigkeit angenommene Reibung gedämpft werden, wird sich der Anker des Empfängers, wenn kein konstantes Widerstandsmoment vorhanden ist, so lange drehen, bis das Moment des Motors verschwindet, d.h. bis

$$\Theta - \Theta_1 = \pm\frac{\pi}{2}.$$

Für ein gegebenes Θ gibt es natürlich nur eine stabile Lage des Empfängers. Eine kleine willkürliche Abweichung des Winkels um $d\Theta$ führt zu einem *Rückstellmoment.*

In Abb. 284a sieht man, daß das Moment D, das Θ auf Θ_1 zurückführt, abnimmt, wenn die Abweichung größer wird und Θ_1 gegenüber Θ zurückbleibt. Wir

können also sagen, daß die Veränderung des Moments um ΔD zu einer Vergrößerung der Abweichung zwischen Θ_1 und Θ führt. Die Stellung ist also *instabil.*

In der Abb. 284b ist Θ_1 um 90° größer als Θ. Eine nochmalige Vergrößerung um diesen Betrag ergibt einen negativen Wert für $\cos(\Theta - \Theta_1)$. Das auftretende Bewegungsmoment ΔD versucht Θ_1 wieder zurückzuführen. *Die Stellung ist also stabil* und wird tatsächlich vom *Empfänger* eingenommen. Will man den Zeiger in eine zu Θ parallele Stellung bringen, so muß man ihn im Empfänger gegenüber der Zuleitung des Ringes 1 um 90° versetzt befestigen.

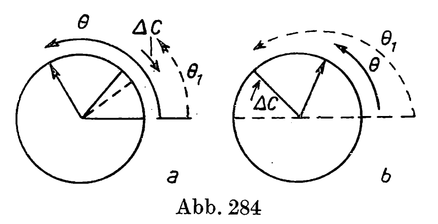


Abb. 284

In einem späteren Kapitel werden wir die mit Wechselstrom betriebenen Fernübertragungen mit *Selbstsynchronisation* betrachten. Die dort angebrachten Verbesserungen zur Steigerung der Genauigkeit sind die gleichen, wie sie hier verwendet werden können. Zwischen diesen beiden, den oben betrachteten und den mit Selbstsynchronisation arbeitenden Anordnungen, besteht eine große Ähnlichkeit. Bei einer dreiphasigen Anordnung mit Selbstsynchronisation sind zur Übertragung bereits drei Drähte notwendig, ohne dabei die beiden Drähte zu berücksichtigen, die zur Stromzuführung mit der gleichen Phase auf beiden beweglichen Spulen erforderlich sind. Bei unserer eben betrachteten Konstruktion sind ebenfalls bereits drei Drähte nötig, ohne die Gleichstromspeisung der beiden Induktoren zu berücksichtigen. Es gibt jedoch in der Arbeitsweise einige beträchtliche Unterschiede zwischen beiden. Einer dieser Unterschiede kennzeichnet einen Vorzug der betrachteten Apparate gegenüber den selbstsynchronisierten. Ein Geber kann ohne weiteres auf mehrere Empfänger wirken. Fällt ein Empfänger durch ein sehr starkes Widerstandsmoment aus, so wirken die gleichen elektromotorischen Kräfte auf die anderen Empfänger, die normal weiterarbeiten.

2. *Motorensteuerung durch Potentiometer*

Wir betrachten einen Motor, der über ein Potentiometer von einer Stromquelle gespeist wird. Der Motor sei derart (z.B. mit einer separaten Erregung) geschaltet, daß er sich in der einen oder der anderen Richtung dreht, je nachdem, ob der bewegliche Steuerungskontakt oberhalb oder unterhalb der Mittelstellung liegt. Für eine ganz bestimmte *Kontaktstellung* besitzt der Motor eine ganz bestimmte, als Funktion seines als konstant angenommenen Widerstandsmomentes gegebene *Geschwindigkeit* (Abb. 285a).

In vielen Fällen kommt es darauf an, einen Motor zu konstruieren, der eine ganz bestimmte Verschiebung (Tourenzahl) für alle Stellungen des Potentiometers ausführt. Da das Moment des Motors eine Funktion der Kontaktstellung ist, gibt es natürlich eine *mechanische* Lösung, die den Motor gegen eine sich mehr oder weniger spannende *Feder* wirken läßt (eine solche Feder ist in Abb. 285a dargestellt). Es gibt jedoch eine bessere elektrische Lösung des Problems, die in Abb. 285b angegeben ist.

Wir bezeichnen mit A den Kontakt des linken Potentiometers, mit B den des rechten Potentiometers (man kann selbstverständlich auch beide Kontakte auf einem Potentiometer wählen). Durch die Rotation des Motors wird über ein Zahnrad eine Zahnstange bewegt, die den Punkt B verschiebt. Der Strom, der das Mo-

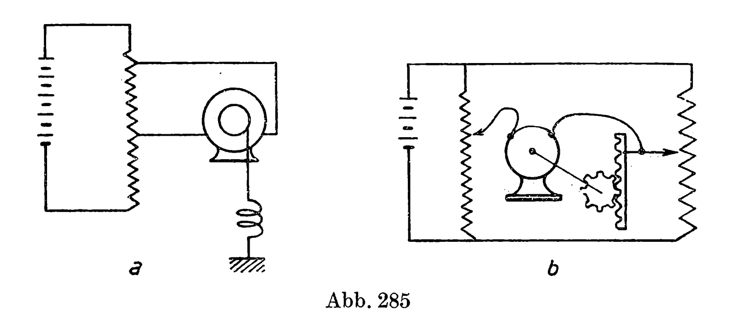


Abb. 285

ment des Motors und damit seine Bewegung bestimmt, fließt zwischen A und B. Es ist leicht zu sehen, daß sich B bei einer Verschiebung von A in gleichem Sinne verschiebt, so daß sich die Potentialdifferenz zwischen A und B auszugleichen sucht. Besitzt der Motor nur ein vernachlässigbar kleines oder kein Widerstandsmoment, so wird er sich so lange drehen, bis diese Potentialdifferenz Null ist. Die verschiedenen Stellungen von B sind also, kurz gesagt, die Abbildungen von A. Man nennt den Motor in diesem Fall „gesteuert". Ein solcher gesteuerter Motor kann zur Signalübertragung verwendet werden, man kann leicht mit ihm die gleiche Genauigkeit wie mit den bereits beschriebenen Apparaten erreichen.

Der Vorteil des Aufbaus in Abb. 285b gegenüber dem in Abb. 285a besteht darin, daß sich der Gleichgewichtszustand in b einstellt, indem sich der Motorenstrom aufhebt. Er ist unabhängig von den Spannungsveränderungen in der Speiseleitung.

Zur Steuerung eines großen Schiffes ist es notwendig, einen Servo-Motor zu verwenden, der das Ruder bewegt. Dabei werden die Steuerradänderungen durch den Rudergast zum Steuern dieses Motors verwendet, so daß die Ruderstellung mit der Steuerradstellung übereinstimmt. Man kann diese Anordnung als starre Direktübertragung ansehen. Dies ist nahezu der Fall, wenn der Motor in der Lage ist, ein Moment zu leisten, das groß gegenüber dem vom Wasser auf das Steuerblatt ausgeübten Widerstandsmoment ist.

3. *Dynamo als Geschwindigkeitsmesser*

Es ist in der Praxis oft erforderlich, mit mehr oder weniger einfachen Mitteln die *Geschwindigkeit* einer mechanischen Bewegung zu messen, zu registrieren oder auszunutzen. Eine sehr gute Methode besteht darin, die Drehzahl eines Dynamos mit konstanter separater Erregung auszunutzen. Die elektromotorische Kraft ist in diesem Fall proportional zur Geschwindigkeit und dient zu ihrer Messung. Diese Anordnung wird *tachometrischer Dynamo* genannt.

So messen wir z. B. die Schlingergeschwindigkeit $\frac{d\Theta}{dt}$ eines Schiffes auf hoher See auf folgende Art: Im Schiff wird ein großes Pendel (Abb. 286) mit sehr großer Trägheit und einer Eigenschwingungsdauer, die groß ist gegenüber der des Schiffes, angebracht. Das Pendel bleibt vertikal (jedenfalls nahezu bei Aufhängung im Schwerpunkt), wenn das Schiff um seine eigne Achse rollt, und treibt über eine Rolle mit geringer Reibung einen Dynamo mit separater Erregung an. Die auftretende elektromotorische Kraft gibt uns die Schlingergeschwindigkeit an und dient zum Antrieb einer dem Schlingern entgegenwirkenden Vorrichtung, die auf das Schiff ein der Schlingergeschwindigkeit proportionales Dämpfungsmoment aufbringen muß.

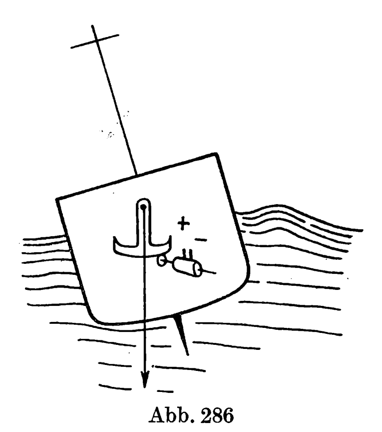


Abb. 286

Genauso kann die Geschwindigkeitsanzeige in einem Auto vorteilhaft durch einen von den Rädern angetriebenen tachometrischen Dynamo erfolgen. In diesem Fall genügt als Meßapparat ein Voltmeter.

In einigen Anordnungen wird der *tachometrische Dynamo als Dämpfungsglied* zur Verhinderung von Eigenschwingungen verwendet.

Nehmen wir an, daß der Aufbau in Abb. 285b zur Steuerung eines Flugzeuges verwendet wird. Wenn wir mit x die Verschiebung von A und mit y die Verschiebung von B bezeichnen, ist y nach den folgenden Gesetzen eine Funktion von x:

Der Strom i, der das Moment des Motors hervorruft, ist proportional einer elektromotorischen Kraft $\alpha(x - y)$ abzüglich der Gegen-EMK des Motors, die seiner Geschwindigkeit proportional ist, also die Form $\beta \frac{dy}{dt}$ hat:

$$i = \alpha(x - y) - \beta \frac{dy}{dt}.$$

Das Moment des Motors, das proportional zum Strom i ist, sei γi und diene zur Erzeugung eines aerodynamischen Momentes M und zur Beschleunigung des Motors trotz des vorhandenen Trägheitsmomentes $I \frac{d^2y}{dt^2}$. Es gilt also

$$\gamma i = M + I \frac{d^2y}{dt^2}.$$

Eliminieren wir jetzt i, so erhalten wir für y als Funktion von x eine Differentialgleichung der Form

$$\frac{I}{\gamma} \frac{d^2y}{dt^2} + \beta \frac{dy}{dt} + \alpha y + \frac{M}{\gamma} = \alpha x.$$

Für $x = 0$ muß die Bewegung stabil sein. Man sieht, daß die Gegen-EMK des Motors den Faktor β liefert, der eine zu der Geschwindigkeit $\frac{dy}{dt}$ proportionale Dämpfung verursacht. Sehr oft bewirkt jedoch das Moment M, das durch die Rückwirkung der Luft hervorgerufen wird, negative Dämpfungsterme (dies hängt von der Stellung des Ruders ab).

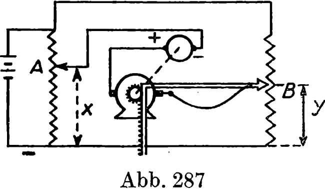


Abb. 287

In diesem Fall wird man zusätzliche Dämpfungsterme auf folgende Art (Abb. 287) realisieren: Der Motor treibt einen tachometrischen Dynamo D an. Die von diesem Dynamo aufgebrachte elektromotorische Kraft wird in den Steuerkreis des Motors geführt und wirkt als Dämpfung.

Diese elektromotorische Kraft ist durch $\varepsilon \frac{dy}{dt}$ bestimmt. Die Gleichung erhält also die Form

$$i = \alpha(x - y) - \varepsilon \frac{dy}{dt} - \beta \frac{dy}{dt}.$$

Wir sehen, daß uns dieser Vorgang eine Vergrößerung der positiven Dämpfung im Verhältnis von $\beta + \varepsilon$ zu β gestattet.

4. *Ward-Leonard*scher *Steuermotor*

Wir haben bereits gesehen, daß die Leistung der Erregung bei Gleichstrommaschinen nur 2–3% der Maschinenleistung beträgt. Dies gibt uns die Möglichkeit, den Erregerstrom eines großen Motors durch einen kleinen belasteten Dynamo zu steuern. Dabei treibt ein Motor M_1 mit einer *konstanten Geschwindigkeit* den Erregerdynamo D an (Abb. 288). Die Erregung wird durch einen Widerstand reguliert. Eine 50mal größere Leistung geht von diesem Dynamo aus und regelt die Erregung E eines großen Motors M, dessen Anker unabhängig davon gespeist wird. An die Stelle des Motors M kann man auch einen Dynamo setzen, der mit einer mehr oder weniger konstanten Geschwindigkeit angetrieben wird und dessen elektromotorische Kraft reguliert werden kann.

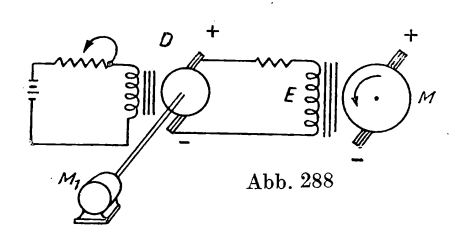


Abb. 288

Ist das Motorenmoment häufig nur gering, so kann ein starker Strom im Anker große Schäden hervorrufen. Es ist also zweckmäßiger, anstelle einer Erregung den Ankerstrom selbst durch den Dynamo eines Ward-Leonard-Motors zu regulieren.

5. *Fernsteuerung durch Gleichstrommotore*

Wenn der Motor M zur Drehung eines Objektes verwendet werden soll, das man jeweils nach neuen Kommandos bewegen will, z. B. einen Geschützturm nach den Angaben des Beobachters, so genügt es, die Veränderung des Widerstandes in

der Erregung des Dynamos D über ein von dem Motor M gesteuertes Potentiometer durchzuführen. Das Schema einer solchen Anordnung ist in Abb. 289 dargestellt.

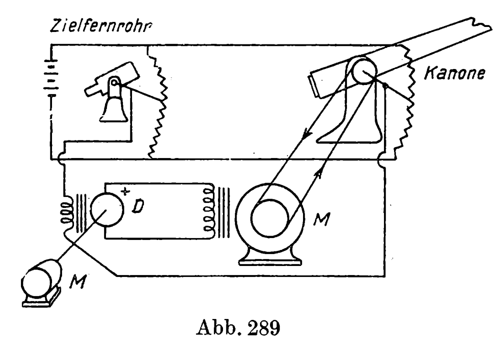


Abb. 289

Der linke Kontakt wird durch den Beobachter selbst verschoben. Die Verschiebung des rechten Kontaktes erfolgt durch die Drehung des Motors M. Der Motor bewegt gleichzeitig den Geschützturm. Mit dieser Anordnung wird erreicht, daß die Kanonen sofort entsprechend den durch ein Fernrohr erhaltenen Beobachtungsergebnissen gerichtet werden können.

Die Stabilitätserhaltung solcher Systeme stellt bisweilen ein beträchtliches Problem dar, dessen Lösung jedoch Spezialwerken überlassen werden muß.

WECHSELSTROM

I. KAPITEL

Wechselstrom: Allgemeines. Resonanz

Theorie der Stromkreise

Wir stellen einige allgemeine Betrachtungen an den Anfang dieses Kapitels:

1. Eine mit der Zeit *periodische Funktion* ist eine Funktion, die zur Zeit t den Wert $f(t)$ besitzt und diesen wieder annimmt, wenn man zu t die Zeitintervalle T, $2T$, $3T$, ... hinzufügt. T nennt man *Periode* der Funktion. Die *Frequenz* ν ist die Anzahl der Perioden in der Zeiteinheit:

$$\nu = \frac{1}{T}\,\mathrm{Hz}.$$

Ist die zeitlich periodische Funktion *sinusförmig*, so hat sie die Form

$$f(t) = A\sin(\omega t + \varphi).$$

Dabei ist A die *Amplitude*, die wir immer als positiv annehmen wollen. Wir können daher die Funktion in der Form

$$-|A|\sin(\omega t + \varphi) = +|A|\sin(\omega t + \varphi + \pi)$$

darstellen. Das Argument $\omega t + \varphi$ der Sinusfunktion wächst um 2π an, wenn t um T anwächst (da $\sin x$ die Periode 2π besitzt). Man erhält also

$$\omega T = 2\pi$$

und

$$\omega = \frac{2\pi}{T} = 2\pi\nu;$$

ω wird *Kreisfrequenz* genannt.

Bei einer sinusförmigen Funktion kann man die Veränderung in $\sin(\omega t + \varphi)$ oder $\cos(\omega t + \varphi)$ graphisch durch die Projektion der Bewegung eines Punktes auf einem Kreis auf eine der Achsen des Koordinatensystems darstellen. Der durchlaufene Winkel hat dabei den Wert $\omega t + \varphi$ und wird *Phasenwinkel* genannt. Meist werden wir es jedoch mit verschiedenen Variablen der gleichen Periode T zu tun haben, die also auch die gleiche Kreisfrequenz besitzen. Ihre Bewegung entspricht der Bewegung verschiedener Punkte auf unserem Kreis. Die Unterschiede der Phasenwinkel dieser verschiedenen Bewegungen sind konstant

$$(\text{z.B. } \omega t + \varphi - \omega t = \varphi).$$

Richten wir nun unsere Aufmerksamkeit auf diese Konstanten. Die Größe φ bezeichnet man als *Phasenverschiebung* oder *Phase*. Man muß dabei beachten, daß es sich immer um die Phase einer Funktion in bezug auf eine andere Funktion handelt, die beide sinusförmig und von gleicher Periode sind, z.B. die Phase eines Wechselstroms in bezug auf die ihn erzeugende Spannung.

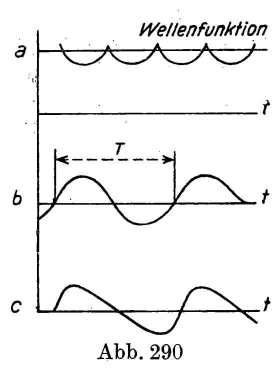


Abb. 290

Eine periodische Funktion heißt *alternierend*, wenn ihr Mittelwert über eine ganze Anzahl von Perioden Null ist. Im anderen Fall wird sie *wellig* genannt. Man kann diese als Überlagerung einer Konstanten (die ihren Mittelwert darstellt) und der restlichen verbleibenden alternierenden Funktion oder Komponente darstellen. Damit ist jedoch nicht gesagt, daß die Effekte bei einer Wellenfunktion eine Überlagerung der Effekte des Mittelwertes plus der periodischen Komponente sind.

Die periodischen Funktionen, besonders die alternierenden, besitzen oft charakteristische Symmetrien, bei denen die Halbperiode $\frac{T}{2}$ eine Rolle spielen kann. In den Abb. 290b und 290c sind Beispiele dafür angegeben.

2. Die Summe zweier periodischer Funktionen mit der gleichen Periode ist natürlich wieder eine periodische Funktion mit der gleichen Periode. Die Summe zweier sinusförmiger Funktionen ist weiterhin sinusförmig, und man erhält

$$a \sin \omega t + b \sin(\omega t + \varphi) = (a + b \cos\varphi) \sin \omega t + b \sin\varphi \cos \omega t$$
$$= c \sin(\omega t + \psi).$$

Setzt man für

$$a + b \cos\varphi = c \cdot \cos \psi$$

und

$$b \sin\varphi = c \sin \psi,$$

so erhält man

$$\operatorname{tg} \psi = \frac{b \sin\varphi}{a + b \cos\varphi}$$

und

$$c = \sqrt{a^2 + 2ab \cos\varphi + b^2}\,.$$

Mit diesem *algebraischen* Resultat ist eine *geometrische* Interpretation (FRESNELsche Regel) möglich.

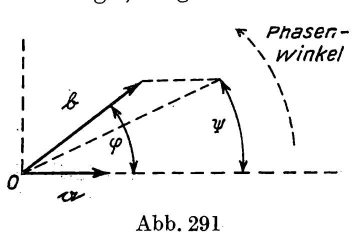


Abb. 291

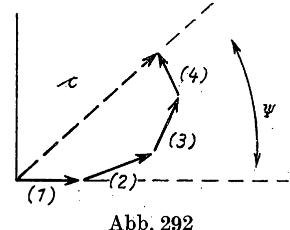


Abb. 292

Betrachten wir in Abb. 291 die beiden Vektoren $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{b}$, deren Beträge a bzw. b sind und die so verlaufen, daß sie einen Phasenwinkel φ einschließen. Man kann durch elementare Rechnungen zeigen, daß die Resultante dieser Vektoren die Länge c besitzt und daß diese einen anderen Winkel ψ mit dem Vektor $\mathfrak{a}$ bildet.

Diese Regel kann auf eine beliebige Anzahl von Vektoren ausgedehnt werden. Also kann man die Summe sinusförmiger Funktionen, die in Größe und Richtung durch die Vektoren (1), (2), (3) und (4) (Abb. 292) gebildet werden mögen, durch die geometrische Summe $\mathfrak{c}$ mit dem Phasenwinkel ψ darstellen.

3. *Fourier-Reihe.* Jede periodische Funktion der Periode T kann durch eine Reihe von reinen Sinusfunktionen mit den Frequenzen

$$\nu = \frac{1}{T}, \frac{2}{T}, \frac{3}{T}, \ldots$$

dargestellt werden.

Man erhält damit

$$f(t) = B_0 + \sum_{k=1}^{\infty} \left(A_k \sin \frac{2\pi k t}{T} + B_k \cos \frac{2\pi k t}{T}\right). \tag{1}$$

Diese Funktion bestimmen wir durch die A_k und B_k in folgendem Verfahren:

1. Wir betrachten den Mittelwert von $f(t)$ über eine Periode und ersetzen $f(t)$ durch

$$\overline{f(t)} = \frac{1}{T}\int_0^T f(t)\,dt = B_0.$$

Daraus ergibt sich der Wert für B_0, da $f(t)$ gegeben ist.

2. Wir multiplizieren $f(t)$ mit

$$\sin \frac{2\pi k t}{T} \quad \left(\text{oder} \quad \cos \frac{2\pi k t}{T}\right)$$

und integrieren von $t = 0$ bis $t = T$:

$$\int_0^T f(t) \sin \frac{2\pi k t}{T}\,dt = A_k \int_0^T \sin^2\left(\frac{2\pi k t}{T}\right) dt = A_k \frac{T}{2},$$

$$\int_0^T f(t) \cos \frac{2\pi k t}{T}\,dt = B_k \int_0^T \cos^2\left(\frac{2\pi k t}{T}\right) dt = B_k \frac{T}{2}.$$

Alle anderen Terme der Reihe verschwinden. Daraus ergeben sich die A_k und B_k.

Die Fourier-Reihe spielt eine bedeutende Rolle für die sinusförmigen Funktionen in Theorie und Praxis der Wechselstromtechnik.

Eine periodische Funktion kann man also in eine *Grundfunktion* und „Harmonische" dazu zerlegen. Die Bedeutung dieser mathematischen Zerlegung wird durch die Konstruktion zahlreicher physikalischer Apparate bestätigt, die die Aufgabe haben, eine periodische Funktion oder Welle (Stromwelle, Spannung usw.) in ihre *sinusförmigen Komponenten* zu zerlegen und sie zu analysieren (analysieren bedeutet in diesem Fall separieren oder die Anwesenheit nachweisen).

Ist zum Beispiel ein Ton periodisch, so kann man seine Amplitude in der Form

$$\sum_k A_k \sin\left(\frac{2\pi k t}{T} + \varphi_k\right)$$

schreiben, die äquivalent der Gleichung (1) ist.

Das *Ohr eines ausübenden Musikers* erkennt den Ton oder die Frequenz $\frac{1}{T}$ der Grundfunktion und die Amplitude der wichtigen Harmonischen. Er ist jedoch nicht in der Lage, die Phase zu bestimmen. Eine gänzlich andere Schwingung, z. B.

$$\sum_k A_k \sin\left(\frac{2\pi k t}{T} + \varphi'_k\right),$$

Abb. 293

bei der alle Phasen (aber nur diese) verändert sind, ruft genau den gleichen Eindruck in seinem Ohr hervor.

Beispiel einer F*ourier-Zerlegung.* Wir betrachten die in Abb. 293 dargestellte Funktion $f(t)$ mit der Periode T. Die Amplitude dieser Funktion ist für jede Halbperiode abwechselnd $+1$ und -1. Wir berechnen die Koeffizienten A_k und finden, daß aus Symmetriegründen $B_k = 0$ wird. Dann ergibt sich für $f(t)$

$$f(t) = \frac{4}{\pi}\left[\sin\left(2\pi\frac{t}{T}\right) + \frac{1}{3}\sin\left(3\,\frac{2\pi t}{T}\right) + \cdots + \frac{1}{2n+1}\sin(2n+1)\,\frac{2\pi t}{T} + \cdots\right].$$

Durch Berücksichtigung weiterer Glieder kann man eine sukzessive Approximation an $f(t)$ erreichen.

Die Abb. 293 zeigt in (a) die Funktion selbst, in (b) ihre Grundfunktion und in (c) ihre dritte Harmonische. In (d) ist bereits eine gute Annäherung an die ursprüngliche Form erreicht, indem man das 1. und 3. Glied der Reihe berücksichtigt hat. In (e) ist auch noch das 5. Glied berücksichtigt worden. Dadurch ist die Steigung steiler und die Amplitude der Oszillation geringer geworden, und man sieht deutlich, daß die Abweichung von (a) um so geringer wird, je höher die Frequenz der in die Annäherung einbezogenen Glieder ist.

Die Sägezahnkurve in Abb. 294 läßt sich ebenfalls durch eine Reihenentwicklung darstellen:

$$f(t) = \frac{1}{2} + \Sigma \frac{1}{k\pi} \sin\left(k\,\frac{2\pi t}{T}\right),$$

$$k = 1, 2, \ldots.$$

Man sieht aus diesen Beispielen, daß auch diskontinuierliche Funktionen durch FOURIER-Reihen darstellbar sind. Die einzige Bedingung dabei ist, einen Sinn der Integrale für die A_k und B_k zu bestimmen. Dies ist von großer praktischer Bedeutung bei der Konstruktion von Ventil- oder Gleichrichteranordnungen, die oft Spannung oder Ströme diskontinuierlicher Art liefern, von denen wir nur die FOURIER-Komponenten zu kennen brauchen.

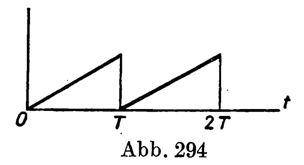


Abb. 294

JOULEsches Gesetz beim Wechselstrom. Effektivwert einer periodischen Funktion

Das JOULEsche Gesetz, das aussagt, daß die Energie

$$R i^2 dt$$

in der Zeit dt im vom Strom i durchflossenen Widerstand R in Wärme umgewandelt wird, gilt, wie das Experiment zeigt, auch für veränderliche Ströme und speziell für periodische Ströme und Wechselströme.

Diese Tatsache führt uns auf die Betrachtung der effektiven Stromstärke i_{eff}. Sie entspricht der Gleichstromstärke, die während einer Periode die gleiche Energie in Wärme umwandelt. Wir erhalten also

$$\int_0^T R i^2\, dt = R\, i_{\text{eff}}^2\, T,$$

$$i_{\text{eff}}^2 = \frac{1}{T}\int_0^T i^2 dt.$$

Die effektive Stromstärke ist also gleich der Wurzel aus dem Quadrat der mittleren Stromstärke. Entsprechend definiert man die effektive Spannung.

Für den speziellen Fall einer *sinusförmigen Stromänderung:*

$$i = i_0 \sin\omega t,$$

$$\frac{1}{T}\int_0^T i^2\, dt = \frac{i_0^2}{2}, \quad i_{\text{eff}} = \frac{i_0}{\sqrt{2}},$$

ergibt sich für die effektive Stromstärke der Wert

$$\frac{i_0}{\sqrt{2}} = 0{,}707\, i_0.$$

Dieses Gesetz gilt jedoch nur für sinusförmige Ströme.

Für einen modulierten Strom der Form

$$i = i_1 + i_0 \sin \omega t,$$

wobei

$$i_m = i_1 + i_0$$

ist, gilt

$$\frac{1}{T}\int_0^T i\,dt = i_1^2 + \frac{i_0^2}{2},$$

und i_{eff} hat den Wert

$$i_{\text{eff}} = \sqrt{i_1^2 + \frac{i_0^2}{2}} \approx \frac{1}{\sqrt{2}}(i_1 + i_0).$$

Bei einem Strom, der *Harmonische* enthält, ist

$$i = i_1 \sin \omega t + i_3 \sin 3\,\omega t$$

und

$$i_{\text{eff}}^2 = \frac{1}{T}\int_0^T i^2\,dt = \frac{i_1^2}{2} + \frac{i_3^2}{2}.$$

Dieser letzte Ausdruck entspricht nicht der maximalen Stromstärke. Das Quadrat der effektiven Gesamtstromstärke ist also die halbe Summe der Quadrate der Effektivstromstärken der verschiedenen harmonischen Glieder.

Betrachten wir jetzt einen Strom, der aus Komponenten mit verschiedenen Frequenzen besteht:

$$i = i_1 \sin \omega_1 t + i_2 \sin \omega_2 t.$$

Wenn ω_1 und ω_2 in keinem Verhältnis zueinander stehen, ist der Strom *nicht mehr periodisch.* Es treten jedoch Schwankungen auf, die man durch die Schwingung $\omega_1 - \omega_2$ darstellen kann. In grober Annäherung erhält man für die Mittelwerte über die entsprechende Periode

$$T = \frac{2\pi}{\omega_1 - \omega_2}$$

in diesem Zeitintervall für die effektive Stromstärke den Wert

$$i_{\text{eff}}^2 = \frac{i_1^2}{2} + \frac{i_2^2}{2} + \text{verschwindende Terme.}$$

Wir sehen also, daß auch in diesem Fall die Zusammensetzung des Effektivstroms in der angegebenen Weise erfolgt.

Bereits bei der Berechnung der JOULEschen Wärme in einem Leiter ist die FOURIER-Reihe, die uns die Amplituden $i_1, i_2, \ldots$ ergibt, sehr nützlich. Drücken wir die erhaltenen Ergebnisse in physikalischer Form aus, so können wir sagen:

Fließt in einem Widerstand R ein aus verschiedenen sinusförmigen Komponenten bestehender Strom, so addieren sich die JOULEschen Wärmen der einzelnen Komponenten im Mittel. Jede sinusförmige Komponente eines Stromes hat einen reellen physikalischen Sinn, da sie einer definierten Energie entspricht und von den anderen sinusförmigen Komponenten unabhängig ist.

Leistungstransport durch Wechselstrom

Wenn U die Potentialdifferenz zwischen zwei Punkten A und B eines Stromkreises bedeutet, dann ist die durch den Ladungstransport in der Zeit dt verbrauchte Energie gegeben zu $U i dt$. Dies entspricht einer Leistung von $U i$. Befinden sich zwischen A und B nur Elemente wie Selbstinduktionen, Kapazitäten, Widerstände oder aus solchen Elementen bestehende Systeme, dann muß U, wenn i ein Wechselstrom ist, notgedrungen eine Wechselspannung sein. Tatsächlich ist der Wert für U an den Klemmen einer Selbstinduktion

$$U = L \frac{di}{dt};$$

an den Klemmen eines Kondensators

$$U = \frac{Q}{C} = \frac{1}{C} \int i dt$$

und an den Enden eines Widerstandes

$$U = R i$$

(da das JOULEsche Gesetz gilt, gilt auch das OHMsche Gesetz). Hat i die Form

$$i = i_0 \sin \omega t,$$

so finden wir für die Spannung an den Klemmen jedes dieser Elemente

$$U = U_0 \sin(\omega t + \varphi),$$

wobei $\varphi = \frac{\pi}{2}$ für eine Selbstinduktion, $\varphi = -\frac{\pi}{2}$ für einen Kondensator und $\varphi = 0$ für einen Widerstand gilt. Schalten wir diese Elemente in Reihe, so gilt das eben Gesagte. Legen wir zwischen A und B ein System aus solchen Elementen, so bleibt es ebenfalls gültig usw.

Unter diesen Bedingungen ist die Leistung in jedem Augenblick durch

$$U i = U_0 i_0 \sin \omega t \sin(\omega t + \varphi)$$

gegeben.

Natürlich verändert sich diese Leistung mit der Zeit. Sie hat jedoch während einer Periode den Mittelwert

$$\begin{aligned} W &= U_0 i_0 \overline{\sin \omega t \sin(\omega t + \varphi)} \\ &= U_0 i_0 \overline{(\sin^2 \omega t \cos \varphi + \sin \omega t \cos \omega t \sin \varphi)}. \end{aligned}$$

Der Mittelwert von $\sin \omega t \cos \omega t$ ist Null, der von $\sin^2 \omega t$ dagegen 1/2. Für W ergibt sich also

$$W = \frac{U_0 i_0}{2} \cos\varphi = U_{\text{eff}} i_{\text{eff}} \cos\varphi .$$

Die Leistung erhält man also, wenn man das Produkt von effektiver Stromstärke und effektiver Spannung mit dem Kosinus des Winkels der zwischen U und i bestehenden Phasendifferenz multipliziert. Diesen Kosinus nennt man *Leistungsfaktor.*

Besteht ein Strom aus mehreren sinusförmigen Anteilen:

$$i = i_1 \sin \omega_1 t + i_2 \sin(\omega_2 t + \varepsilon) + \cdots,$$

so erhält man für die Spannung ebenfalls

$$U = U_1 (\sin \omega_1 t + \varphi_1) + U_2 (\sin \omega_2 t + \varepsilon + \varphi_2) + \cdots.$$

Bildet man nun einen Mittelwert über eine Zeit, die in der Größenordnung der größten Schwebungsperiode

$$T = \frac{2\pi}{\omega_1 - \omega_2}$$

liegt, dann erhält man

$$W = (U_1)_{\text{eff}} (i_1)_{\text{eff}} \cos\varphi_1 + (U_2)_{\text{eff}} (i_2)_{\text{eff}} \cos\varphi_2 .$$

Die mittleren Leistungen der sinusförmigen Anteile addieren sich also. Außerdem bemerken wir, daß die verschiedenen Leistungsterme nicht mehr die Frequenz der entsprechenden Ströme, sondern deren doppelte Frequenz besitzen.

Auf den Leistungsfaktor $\cos\varphi$ werden wir noch in späterem Zusammenhang eingehen.

Wattlose Ströme

Betrachten wir jetzt den in der Praxis sehr häufigen Fall, daß zwischen den beiden Klemmen eines Stromkreises eine sinusförmige Spannung $U = U_0 \sin \omega t$ liegt. Dabei fließt in dem Stromkreis ein Strom

$$i = i_0 \sin(\omega t + \varphi) = i_0 \sin \omega t \cos\varphi + i_0 \cos \omega t \sin\varphi .$$

Wir sehen, daß man diesen Strom als Summe zweier Ströme darstellen kann, von denen der eine in Phase mit der Spannung liegt und die Amplitude $i_0 \cos\varphi$ besitzt, während der andere die Amplitude $i_0 \sin\varphi$ besitzt und um $\frac{\pi}{2}$ phasenverschoben ist. Berechnen wir jetzt die Leistung, so stellen wir fest, daß nur der erste dieser Ströme den Beitrag

$$W = \frac{U_0 i_0 \cos\varphi}{2}$$

liefert. Man nennt ihn *Wattschen Strom.* Der zweite Strom $i_0 \cos \omega t \sin\varphi$ trägt nicht zur Leistung bei und wird *wattloser Strom* genannt.

Frequenzskala

Die üblicherweise benutzten Beleuchtungs- und Kraftströme sind auf 50 Perioden pro Sekunde (50 Zyklen/Sekunde oder 50 Hertz) in Europa und 60 Perioden pro

Sekunde in Amerika standardisiert. Im Verkehrswesen dagegen werden Ströme von 15–25 Hertz verwendet.

Das menschliche Ohr ist in der Lage, Frequenzen zwischen 16 und 16000 Hertz wahrzunehmen. Die Frequenzen der Telefonströme müssen also in diesem Bereich liegen. In der Praxis ist jedoch für eine gute Verständigung und Wiedergabe der Frequenzen der menschlichen Stimme der Bereich zwischen 250–2700 Hz ausreichend. Um aber die Zischlaute wie „*s*“ gut zu übertragen, muß ein Frequenzbereich bis mindestens 5000 Hz, besser jedoch 7000–8000 Hz verwendet werden.

Die jenseits des Hörbereiches liegenden Frequenzen werden z. B. zur Messung von Meerestiefen benutzt (25 kHz bis 40 kHz). In der Hochfrequenztechnik verwendet man zur Telegraphie bis zu 30 kHz, in der Rundfunktechnik auf dem Langwellenbereich bis zu 150 kHz, im Mittelwellenbereich von 500 kHz bis 1500 kHz (200 m bis 600 m Wellenlänge), im Kurzwellenbereich (bis zu 10 m) 30 MHz.

Daran schließen sich die Wellen des Ultrakurzwellenbereichs, die Dezimeter- und Zentimeterwellen, die in Wellenlängen angegeben werden.

In der Hochfrequenztechnik verwendet man zur Frequenzmessung Spezialinstrumente, die wir später betrachten werden.

Zur Frequenzmessung bei einem *niederfrequenten* Wechselstrom kann man die folgende Methode benutzen. Man elektrolysiert eine Lösung von Kalium-Ferrocyanid und Ammonium-Nitrat, die man über ein Löschblatt gegossen hat, zwischen einer *Kupfer*scheibe und einer *Eisen*spitze, welche den beiden Polen eines Stromkreises entsprechen. Bildet die Eisenspitze die Anode, so löst sie sich auf und eine preußischblaue Färbung ist zu erkennen. Mit einem Zylinder, dessen Rotationsgeschwindigkeit bekannt ist, mißt man die Frequenz durch die Anzahl der die Blaufärbung hervorrufenden Halbwellen.

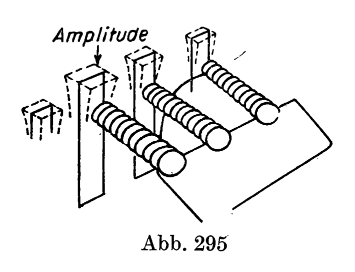


Abb. 295

Außerdem verwendet man die Phänomene der mechanischen Resonanz. Eine bestimmte Anzahl von Stahlzungen, deren Längen gesetzmäßig zunehmen, werden (siehe Abb. 295) vor Elektromagneten angeordnet, die mit dem Strom, dessen Frequenz man messen will, gespeist werden. Unter dem Einfluß der wechselnden Anziehung (mit doppelter Frequenz) zeigt die Stahlzunge, deren Frequenz der doppelten Stromfrequenz entspricht, einen maximalen Amplitudenausschlag. Durch die Feststellung dieses Maximalausschlages kann man bei einem geeichten Instrument auf die Frequenz des Stromes rückschließen. Die erreichbare Genauigkeit ist eine Funktion der Stahlzungenanzahl.

Messung der Größen i_{eff}, U_{eff}, W

Wir benutzen ein Quadrantenelektrometer mit idiostatischer Schaltung. Legen wir jetzt eine Wechselspannung U an, so ist das Drehmoment und damit der Ausschlag proportional zu U^2. Man kann dieses Elektrometer in U_{eff} eichen und erhält so ein Voltmeter für Wechselstrom. Ein Nachteil dieses Elektrometers ist jedoch

seine geringe Empfindlichkeit für kleine Amplituden. Diese Eigenschaft teilt es mit nahezu allen zu Wechselstrommessungen verwendeten Geräten.

Auch ein thermisches Amperemeter zeigt einen nahezu dem Quadrat des Stromes proportionalen Ausschlag. In i_{eff} geeicht, bildet es ein Wechselstromamperemeter. Weiterhin ist es notwendig, daß der hier fließende Wechselstrom dem gleichen Gesetz wie der Gleichstrom entspricht. Das erfordert die Vermeidung von Selbstinduktionen in den Zuleitungen und in einem eventuell vorhandenen Shunt. Die Eichung für i_{eff} bei Wechselstrom ist im Prinzip die gleiche wie bei Gleichstrom.

Die elektromagnetischen Weicheiseninstrumente können sowohl für Gleich- als auch für Wechselstrommessungen verwendet werden, da das auf den Weicheisenkern ausgeübte Moment unabhängig von der Stromrichtung ist.

Die Instrumente mit Gleichrichter sind dagegen erheblich empfindlicher, da in ihnen der gleichgerichtete Strom mit Gleichstromgalvanometern gemessen wird. Wir werden diese Instrumente in einem späteren Kapitel betrachten.

Einfach ist es, ein *Wattmeter* für Wechselstrom herzustellen. Wenn wir ein Elektrodynamometer mit beweglicher Spule betrachten, so ist sein Drehmoment sowohl dem in der festen als auch dem in der beweglichen Spule fließenden Strom proportional. Legen wir die bewegliche Spule mit dem Verbraucherkreis in Reihe, so fließt in ihr der gesamte Strom i, dessen Leistung wir messen wollen. Schalten wir jetzt die feste Spule mit einem sehr großen Widerstand in Reihe und legen an seine Klemmen die Speisespannung U, so fließt in diesem Kreis ein Strom $\frac{U}{R}$. (Wir haben dabei vorausgesetzt, daß die Selbstinduktion der festen Spule eine gegenüber $R \cdot i$ vernachlässigbar kleine Spannung erzeugt). Das auftretende Drehmoment und damit der Zeigerausschlag sind also proportional zu $U \cdot i$ oder aus Gründen der *mechanischen Trägheit des Instrumentes* besser dem zeitlichen Mittelwert:

$$\overline{Ui} = W = \frac{U_0 i_0}{2} \cos\varphi = U_{\text{eff}}\, i_{\text{eff}} \cos\varphi .$$

Auf diese Art erreichen wir eine genaue Leistungsmessung.

Ein Quadrantenelektrometer in heterostatischer Schaltung ist im Prinzip auch ein elektrostatisches Wattmeter. Dazu genügt es, eine der Spannungen proportional zu i (indem man den Verbrauchsstrom i durch einen bestimmten Widerstand R fließen läßt) und die andere proportional zu U zu wählen.

Verallgemeinerung des Ohmschen Gesetzes. Scheinwiderstand. Imaginäre Schreibweise

An den Klemmen einer Selbstinduktion, eines Widerstandes und einer Kapazität hat man entsprechend

$$U = L\frac{di}{dt}, \quad U = Ri, \quad U = \frac{1}{C}\int i\,dt .$$

Ist

$$i = i_0 \sin\omega t ,$$

dann erhalten wir

$$U = L\omega i_0 \cos \omega t \quad \text{oder} \quad U = L\omega i_0 \sin\left(\omega t + \frac{\pi}{2}\right),$$

$$U = Ri \quad \text{oder} \quad U = R i_0 \sin \omega t;$$

$$U = -\frac{1}{C\omega} i_0 \cos \omega t \quad \text{oder} \quad U = \frac{1}{C\omega} i_0 \sin\left(\omega t - \frac{\pi}{2}\right).$$

$L\omega$ und $\frac{1}{C\omega}$ sind dabei Größen, die die Dimensionen eines Widerstandes haben; man nennt sie *Scheinwiderstände*. Die effektive Spannung an den Klemmen eines Elementes, das einer Selbstinduktion, einem Kondensator oder einem Widerstand entspricht, erhält man also, indem man seinen Scheinwiderstand mit der im Kreis fließenden Stromstärke multipliziert. Diese Scheinwiderstände $L\omega$ und $\frac{1}{C\omega}$ sind jedoch von normalen Widerständen sehr verschieden, da sie eine *Phasenverschiebung* zwischen Strom und Spannung hervorrufen. Beträgt diese Phasenverschiebung gerade $\pm \frac{\pi}{2}$, so nennt man den Scheinwiderstand *Blindwiderstand*.

Schaltet man solche Elemente wie Selbstinduktion, Kapazität und Widerstand in Reihe oder parallel, so setzen sich die Scheinwiderstände nicht nach den einfachen Gesetzen zusammen. Betrachten wir z. B. eine Selbstinduktion, eine Kapazität und einen Widerstand in Reihe geschaltet, so addieren sich die Spannungen an den Klemmen dieser Elemente und ergeben so die Gesamtspannung U. Daraus folgt

$$U = L\frac{di}{dt} + Ri + \frac{1}{C}\int i\,dt$$

(dies ist die Verallgemeinerung des OHMschen Gesetzes),

$$U = \left\{L\omega \cos \omega t + R \sin \omega t - \frac{1}{C\omega} \cos \omega t\right\} i_0.$$

Wir müssen also *nach der FRESNELschen Regel* die beiden folgenden Funktionen miteinander zusammensetzen:

$$i_0\left(L\omega - \frac{1}{C\omega}\right) \cos \omega t$$

(wattlose Spannung) und

$$R i_0 \sin \omega t$$

(Wirkspannung). Daraus ergibt sich in diesem einfachen Fall

$$U = \left(\sqrt{\left(L\omega - \frac{1}{C\omega}\right)^2 + R^2}\right) i_0 \sin(\omega t + \varphi)$$

mit

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{L\omega - \frac{1}{C\omega}}{R}.$$

Man kann diese Formel darstellen, indem man den Widerstand R, auf der Abszissenachse (Abb. 296) und die Blindwiderstände $\left(L\omega \text{ oder } \frac{1}{C\omega}\right)$ auf der Ordinatenachse aufträgt, und zwar positiv, wenn es sich um eine Selbstinduktion ($L\omega$), negativ, wenn es sich um eine Kapazität $\left(-\frac{1}{C\omega}\right)$ handelt. Der Scheinwiderstand Z ist die geometrische Resultante der beiden Vektoren $\left(L\omega - \frac{1}{C\omega}\right)$ und R, und φ der Winkel, um den man das Koordinatensystem drehen muß, wenn man von R nach Z gelangen will.

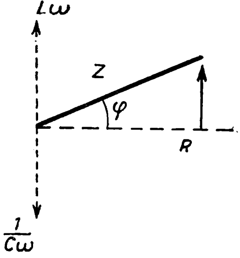


Abb. 296

Diese Resultate kann man jedoch viel besser in imaginärer Schreibweise darstellen:

Mit j bezeichnen wir die Größe $\sqrt{-1}$. Wir wollen eine Selbstinduktion und einen Widerstand in Reihe betrachten:

$$U = L\frac{di}{dt} + Ri.$$

Dies ist eine Differentialgleichung, die uns U als Funktion von i liefert. Die Gleichung ist *linear* wie alle Gleichungen, die wir für ein nach den verallgemeinerten OHMschen und KIRCHHOFFschen Gesetzen beliebig zusammengesetztes System erhalten. Aus diesen Betrachtungen ergibt sich folgendes: Wenn U_1 die Lösung für

$$i = i_1 = i_0 \cos\omega t$$

und U_2 die Lösung für

$$i = i_2 = i_0 \sin\omega t$$

sind, dann gibt uns die Linearkombination $i = i_1 + j i_2$ die Lösung $U_1 + j U_2$. Da wir für $i_1 + j i_2$ einen einfachen Ausdruck

$$i = i_1 + j i_2 = i_0 (\cos\omega t + j \sin\omega t) = i_0 e^{j\omega t}$$

haben, der uns sofort die Lösung $U_1 + j U_2$ in einer ebenso einfachen Form anzugeben gestattet, erhalten wir also

$$(U_1 + j U_2) = L\frac{di}{dt} + Ri = (jL\omega + R)\, i_0 e^{j\omega t}.$$

Diesen Ausdruck können wir auch in der Form

$$U = (jL\omega + R) i$$

darstellen, indem wir einen *komplexen Scheinwiderstand*

$$jL\omega + R$$

einführen.

Diese Gleichung hat nur dann einen physikalischen Sinn, wenn wir aus ihren beiden Gliedern die Real- von den Imaginärteilen abtrennen können. Man kann ohne

Schwierigkeit voraussagen, was dann eintritt: Für jede sinusförmige Komponente von i entspricht der Ausdruck $jL\omega i$ (Stromdurchgang durch die Selbstinduktion L) einer um den Phasenwinkel $\pi/2$ verschobenen Spannung und der Ausdruck Ri (Stromdurchgang durch den Widerstand R) einer phasengleichen Spannung. Diese Spannungen werden die gewünschten Amplituden besitzen.

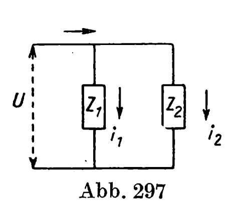


Abb. 297

Die imaginäre Schreibweise ist also nur ein bequemes Mittel, um den Scheinwiderstand, die Spannungen, die Phase oder den WATTschen bzw. wattlosen Strom darzustellen. Außerdem ist sie sehr zweckmäßig, da sich die komplexen Scheinwiderstände einfach algebraisch addieren. Wenn man die Abbildungen 296 und 291 miteinander vergleicht, so sieht man, daß die imaginäre Darstellung der vektoriellen Methode völlig äquivalent ist. Sie ist jedoch noch viel praktischer, da sie es gestattet, sofort von Spannungen zu Strömen und umgekehrt überzugehen, und uns direkt die Gesetze der Stromverzweigungen liefert (Abb. 297):

$$U = i_1 Z_1 \quad U = i_2 Z_2 ,$$

$$i_{\text{ges}} = i_1 + i_2 = U\left(\frac{1}{Z_1} + \frac{1}{Z_2}\right).$$

Ein System von zwei parallelgeschalteten Scheinwiderständen Z_1 und Z_2 ist also in seinen Auswirkungen auf den Gesamtstrom einem Scheinwiderstand Z,

$$\frac{1}{Z} = \frac{1}{Z_1} + \frac{1}{Z_2},$$

äquivalent (natürlich nur in imaginärer Schreibweise).

Bei gewissen Problemen ist es zweckmäßig, den reziproken Wert des Scheinwiderstandes zu betrachten. Wenn man $U = Zi$ hat, ist $i = AU$, wobei $A = 1/Z$ ist. Bei Stromverzweigungen addieren sich diese Kehrwerte (in imaginärer Schreibweise).

Anwendung auf die Resonanz. Begriff der Überspannung

Wir betrachten eine Selbstinduktion, eine Kapazität und einen Widerstand in Reihe mit einem Wechselstromgenerator. Die Wechselspannung sei durch den Ausdruck

$$E = E_0 \sin \omega t$$

gegeben. Wir wollen nun den fließenden Strom und die an den Klemmen des Kondensators auftretende Spannung U berechnen (Abb. 298). Wir gehen von dem Ausdruck

$$E = L\frac{di}{dt} + Ri + \frac{1}{C}\int i\,dt = \left(jL\omega + \frac{1}{jC\omega} + R\right) i$$

Abb. 298

aus. Nun ist jedoch

$$U = \frac{1}{C}\int i\,dt = \frac{i}{jC\omega},$$

und daraus folgt

$$E = (1 - LC\omega^2 + jRC\omega)\,U.$$

Die imaginäre Größe

$$1 - LC\omega^2 + jRC\omega$$

können wir in der Form

$$\sqrt{(1 - LC\omega^2)^2 + (RC\omega)^2}\; e^{j\varphi}$$

darstellen, wobei

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{RC\omega}{1 - LC\omega^2}.$$

Wir erhalten die Lösung zu

$$U = \frac{E}{\sqrt{(1 - LC\omega^2)^2 + (RC\omega)^2}}\, e^{-j\varphi}.$$

Diese Lösung können wir in folgender Form interpretieren: *Wenn E eine sinusförmige Spannung mit der Kreisfrequenz ω* ist, *dann ist U eine Spannung mit der gleichen Kreisfrequenz einer Amplitude, die gleich der von E geteilt durch*

$$\sqrt{(1 - LC\omega^2)^2 + (RC\omega)^2}$$

und gegen E um den Winkel

$$\varphi = \operatorname{arc\,tg} \frac{RC\omega}{1 - LC\omega^2}$$

phasenrückverschoben ist.

Wir erhalten den speziellen Fall der *Resonanz*, wenn L und C der Bedingung

$$jL\omega - \frac{j}{C\omega} = 0$$

genügen. Der Gesamtblindwiderstand ist dann Null. Wir erhalten also einen Maximalstrom i, der durch $E = Ri$ gegeben ist. Dieser Strom fließt jedoch auch in den relativ großen Scheinwiderständen $L\omega$ sowie $1/C\omega$ und ruft besonders in C die erhöhte Spannung

$$U = \frac{1}{jC\omega}\, i = \frac{E}{jRC\omega}$$

hervor, die in den vorstehenden Formeln enthalten ist, da

$$\operatorname{tg}\varphi = \infty, \qquad \varphi = \frac{\pi}{2}$$

und

$$e^{-j\frac{\pi}{2}} = \frac{1}{j}.$$

Normalerweise ist R klein, $RC\omega \ll 1$ und $U \gg E$. Dies sind die Bedingungen der Resonanz.

Betrachten wir also einen Strom von 50 Hertz, $\omega = 2\pi \cdot 50 = 100\pi$. Eine Selbstinduktion von 1 Henry befindet sich mit einer Kapazität C in Resonanz wenn

$$L C \omega^2 = 1$$

oder

$$C = \frac{1}{L\omega^2} = \frac{1}{\pi^2 \cdot 10^4} \text{ Farad};$$

$C = \frac{100}{\pi^2}\ \mu$F. Setzen wir $R = 1\ \Omega$ und $E_{\text{eff}} = 110$ V, dann wird $i_{\text{eff}} = 110$ A im Resonanzfall, da

$$U = \frac{E}{j\,\frac{100}{\pi^2} \cdot 10^{-6} \cdot 100\pi} \cdot 100\pi E$$

oder

$$\frac{U}{E} = 100\pi, \quad U = 110 \cdot 100\pi = 34000 \text{ Volt}.$$

Dies ist die bei der Resonanz auftretende Spannungsüberhöhung. Sie wird durch

$$\frac{1}{R C \omega} = \frac{L\omega}{R}$$

gegeben. Dieses Verhältnis, der Quotient von zwei Scheinwiderständen, ist dimensionslos. Sein Wert ist, ohne die Kondensatorverluste zu berücksichtigen, begrenzt, da man keine Selbstinduktion ohne Wirkverluste konstruieren kann. Die Größenordnung $\frac{L\omega}{R} = 100$ wird in der Praxis leicht und oft erreicht, dagegen ist ein Wert von 200 oder 300 schon bedeutend seltener.

Man stellt also fest, daß im Resonanzfall, wenn i mit E in Phase ist, eine Leistung $Ei = Ri^2$ auftritt und daß der $\cos\varphi$ des Stromkreises gerade gleich 1 ist. Bei jeder anderen Frequenz ist $\cos\varphi \neq 1$ und geht für sehr niedrige und sehr hohe Frequenzen gegen Null. Gleichzeitig bleibt der Strom in der Phase gegenüber der Spannung zurück. Dies sind aber nur zwei verschiedene Auswirkungen der gleichen Ursache.

Parallelschwingkreis

Betrachten wir dagegen den in Abb. 299 aus einer Selbstinduktion, einer zu ihr parallelen Kapazität und eventuell einem kleinen Widerstand r gebildeten Stromkreis.

Der bei der Spannung

$$U = U_0 e^{j\omega t}$$

auftretende Scheinwiderstand ist durch

$$\frac{1}{Z} = \frac{1}{r + jL\omega} + \frac{1}{\frac{1}{jC\omega}}$$

und

$$Z = \frac{r + jL\omega}{1 - LC\omega^2 + jrC\omega}$$

gegeben. Wenn $rC\omega \ll 1$ ist, verläuft Z durch ein sehr scharfes Resonanzmaximum. Vernachlässigt man im Zähler des letzten Ausdruckes r gegen $jL\omega$, so erhält man

$$Z = \frac{jL\omega}{jrC\omega} = \frac{L}{rC} = \frac{L^2\omega^2}{r}.$$

Der Scheinwiderstand im Resonanzfall ist also ein reiner Widerstand L/rC und sehr groß, da er durch den Scheinwiderstand $L\omega$ der Selbstinduktion, multipliziert mit der Kreisgüte $L\omega/r \gg 1$, gebildet wird. Je kleiner der Widerstand r ist, um so stärker tritt dieser Effekt hervor. Wenn der Scheinwiderstand den Maximalwert annimmt, hat der Strom einen Minimalwert. Aus diesem Grunde wird dieser Stromkreis Antiresonanzkreis (Parallelschwingkreis) genannt.

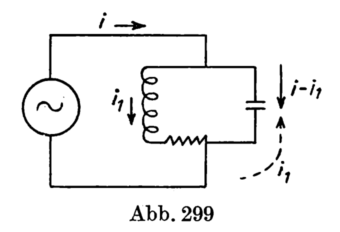


Abb. 299

Bezeichnet man mit R die Größe L/rC im Resonanzfall, dann ist $Ui = Ri^2$ die im Stromkreis verbrauchte größere Leistung, obwohl wir nur über einen kleinen Widerstand r verfügen. Ein offensichtlicher Widerspruch tritt auf, da wir feststellen, daß der geringe Strom i in dem aus L, r und C gebildeten Stromkreis einen starken Strom i_1 hervorruft. Es ist tatsächlich

$$E = (r + jL\omega)\, i_1 = \frac{i - i_1}{jC\omega},$$

wenn wir die Spannung an den Klemmen jedes Elementes der Verzweigung als gleich annehmen. Zwischen i und i_1 besteht also die Beziehung

$$\left(jL\omega + r + \frac{1}{jC\omega}\right) i_1 = \frac{i}{jC\omega}$$

oder

$$(1 - LC\omega^2 + jrC\omega)\, i_1 = i.$$

Im Spezialfall der Resonanz ist

$$i_1 = \frac{i}{jrC\omega}.$$

Der Strom i_1 ist in der Phase gegenüber i um $\pi/2$ verschoben und hat eine sehr viel größere Amplitude im Verhältnis $\frac{L\omega}{r} = \frac{1}{rC\omega}$ gegenüber dem Strom i.

Wir nehmen jetzt an, daß die Verluste Ri^2 der Leistung ri_1^2 des Stromes i_1, der im Widerstand r fließt, entsprechen:

$$ri_1^2 = r\,\frac{i^2}{(rC\omega)^2} = \frac{i^2}{rC^2\omega^2} = \frac{Li^2}{rC} = Ri^2.$$

Dabei ist $\omega^2 = \frac{1}{LC}$.

Resonanzkurve. Resonanzbreite

Wir wollen die Kurve aufnehmen, die die Spannungsverstärkung U/E als Funktion von ω für einen Resonanzkreis darstellt. Dazu setzen wir jetzt

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}} \quad \text{und} \quad RC\,\omega_0 = \frac{1}{S}$$

und bezeichnen

$$\frac{L\omega_0}{R} = S$$

als *Kreisgüte*.

Dann ist

$$\left|\frac{U}{E}\right| = \frac{1}{\sqrt{\left[1 - \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2\right]^2 + \frac{1}{S^2}\left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2}}$$

und

$$\operatorname{tg}\varphi = -\frac{1}{S}\,\frac{\frac{\omega}{\omega_0}}{1 - \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2}$$

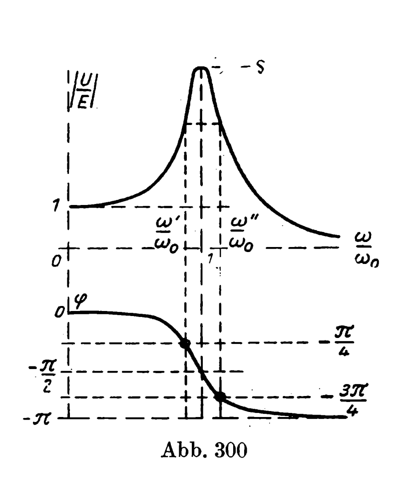


Abb. 300

mit φ als Phase von U in bezug auf E.

Die Resonanzkurve hat die in Abb. 300 dargestellte Form und besitzt folgende Eigenschaften:

1. $U/E = 1$ für sehr kleine Frequenzen; $U/E = 0$ für sehr hohe Frequenzen. (Dies erklärt, daß der Kondensator den Durchgang tiefer Frequenzen verhindert und bei hohen Frequenzen einen Kurzschluß verursacht.)

2. U/E verläuft durch ein Maximum S, das im Scheitelpunkt bei $\frac{\omega}{\omega_0} = 1\,S$ liegt ($S \gg 1$).

3. Die Spannungsverstärkung tritt über eine gewisse Frequenzbreite auf, deren Definition recht willkürlich ist. Wenn wir ihre Grenzen an den Stellen ω' und ω'' annehmen, wo die Spannungsverstärkung $\frac{S}{\sqrt{2}}$ beträgt, so erhalten wir, wenn S groß ist, ohne Schwierigkeiten einen angenäherten Wert für $\omega'' - \omega'$, der durch

$$\frac{\omega'' - \omega'}{\omega_0} = \frac{1}{S}$$

oder

$$\omega'', \omega' = \omega_0\left(1 \pm \frac{1}{2S}\right)$$

gegeben ist.

4. Wenn wir uns auf den Ausdruck für $\operatorname{tg}\varphi$ beziehen, erhalten wir für $\omega = \omega'$ oder $\omega = \omega''$ die Formel

$$\operatorname{tg}\varphi = -\frac{1}{S}\left(\frac{1}{\pm\frac{2}{2S}}\right) = \pm 1.$$

Mit anderen Worten, der Winkel φ läuft von $\frac{\pi}{4}$ bis $\frac{3\pi}{4}$, d.h., er beträgt insgesamt $\frac{\pi}{2}$, wenn wir nur die innerhalb der Resonanzbreite liegenden Frequenzen betrachten. Dagegen verläuft der Winkel φ für Frequenzen unterhalb der Resonanzbreite und oberhalb der Resonanzbreite bis zum Unendlichen entsprechend von $+\frac{\pi}{4}$ bis $-\frac{\pi}{4}$.

Drücken wir jetzt i als Funktion von E aus, so finden wir eine Resonanzkurve mit einem etwas anderen Aussehen, die mit der eben betrachteten durch die Beziehung

$$U = \frac{1}{C}\int i\,dt = \frac{1}{jC\omega}\,i,$$

d.h.

$$i = jC\omega U,$$

verbunden ist. Die Amplitude entspricht also der von U, multipliziert mit $C\omega$. Für $\omega = 0$ ist sie selbstverständlich Null und die Phase um $\frac{\pi}{2}$ angewachsen.

Analogie zum Pendel

Wir haben bereits festgestellt, daß eine geladene Kapazität ein Analogon zu einer zusammengepreßten Feder und eine Selbstinduktion mit der aufgespeicherten Energie $\frac{1}{2}Li^2$ ein Analogon zu einer kinetischen Energie $\frac{1}{2}mv^2$ sind. So entspricht also $E = L\frac{di}{dt}$ einer Trägheitskraft $F = m\frac{dv}{dt}$, und $U = \frac{Q}{C}$ ist der Kraft $F = Kx$ analog, wobei $K = \frac{1}{C}$ die Steifigkeit der Feder ist. Dabei gilt

$$x = \int v\,dt \quad \text{und} \quad Q = \int i\,dt.$$

Man könnte die Resonanz eines durch eine sinusförmige Wechselkraft angeregten Pendels auch durch Einführung des mechanischen Scheinwiderstandes $jm\omega$ für die Masse, $\frac{K}{j\omega}$ für die Feder und f für den mechanischen Widerstand (der der viskosen Reibungskraft $f\frac{dx}{dt}$ entspricht) beschreiben. Daraus ergibt sich die Möglichkeit, eine für mechanische Schwingungskreise entwickelte Theorie auch auf elektrische Schwingungskreise anzuwenden und umgekehrt.

WHEATSTONEsche Brücke für Wechselstrom

Wir wollen jetzt den Gleichgewichtszustand einer WHEATSTONEschen Brücke untersuchen, die nicht mehr aus Widerständen, sondern aus den Scheinwiderständen Z_1, Z_2, Z_3, Z_4 besteht und mit Wechselstrom gespeist wird (Abb. 301).

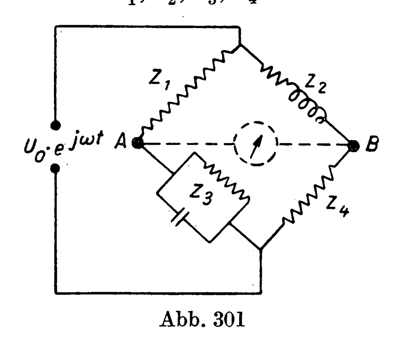


Abb. 301

Das Gleichgewicht der Brücke erfordert, daß die Potentialdifferenz zwischen A und B Null ist, d.h., es ergibt sich genau wie bei der Gleichstrombrücke die Bedingung

$$\frac{Z_1}{Z_3} = \frac{Z_2}{Z_4}.$$

Wir wollen jetzt

$$Z_1 = R_1, \quad Z_2 = R_2 + jL_2\omega,$$

$$\frac{1}{Z_3} = \frac{1}{R_3} + jC_3\omega$$

setzen. Dann ist

$$Z_3 = \frac{R_3}{1 + jR_3C_3\omega} \quad \text{und} \quad Z_4 = R_4.$$

Wir sehen, daß sich

$$Z_1Z_4 = Z_2Z_3$$

oder

$$R_1R_4 = R_2R_3\frac{1 + \frac{jL_2\omega}{R_2}}{1 + jR_3C_3\omega}$$

ergibt. Es muß somit gelten

1. $$R_1R_4 = R_2R_3,$$

2. $$\frac{L_2\omega}{R_2} = R_3C_3\omega.$$

Wir finden also zwei Bedingungen an Stelle nur einer bei der Gleichstrombrücke, da die Scheinwiderstände nicht nur in ihrer Größe, sondern auch in ihrer Phase abgeglichen werden müssen.

Wir nehmen jetzt an, daß Z_2 der zu messende Scheinwiderstand sei (R_1, R_3, R_4, C_3 sind als bekannt vorausgesetzt).
Dann erhalten wir

$$R_2 = \frac{R_1R_4}{R_3} \quad \text{und} \quad L_2 = R_2R_3C_3.$$

Die so gebildete Brücke ist also zur Messung von Selbstinduktionen geeignet. Man wird bemerken, daß das Gleichgewicht, nachdem es sich einmal eingestellt hat, im Prinzip erhalten bleibt, unabhängig davon, welche Frequenz ω auch der vom Generator gelieferte Wechselstrom besitzt. In der Praxis haben Selbstinduktionen

immer eine Kapazität, ihr Scheinwiderstand ist niemals einfach durch $L_2\omega$ gegeben. L_2 ist auch nur in einem bestimmten Frequenzbereich konstant.

Frequenzmesser

Wenn wir im Gegensatz dazu eine Brücke konstruieren, bei der der Gleichgewichtszustand nur für eine bestimmte Frequenz eingestellt werden kann, ermöglicht eine Veränderung der Scheinwiderstände der Brücke, diese Frequenz so zu wählen, daß sie mit der zu messenden Frequenz irgendeines beliebigen Generators (dessen Spannung angenähert sinusförmig sein muß) übereinstimmt. Diese Konstruktion stellt einen *Frequenzmesser* dar.

Ein Beispiel eines solchen Aufbaues ist in Abb. 302 mit den Scheinwiderständen

$$Z_1 = R + \frac{1}{jC\omega}$$

und

$$Z_3 = \frac{R}{1 + jRC\omega}$$

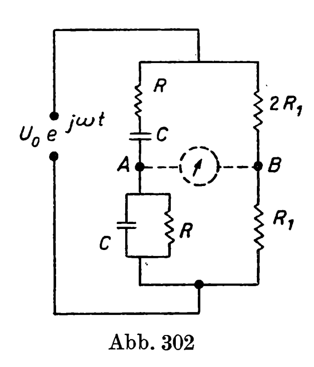


Abb. 302

gegeben (R und C sind jeweils gleich);

$$Z_2 = 2R_1, \quad Z_4 = R_1.$$

Das Brückengleichgewicht stellt sich für

$$\frac{Z_1}{Z_3} = \frac{Z_2}{Z_4}$$

ein. Setzen wir die einzelnen Ausdrücke für die Scheinwiderstände ein, so erhalten wir

$$\frac{\dfrac{1 + jRC\omega}{jC\omega}}{\dfrac{R}{1 + jRC\omega}} = 2$$

und daraus

$$(1 + jRC\omega)^2 = 2jRC\omega.$$

Es ist also

$$1 - (RC\omega)^2 = 0 \quad \text{oder} \quad RC\omega = 1.$$

Die Abstimmung entweder der beiden Widerstände R oder der beiden Kapazitäten C führt für eine durch $\omega = \frac{1}{RC}$ gegebene Kreisfrequenz zur Auslöschung des Signals im Instrumentenzweig.

Wenn die angelegte Spannung nicht völlig sinusförmig ist, sondern harmonische Anteile enthält, so wird zwischen A und B ein von diesen harmonischen Anteilen hervorgerufenes Signal verbleiben. Ist als Abgleichanzeigeinstrument zwischen A und B ein Kopfhörer oder ein Kathodenstrahloszillograph eingeschaltet, so nimmt das Ohr bei der Einstellung des Gleichgewichts die Veränderung des Tones wahr oder das Auge sieht auf dem Schirm des Oszillographen die Frequenz anwachsen, und zwar so, daß die Messung der Fundamentalfrequenz noch möglich ist.

Allgemeine Theorie der Stromkreise im sinusförmigen Gebiet. Vierpole

Die allgemeine Theorie der Wechselstromkreise besteht in der wiederholten Anwendung des OHMschen und des verallgemeinerten KIRCHHOFFschen Gesetzes, wobei die Widerstände durch die Scheinwiderstände ersetzt werden. Man ist jedoch daran interessiert, zur Vereinfachung der Rechnungen eine Systematik einzuführen. Wir betrachten hier nur die *passiven* Stromkreise, die aus Selbstinduktionen, Kapazitäten und Widerständen sowie gegenseitigen Induktionen bestehen. Relais, Generatoren und Energieverbraucher schließen wir von unseren Betrachtungen aus.

Der Fall der gegenseitigen Induktion unterscheidet sich nicht von dem der Selbstinduktion, denn man sieht sofort, daß der Stromkreis in Abb. 303a, der aus

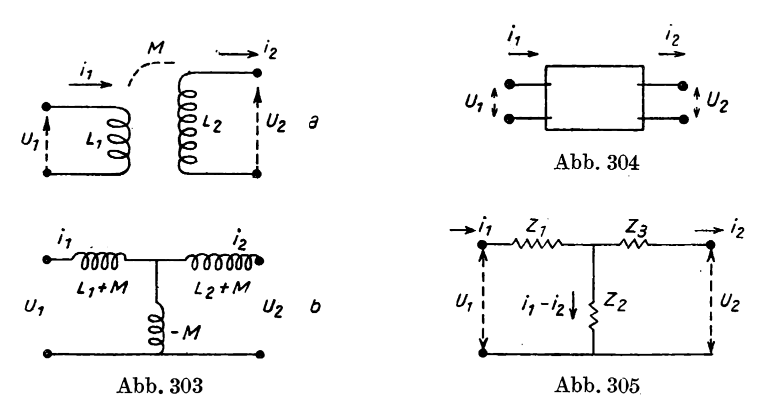


Abb. 303

Abb. 304

Abb. 305

den Selbstinduktionen L_1 und L_2 mit der gegenseitigen Induktion M besteht, in jeder Hinsicht dem Stromkreis in Abb. 303b (der aus den drei Selbstinduktionen $L_1 + M$, $L_2 + M$ und $-M$ ohne gegenseitige Induktion besteht) äquivalent ist. Die in beiden Fällen als gleich angenommenen Spannungen U_1 und U_2 rufen dieselben Ströme i_1 und i_2 hervor. Mit diesem Aufbau ist man in der Lage, negative Selbstinduktionen wie z.B. $-M$ darzustellen, deren Äquivalent man durch entsprechend gewählte Gegeninduktionen erhält.

Diese Anordnung wird im allgemeinen in Form eines Rechteckes gezeichnet, an dem zwei Eingangs- und zwei Ausgangsklemmen angedeutet sind. Man nennt dies einen *Quadru- oder Vierpol*. Nehmen wir an, daß die Eingangsspannung U_1 einen Strom i_1 erzeugt und der austretende Strom i_2 (beachte die entgegengesetzte Richtung und damit das Vorzeichen für i_1 und i_2 in Abb. 304) an den Ausgangsklemmen eine Spannung U_2 erzeugt, wenn diese Klemmen über einen Verbraucher (Scheinwiderstand, Stromkreis oder Motor) geschlossen sind. Kennt man den Aufbau des Stromkreises, so erhält man durch das OHMsche und die KIRCHHOFFschen Gesetze lineare homogene Beziehungen, die U_1 und U_2 mit i_1 und i_2 verknüpfen:

$$U_1 = A i_1 + B i_2,$$

$$U_2 = -B i_1 + C i_2.$$

Wir können eine Symmetrie zwischen den beiden Kopplungskoeffizienten B und $-B$ in den beiden Gleichungen feststellen. A, B und C haben die Dimension von Scheinwiderständen und sind Funktionen der Frequenz. Wir sehen die Symmetrie zwischen B und $-B$ als allgemeine Eigenschaft an (hierfür existiert ein Beweis von MAXWELL). Man nennt den Quadrupol dann *symmetrisch*, wenn $C = -A$ ist, und sieht, daß sich in diesem Spezialfall bei einer Vertauschung von Eingangs- und Ausgangsklemmen seine Eigenschaften nicht verändern.

Nun wollen wir einige Beispiele verschiedener Konstruktionsarten von Stromkreisen betrachten und für diese die Koeffizienten A, B und C berechnen.

1. *T-Glied* (Abb. 305). Es ist

$$U_1 = Z_1 i_1 + Z_2(i_1 - i_2),$$

$$(i_1 - i_2)Z_2 = Z_3 i_2 + U_2.$$

Daraus folgt

$$U_1 = (Z_1 + Z_2)i_1 - Z_2 i_2,$$

$$U_2 = Z_2 i_1 - (Z_2 + Z_3)i_2.$$

Man erhält schließlich

$$A = (Z_1 + Z_2), \quad B = -Z_2, \quad C = -(Z_2 + Z_3).$$

Dieses T-Glied ist also dann symmetrisch, wenn $Z_1 = Z_3$ ist.

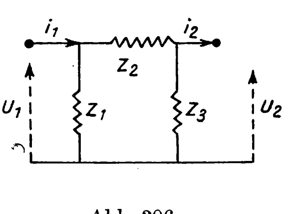


Abb. 306

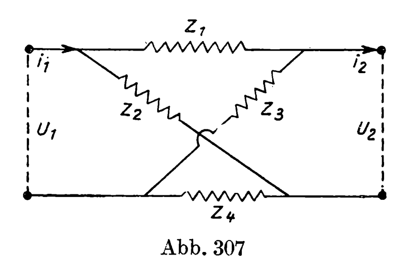


Abb. 307

2. *π-Glied* (Abb. 306). Die gleiche Berechnungsmethode ergibt für diesen Fall

$$U_1 = \frac{Z_1(Z_2 + Z_3)}{Z_1 + Z_2 + Z_3} i_1 - \frac{Z_1 Z_3}{Z_1 + Z_2 + Z_3} i_2,$$

$$U_2 = \frac{Z_1 Z_3}{Z_1 + Z_2 + Z_3} i_1 - \frac{Z_3(Z_1 + Z_2)}{Z_1 + Z_2 + Z_3} i_2.$$

3. *x-Glied* (Abb. 307). Eine WHEATSTONEsche Brücke bildet ebenfalls einen Quadrupol. Man kann sie wie in Abb. 307 darstellen und erhält

$$U_1 = \frac{(Z_2 + Z_4)(Z_1 + Z_3)}{Z_1 + Z_2 + Z_3 + Z_4} i_1 - \frac{Z_1 Z_4 - Z_2 Z_3}{Z_1 + Z_2 + Z_3 + Z_4} i_2,$$

$$U_2 = -\frac{Z_1 Z_4 - Z_2 Z_3}{Z_1 + Z_2 + Z_3 + Z_4} i_1 + \frac{(Z_1 + Z_2)(Z_3 + Z_4)}{Z_1 + Z_2 + Z_3 + Z_4} i_2.$$

Diese Gleichungen stimmen vollständig mit den Gleichgewichtsbedingungen der klassischen WHEATSTONEschen Brücke überein. Um zu erreichen, daß $U_2 = 0$ und $i_2 = 0$ werden, muß

$$Z_1 Z_4 - Z_2 Z_3 = 0$$

sein, und i_2 wird immer Null sein, über welchen Scheinwiderstand man auch die Brücke schließt ($U_2 = Z i_2$).

Wir können übrigens feststellen, daß sich jeder noch so komplizierte Stromkreis als T-Glied darstellen läßt, da man die drei Scheinwiderstände Z_1, Z_2 und Z_3 nach den Gleichungen

$$Z_1 + Z_2 = A, \quad Z_2 = -B, \quad Z_2 + Z_3 = -C$$

bestimmen kann.

Es ist jedoch nicht gesagt, daß man durch diese Methode auf Scheinwiderstände kommt, die mit *reellen* Elementen (Selbstinduktionen, Kapazitäten, Widerstände) darstellbar sind.

Iterativer Scheinwiderstand

Nachdem wir die Ausgangsklemmen eines Vierpols über einen Scheinwiderstand Z_0 geschlossen haben, suchen wir die Beziehung

$$\frac{U_1}{i_1} = Z.$$

Dabei ist Z der am Eingang des Vierpols auftretende Scheinwiderstand. Mit den entsprechenden Vorzeichen ergibt sich dann

$$U_2 = Z_0 i_2,$$

$$U_2 = -B i_1 + C i_2$$

und

$$i_2 = \frac{B}{C + Z_0} i_1.$$

Durch Substitution in der Gleichung für U_1 erhalten wir

$$\frac{U_1}{i_1} = A + \frac{B^2}{C - Z_0},$$

und daraus folgt

$$Z = A + \frac{B^2}{C - Z_0}.$$

Es besteht also ein Zusammenhang zwischen Z_0 und Z. Jetzt wählen wir Z_0 so, daß $Z \equiv Z_0$ ist, d.h.

$$\frac{U_1}{i_1} = \frac{U_2}{i_2}.$$

Das Ergebnis ist das gleiche, als wäre der Vierpol nicht vorhanden und der Generator mit der Spannung U_0 direkt über den Scheinwiderstand Z_0 geschlossen. Dabei muß Z_0 die Wurzel der Gleichung

$$Z_0(C - Z_0) = AC + B^2 - AZ_0; \quad Z_0^2 - (A + C)\, Z_0 + AC + B^2 = 0$$

sein. Der durch diese Gleichung definierte Scheinwiderstand ist der *iterative Scheinwiderstand des Vierpols.*

Im Spezialfall eines symmetrischen Vierpols ist $C = -A$, und es gilt

$$Z_0^2 = A^2 - B^2.$$

In den folgenden Betrachtungen beschränken wir uns auf den Fall des symmetrischen Vierpols.

Verlustloser symmetrischer Vierpol

Enthält der Vierpol keinerlei Widerstände, so sind A, B und C rein imaginäre Größen, da die Ströme in jedem Element gegen die Spannungen phasenverschoben sind. Untersuchen wir nun Z_0:

$$Z_0 = \pm \sqrt{A^2 - B^2}.$$

A^2 und B^2 sind dabei *negative* Zahlen. Es ergibt sich also die folgende Eigenschaft:

Im Bereich der Frequenzen, für die $|B| > |A|$ gilt, ist Z_0 die Quadratwurzel einer positiven Zahl, d.h., es handelt sich um einen *reinen Widerstand*, der positiv oder negativ sein kann. Im Frequenzbereich, in dem $|B| < |A|$ gilt, ist Z_0 ein reiner Blindwiderstand.

Nun wollen wir den Wert des Verhältnisses

$$\frac{i_1}{i_2} = \frac{U_1}{U_2}$$

betrachten und finden dabei eine zusätzliche, sehr wichtige Eigenschaft:

$$U_2 = Z_0 i_2 = -B i_1 - A i_2.$$

Daraus erhalten wir

$$\frac{i_1}{i_2} = -\frac{Z_0 + A}{B} = -\frac{A \pm \sqrt{A^2 - B^2}}{B}$$

oder

$$\frac{i_1}{i_2} = -\frac{A}{B} \pm j \sqrt{1 - \frac{A^2}{B^2}}.$$

Für den Frequenzbereich, in dem $|B| > |A|$ galt, können wir $-A/B = \cos\varphi$ setzen, und der Ausdruck erhält die Form

$$\frac{i_1}{i_2} = \cos\varphi \pm j \sin\varphi = e^{\pm j\varphi}.$$

Wir sehen, daß dieses Verhältnis den Wert 1 hat oder, mit anderen Worten: *Der aus dem Vierpol austretende Strom und die Ausgangsspannung haben die*

gleiche Amplitude wie der eintretende Strom und die Eingangsspannung. Der Vierpol ruft nur eine Phasendifferenz hervor, wenn er über seinen iterativen Scheinwiderstand geschlossen ist und wenn Spannungen und Ströme innerhalb des Frequenzbereiches liegen, in dem ein reeller iterativer Scheinwiderstand auftritt.

Über die Vorgänge außerhalb dieses Frequenzbereiches können wir leicht Aussagen machen: wenn $|B| < |A|$ ist, können wir

$$-\frac{A}{B} = \cosh\varphi$$

setzen und erhalten dann

$$\frac{U_2}{U_1} = \frac{i_2}{i_1} = -\frac{A}{B} \pm \sqrt{\frac{A^2}{B^2} - 1} = \cosh\varphi \pm \sinh\varphi,$$

und daraus schließlich

$$\frac{U_2}{U_1} = \frac{i_2}{i_1} = e^{-\varphi},$$

wenn φ positiv ist. Bei negativem φ wird dieser Ausdruck gleich e^{φ}.

Die Wahl der Vorzeichen der einzelnen Terme ist nicht ganz einfach. Es ist physikalisch offensichtlich, daß ein Vierpol nicht gleichzeitig $i_2 > i_1$ und $U_2 > U_1$ an seinen Ausgangsklemmen aufweisen kann. Es ist also notwendig, die oben angegebenen Vorzeichenregeln zu beachten. Ihre Berechtigung könnten wir nur nachweisen, wenn wir allgemeine Theoreme über das Anwachsen des Scheinwiderstandes als Funktion der Frequenz behandeln würden, was den Rahmen dieses Buches überstiege.

Begriff des Filters

Wir betrachten einen Vierpol (1), den wir nicht über seinen iterativen Scheinwiderstand Z_0 schließen, sondern dessen Ausgangsklemmen wir mit den Eingangsklemmen eines zweiten identischen Vierpols verbinden, der selbst wieder über einen dritten Vierpol geschlossen ist usw. Der n-te Vierpol end-

Abb. 308

lich sei über den iterativen Scheinwiderstand Z_0 geschlossen (Abb. 308). Nehmen wir an, daß für Kreisfrequenzen ω zwischen ω_1 und ω_2 Z_0 reell und für $\omega < \omega_1$ und $\omega > \omega_2$ Z_0 imaginär sei. Für alle Kreisfrequenzen innerhalb des Frequenzbereiches $\omega_2 - \omega_1$ erhalten wir dann

$$\left|\frac{U_1}{U_2}\right| = \left|\frac{U_2}{U_3}\right| = \cdots = 1,$$

und damit ist

$$\left|\frac{U_1}{U_n}\right| = 1; \quad \left|\frac{i_1}{i_n}\right| = 1.$$

Für Kreisfrequenzen außerhalb dieses Bereichs ergibt sich

$$\frac{U_n}{U_1} = \left(\frac{U_2}{U_1}\right)^n = e^{-n\varphi}.$$

Dieser Ausdruck geht gegen Null, wenn n groß ist.

Auf diese Weise haben wir ein wirksames Filter erhalten, von dem nur die Frequenzen, die innerhalb dieses Bereiches liegen, hindurchgelassen werden (und zwar diese ohne jede Schwächung). Die Bedingung der Filtrung, durch die die Grenzfrequenzen ω_1 und ω_2 (es kann sich auch um mehrere Bereiche handeln) bestimmt werden, lautet

$$-1 < \frac{A}{B} < +1.$$

Filter in T-Form

Wenn wir dieses Resultat auf ein T-förmiges Filter anwenden, das durch die entsprechende Wahl von $Z_1 = Z_3$ symmetrisch ist, so erhalten wir

$$-1 < \frac{Z_1 + Z_2}{Z_2} < +1;$$

mit anderen Worten, Z_1/Z_2 liegt in diesem Frequenzbereich zwischen 0 und -2.

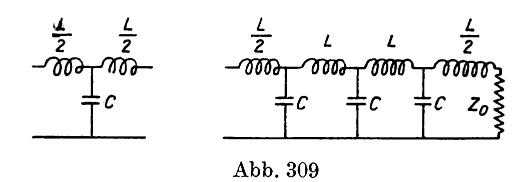


Abb. 309

Beispiel: Tiefpaß, Hochpaß, Bandfilter. Wir bilden ein aus $L/2$, $L/2$ und C bestehendes Filter (Abb. 309) und suchen den entsprechenden Frequenzbereich:

$$\frac{j\,\frac{L}{2}\,\omega}{\frac{1}{j\,C\,\omega}} = -\frac{L\,C\,\omega^2}{2}.$$

Im Bereich zwischen 0 und -2 liegt $L\,C\,\omega^2$ zwischen 0 und 4, und es gilt

$$0 < \omega < \frac{2}{\sqrt{L\,C}}.$$

Das so gebildete Filter nennt man *Tiefpaßfilter*, d.h., es läßt nur Frequenzen unterhalb

$$\omega_1 = 2\pi\nu_1 = \frac{2}{\sqrt{L\,C}}$$

hindurchtreten.

Der iterative Scheinwiderstand hat in diesem Fall den Wert

$$Z_0 = \sqrt{A^2 - B^2} = \sqrt{(Z_1 + Z_2)^2 - Z_2^2} = \sqrt{Z_1(Z_1 + 2Z_2)}$$

$$= \sqrt{\frac{L}{C} - \frac{L^2\omega^2}{4}} = \sqrt{\frac{L}{C}} \cdot \sqrt{1 - \frac{\omega^2}{\omega_1^2}}.$$

Er besitzt meist den Wert $\sqrt{\frac{L}{C}}$ und wird dann für

$$\frac{\omega}{\omega_1} = 1$$

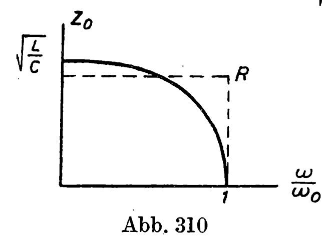


Abb. 310

Null, um im weiteren imaginär zu werden.

Um ein *reelles* Filter zu konstruieren, wählen wir zweckmäßig für Z einen reellen Widerstand R, der etwas kleiner als $\sqrt{\frac{L}{C}}$ ist und der mit einer gewissen Annäherung in dem Frequenzbereich (Abb. 310) Z_0 darstellt. Eine kompliziertere Theorie gestattet uns, die Abweichungen unseres Filters von den Eigenschaften eines idealen Filters abzuschätzen. Wir können zeigen, daß durch eine Vergrößerung der Anzahl der Zellen eine größere Annäherung an das Idealfilter erreicht wird.

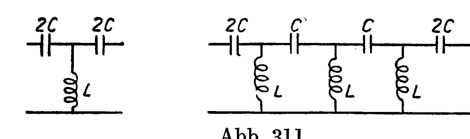


Abb. 311

Durch eine Vertauschung von C und L erreichen wir die Konstruktion eines Hochpaßfilters, d.h. eines Filters, das nur die Frequenzen oberhalb einer bestimmten Grenzfrequenz hindurchläßt. Wir überlassen es dem Leser, an Hand der Abb. 311 die entsprechenden Berechnungen durchzuführen.

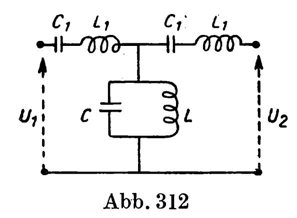


Abb. 312

Für ein Bandfilter gibt es viele Anwendungsmöglichkeiten. In seiner typischen Form besteht es aus einem Element, wie es in Abb. 312 dargestellt ist.

$$Z_1 = j\left(L_1\omega - \frac{1}{C_1\omega}\right); \quad Z_2 = \frac{jL\omega}{1 - LC\omega^2}.$$

Wenn jetzt Z_1 und Z_2 die gleiche Resonanzfrequenz haben, erhalten wir

$$LC\omega^2 = L_1C_1\omega^2$$

oder, mit dem Ausdruck

$$\omega_0^2 = \frac{1}{LC},$$

$$\frac{Z_1}{Z_2} = \frac{1 - L_1 C_1 \omega^2}{j C_1 \omega} \cdot \frac{1 - LC\omega^2}{j L \omega} = \frac{-\left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_0^2}\right)^2}{L C_1 \omega^2}$$

in dem Bereich zwischen 0 und -2. Wir sehen, daß die Frequenz 0 keine Grenze des Filters ist und -2 zwei Frequenzen ω' und ω'' beiderseits von ω_0 entspricht. Die weiteren Berechnungen sollen hier nicht betrachtet werden.

Verwendung der Filter

Die Filter haben besonders in der modernen Telephonie unzählige Verwendungsmöglichkeiten gefunden. So erfordert z.B. die kommerzielle Telephonie die korrekte Wiedergabe der Frequenzen zwischen 250 Hz und 3000 Hz. Der Frequenzbereich zwischen 0 und 250 Hz wird zur Übertragung von Signalen, z.B. in der Morsetelegraphie, verwendet. Die Trennung der telegraphischen von den telephonischen Signalen wird beim Aussenden und beim Empfang durch entsprechende Filter durchgeführt. Dadurch ist die Benutzung der gleichen Kabel für Telegraphie und Telephonie möglich.

Mit Mitteln, die wir im Kapitel „Anwendungen der Trioden" näher beschreiben werden, kann man zahlreiche telephonische Übertragungen gleichzeitig auf benachbarten Frequenzbereichen aussenden. So kann man eine Verbindung in dem Bereich zwischen 250 Hz und 3000 Hz, eine andere zwischen 4250 Hz und 7000 Hz, eine wieder zwischen 8250 Hz und 11000 Hz usw. übertragen. Auf diese Art kann man auf einem Kabel 3,12 und sogar 200 verschiedene Verbindungen pro Stromkreis herstellen. Die Aussonderung der einzelnen Kanäle sowohl bei der Sendung als auch beim Empfang wird wieder mit Filtern durchgeführt.

Die erste Anwendung des Filters für diesen Zweck geht auf G. A. Campbell (1917) in den Bell Telephone-Laboratories zurück.

II. KAPITEL

Wechselstrom (Fortsetzung)
Oszillographen. Induzierte Ströme. Transformatoren

Die Oszillographen

Wie mißt man zeitliche Veränderungen von Strom und Spannung bei Wechselstrom? Alle Apparaturen, mit denen diese Veränderungen gemessen werden können, nennt man im allgemeinen Oszillographen. Die am besten geeignete Anordnung ist der Kathodenstrahloszillograph, den wir in dem Kapitel „Das Elektron" beschreiben werden. In diesem Kapitel werden wir uns auf Apparate beschränken, deren Verwendbarkeit nur in einem begrenzten Bereich liegt. Betrachten wir die Bewegungsgleichung eines beliebigen Galvanometers:

$$I \frac{d^2\Theta}{dt^2} + f \frac{d\Theta}{dt} + K\Theta = F(t). \qquad (1)$$

Dabei ist $F(t)$ das Drehmoment und hat im Falle z. B. eines Spulenrähmchens der Höhe h, dessen stromdurchflossene Drähte die Länge l_1 besitzen, bei einer Induktion B die Form

$$F(t) = B l_1 \frac{h}{2} i(t);$$

i ist dabei der fließende Strom. Nun ist

$$l_1 = 2nl,$$

wobei l die Länge des stromdurchflossenen Drahtes, n die Anzahl der Windungen und $2l\frac{h}{2}$ die von einer Windung eingeschlossene Fläche sind. Wenn nun S die Gesamtfläche darstellt, dann gilt

$$F(t) = BSi = \Phi_0 i(t),$$

wobei Φ_0 der Maximalfluß durch den Rahmen ist.

Um zu erreichen, daß der Ablenkwinkel Θ ein Maß für den Strom i darstellt, d. h., daß Θ proportional zu i ist, muß gelten

$$I\frac{d^2\Theta}{dt^2} \ll K\Theta; \quad \left(\text{oder} \quad \omega^2 \ll \frac{K}{I}\right); \quad f\frac{d\Theta}{dt} \ll K\Theta.$$

Da K, um einen empfindlichen Apparat zu erhalten, nicht sehr groß sein darf $\left(\text{wegen } \Theta = \frac{\Phi_0 i}{K}\right)$, müssen I und f sehr klein gehalten werden, d. h., für ein empfindliches Instrument ist ein kleines Trägheitsmoment erforderlich.

Aus Gleichung (1) ersieht man, daß der Apparat Strömen mit der Frequenz ω nicht mehr folgen kann, wenn $I\omega^2 \gg K$. Es muß also tatsächlich gelten

$$I\frac{d^2\Theta}{dt^2} \gg K\Theta.$$

Daraus folgt notwendigerweise

$$\Theta \ll \frac{\Phi_0 i}{K}.$$

Wir wollen jetzt den Oszillographen nach BLONDEL betrachten (die meisten dieser Apparate sind bis zu 40000 Hz zu verwenden): Der Stromkreis wird auf zwei parallele Drähte beschränkt, die voneinander um Bruchteile eines Millimeters entfernt sind und auf denen ein kleiner Spiegel mit etwas größeren Abmessungen befestigt wird. Der Durchgang eines Stromes, der in beiden Drähten in entgegengesetzter Richtung fließt, ruft durch die Wirkung des Feldmagneten NS eine Drehung des Spiegels hervor, deren Größe entweder auf einer Skala oder einer photographischen Platte festgestellt werden kann (Abb. 313).

Durch entsprechende Veränderung des Dämpfungsfaktors kann man jedoch immer erreichen, daß bei Frequenzen ω, die gleich oder sogar etwas größer als $\sqrt{\frac{K}{I}}$,

diese Instrumente noch verwendbar sind. Wir werden später sehen, daß die Gleichung (1) mit der Resonanzgleichung im vorigen Kapitel identisch ist. Wir müssen nur beachten, daß die Amplitude von Θ sich mit ω verändert (gemäß der Resonanzkurve Abb. 300), wenn $F(t) = A \sin \omega t$ ist. Wir erhalten tatsächlich

$$\Theta = \frac{KA \sin(\omega t + \varphi)}{\sqrt{(K - I\omega^2)^2 + f^2\omega^2}} = \frac{A \sin(\omega t + \varphi)}{\sqrt{\left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_0^2}\right)^2 + \left(2\varepsilon \frac{\omega}{\omega_0}\right)^2}},$$

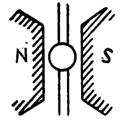


Abb. 313

wobei für

$$\omega_0^2 = \frac{K}{I} \quad \text{und für} \quad \frac{f\omega}{K} = 2\varepsilon \frac{\omega}{\omega_0}$$

gesetzt wurde.

Wir müssen also zu erreichen versuchen, daß sich für einen gegebenen Wert A ω verändert, dagegen Θ soweit irgend möglich konstant bleibt. Mit anderen Worten: Die durch die Funktion

$$F = \frac{1}{\sqrt{\left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_0^2}\right)^2 + 4\varepsilon^2 \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2}}$$

dargestellte Kurve muß also als Funktion von $\frac{\omega}{\omega_0}$ möglichst flach verlaufen, obwohl man die Resonanz des ersten Terms unter der Wurzel nicht verhindern kann. Dies kann man nur durch geeignete Wahl des Parameters ε erreichen und auf verschiedene Arten begründen.

1. Für $\omega = 0$ hat die Funktion den Wert 1. Ist $\omega = \omega_0$, kann die Funktion ebenfalls gleich 1 sein, wenn $\varepsilon = \frac{1}{2}$ gesetzt wird. Wählen wir jetzt $\frac{\omega}{\omega_0} = x$, so haben wir ein Minimum des Nenners $1 - x^2 + x^4$ für $x^2 = \frac{1}{2}$ und einen Maximalwert der Funktion, der $\frac{2}{\sqrt{3}} = 1{,}2$ beträgt. Dies ist die Kurve $\varepsilon = \frac{1}{2}$, die in Abb. 314 dargestellt ist.

2. Ist ω nahezu Null, so steht unter der Wurzel

$$1 - (2 - 4\varepsilon^2)x^2 + x^4.$$

Die Kurve verläuft längere Zeit tangential zur Horizontalen für kleine x, wenn $2 - 4\varepsilon^2 = 0$ oder $\varepsilon = \frac{1}{\sqrt{2}}$ ist. Für diesen Wert ergibt sich die Funktion zu $F = \frac{1}{\sqrt{2}}$ für $\omega = \omega_0$.

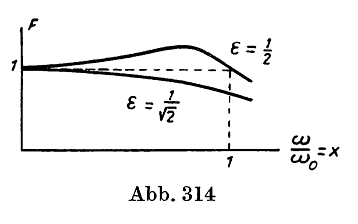


Abb. 314

Aus diesen beiden Kurven sieht man, daß bei einer Wahl von ε zwischen 0,5 und 0,7 die Funktion bis $\omega = \omega_0$ und etwas darüber hinaus einigermaßen flach verläuft. Es ergibt sich also, daß bei einer ausreichenden Dämpfung die Forderung $\omega^2 \ll \frac{K}{I}$ nicht mehr notwendig ist und der Frequenzbereich, in dem das Instrument verwendbar ist, wesentlich verbreitert wird.

Nach einem anderen Prinzip arbeitet das Galvanometer nach DUBOIS mit einer beweglichen magnetischen Scheibe (Abb. 315). Ein permanenter Hufeisenmagnet NS ist mit Polschuhen aus Weicheisen ausgerüstet, um die Windungen gelegt sind, in denen der zu untersuchende Strom fließt. Dieser Strom ruft eine Veränderung des Kraftflusses hervor und damit eine veränderliche Anziehung der kleinen magnetischen Scheibe, die durch eine Feder zurückgezogen wird und sich um die Achse dreht. Ein Spiegel von einigen Millimetern Größe vervollständigt den beweglichen Teil der Anordnung. Der Apparat wird außerdem durch eine in Öl befindliche Scheibe gedämpft. Die Eigenfrequenz einer solchen Anordnung liegt im allgemeinen bei 2500 Hertz, kann jedoch bei entsprechender Dämpfung auf 3000 Hertz erhöht werden. Dieses Instrument ist bedeutend empfindlicher als der betrachtete Oszillograph nach BLONDEL. Man erreicht eine Ablenkung des Lichtstrahles um 1 cm bei 1 m Entfernung durch einen Strom von 1 mA.

Wir wollen hier nur noch kurz die von ABRAHAM verwendete Apparatur, den *Rheographen*, die wegen der Eleganz ihrer Lösung bemerkenswert ist, in der Praxis

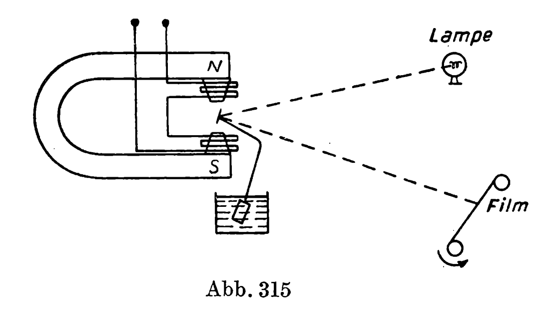


Abb. 315

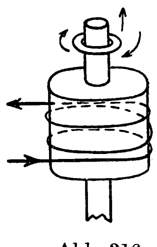
jedoch nicht mehr verwendet wird, erwähnen. In der Gleichung (1) wird $\Theta = F(t)$ gesetzt. Die nur approximativ geltende Gleichung wird durch die zweiten Glieder $f \cdot \frac{dF(t)}{dt}$ und $I \frac{d^2F(t)}{dt^2}$ ergänzt. Wir erhalten nun eine Gleichung, die es gestattet, die Lösung $\Theta = F(t)$ genau anzugeben. Man gibt also dem Term $I \frac{d^2\Theta}{dt^2}$ ein sehr starkes Übergewicht (indem man das Trägheitsmoment der beweglichen Anordnung vergrößert), wie es auch bei niedrigen Frequenzen der Fall ist. Man schickt den Strom $F(t)$ über zwei Verzweigungen in das Instrument. Diesen Aufbau kann man mit einem Transformator vergleichen. Eleganter wird dieses Problem heute durch Trioden gelöst (siehe Kapitel „Anwendung von Trioden-Röhren").

In der Praxis ist dieser Rheograph jedoch ungeeignet, da der erforderliche Aufwand weit über den der üblichen Instrumente hinausgeht.

Induzierte Ströme, Transformatoren

Bei der Untersuchung der Anwendungsmöglichkeiten von Transformatoren und Wechselstrommotoren ist eine ausführlichere Betrachtung der induzierten Ströme notwendig. Ein in einem Stromkreis C fließender Wechselstrom i erzeugt in einem zweiten Stromkreis C' einen veränderlichen Fluß. Dieser letztere stellt eine elek-

tromotorische Induktionsspannung dar, die einen großen oder einen geringen Wert besitzen kann, je nachdem, ob der Stromkreis C' aus vielen oder wenigen Windungen besteht. Diese Tatsache bildet das Prinzip einer neuen Apparatur, des *Transformators*, der beim Gleichstrom kein Analogon besitzt (siehe weiter unten).


Abb. 316

Ist der Stromkreis C' geschlossen, so wird er von einem Wechselstrom i' mit der gleichen Frequenz wie i durchflossen. Zwischen den vom Strom i und den von i' durchflossenen Windungen treten elektrodynamische Kräfte auf. Dies kann man durch das bekannte Experiment von ELIHU THOMSON leicht nachweisen (Abb. 316). Der Stromkreis C wird dabei von einer Spule, durch die als Kern eine Weicheisenachse gezogen ist, gebildet. Der Stromkreis C' besteht aus einem einfachen Kupferring, der auf dem Ende des Weicheisenstabes sitzt. Läßt man jetzt in der Spule einen Wechselstrom fließen, so wird der Kupferring heftig abgestoßen.

Unter der Wirkung der elektromotorischen Wechselspannung E fließt ein Strom i, so daß

$$E = L \frac{di}{dt}$$

ist, und im Kupferring C' tritt eine elektromotorische Kraft $-M \frac{di}{dt}$ auf, die gegen E um π phasenverschoben ist. Im Ring C' ist der Widerstand R_1 vernachlässigbar, und die Selbstinduktion L_1 gibt nahezu den gesamten Blindwiderstand. (Diese Selbstinduktion ist durch den Weicheisenkern recht bedeutend.) Wir erhalten also einen Strom i', der der Formel

$$-M \frac{di}{dt} = L_1 \frac{di'}{dt}$$

genügt. Es ist also $\frac{di'}{dt}$ gegen E, d.h. gegen $\frac{di}{dt}$, um π phasenverschoben. In jedem Augenblick ist also i' proportional zu i, fließt jedoch in entgegengesetzter Richtung. Da sich zwei parallele Ströme, die in entgegengesetzter Richtung fließen, abstoßen, kann man so leicht das Experiment von THOMSON erklären. (Dabei darf man nicht vergessen, daß sich nach jeder Periode die Stromrichtungen ändern.)

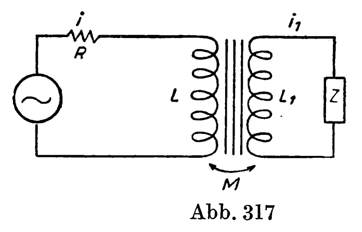


Abb. 317

Die von dem sich entfernenden Stromkreis C' geleistete Arbeit entspricht den Veränderungen, die durch die Anwesenheit des Kupferringes C' auf den Stromkreis C ausgeübt werden, d.h. der gegenseitigen Induktion.

In dem *Transformator* (Abb. 317) ist der Stromkreis C', ebenso wie C, fest angeordnet. An die „Primärwicklung" C wird eine sinusförmige Spannung gelegt, die Sekundärwicklung C' wird mit einem Scheinwiderstand Z_1 belastet. L und L_1 sind die Selbstinduktionen der beiden Spulen, und M ist die gegenseitige Induktion. Mit i bezeichnen wir den Primärstrom und mit i_1 den Sekundärstrom. Wir betrachten den Widerstand der Primärwicklung, wie es auch im allgemeinen der Fall

ist, als relativ klein. Man macht dann folgende fundamentale Feststellung, die Aussagen über das Funktionieren eines Transformators, seine Berechnung und seine Dimensionierung (die wir später betrachten wollen) gestattet:

Für eine gegebene elektromotorische Wechselspannung E im Primärkreis ist die Amplitude B der Induktionsveränderung konstant, welches auch die Leistung der Sekundärwicklung sei. Dies gilt nur, wenn der Widerstand der Primärwicklung 0 *und angenähert, wenn er klein ist.*

Man erhält also für den Induktionsfluß im Primärkreis

$$E = \frac{d\Phi}{dt}.$$

Dabei ist $\Phi = nBF$, wenn n die Anzahl der Windungen und F ihr Querschnitt ist.

Nehmen wir an, daß die Sekundärwicklung nicht über einen Scheinwiderstand geschlossen ist, dann fließt kein Strom i_1. Bezeichnen wir nun mit i_0 den Wert des Primärstromes, so erhalten wir in diesem Falle

$$\Phi = L i_0 \left(= \frac{E}{j\omega}\right);$$

L ist dabei die Selbstinduktion des Primärkreises und sehr groß. Den geringen Strom i_0, der dann genügt, um eine Induktion zu erzeugen, nennt man *Magnetisierungsstrom.*

Wenn wir nun annehmen, daß im Sekundärkreis ein Strom i_1 verbraucht wird, dann ändert sich der Ausdruck für den Fluß, und es gilt

$$\Phi = Li + Mi_1 = Li_0 = \frac{E}{j\omega}.$$

Daraus folgt, daß

$$\frac{i - i_0}{i_1} = -\frac{M}{L}.$$

Dies besagt, daß der zusätzliche (über Li_0 hinausgehende) von i hervorgerufene Kraftfluß $L(i - i_0)$ durch den aus Mi_1 resultierenden, in entgegengesetzter Richtung verlaufenden Kraftfluß aufgehoben wird.

Die nun folgenden Rechnungen werden diese Beziehungen nur auf den Fall ausdehnen und präzisieren, daß der Widerstand des Primär- und der des Sekundärkreises nicht vernachlässigbar sind. Es gilt dann

$$E = Ri + L\frac{di}{dt} + M\frac{di_1}{dt}$$

für den Primärkreis und

$$-M\frac{di}{dt} = L_1\frac{di_1}{dt} + Z_1 i_1$$

für den Sekundärkreis. Dies wird man aus Symmetriegründen in folgender Form darstellen:

$$M\frac{di}{dt} + L_1\frac{di_1}{dt} + Z_1 i_1 = 0.$$

Die Ströme i und i_1 stellen sich also als durch den Koeffizienten der gegenseitigen Induktion M, der in beiden Gleichungen auftritt, gekoppelt heraus. Diese Gleichungen lösen wir, um i_1 als Funktion von E darzustellen. Für sinusförmige Änderungen gilt dann

$$E \to E_0 e^{j\omega t}, \quad \frac{d}{dt} \to j\omega,$$

$$(jL_1\omega + Z_1)\, i_1 = -jM\omega i.$$

Daraus folgt

$$E = \left[\frac{(R + jL\omega)(jL_1\omega + Z_1)}{-jM\omega} + jM\omega\right] i_1,$$

und es ergibt sich

$$E = -\left[j\,\frac{(LL_1 - M^2)\,\omega}{M} + \frac{L}{M} Z_1 + R\,\frac{L_1}{M} + \frac{R}{jM\omega} Z_1\right] i_1. \tag{2}$$

Der in der Sekundärwicklung fließende Strom kann also als von der Spannung E herrührend angesehen werden, die in den fiktiven Scheinwiderständen direkt verbraucht wird. Diese bestehen aus folgenden Teilen:

1. dem Widerstand R, multipliziert mit dem dimensionslosen Ausdruck $\frac{L_1}{M}$,
2. dem Scheinwiderstand Z_1, multipliziert mit dem dimensionslosen Ausdruck $\frac{L}{M}$,
3. der Selbstinduktion $\frac{LL_1 - M^2}{M}$, der sogenannten Streuinduktion,
4. einem kleinen Scheinwiderstand $\frac{R}{jM\omega} Z_1$, den wir vernachlässigen werden, da $R \ll M\omega$ ist.

Diese Terme können je nach dem Vorzeichen von M positiv oder negativ sein. Das Vorzeichen von M kann durch entsprechende Umpolung der Klemmen der Sekundärwicklung verändert werden.

Im allgemeinen benutzt man Transformatoren, um eine maximale Energie von einer Stromquelle E in den Sekundärkreis zu übertragen. Zu diesem Zweck gibt man dem Scheinwiderstand Z_1, so weit irgend möglich, den Charakter eines reinen Widerstandes, damit sein Blindwiderstand den fließenden Strom nicht begrenzt. Enthält Z_1 jedoch eine in Reihe geschaltete Selbstinduktion, so wird man z. B. eine Kapazität C_1 hinzufügen, so daß

$$\left(jL_1\omega + \frac{1}{jC_1\omega}\right) = 0$$

gilt.

$\frac{L}{M} \cdot Z_1$ und $R\frac{L}{M}$ haben dann den Charakter *rein Ohmscher Widerstände*, und es braucht nur der Einfluß der Streuinduktion $\frac{LL_1 - M^2}{M}$ ausgeglichen zu werden, die eine Erniedrigung des Sekundärstromes hervorruft. Um dies zu erreichen, muß gelten

$$LL_1 - M^2 = 0.$$

Berechnen wir die Selbstinduktionen L, L_1 und die gegenseitige Induktion M, indem wir die Theorie der magnetischen Kreise anwenden, so finden wir für den

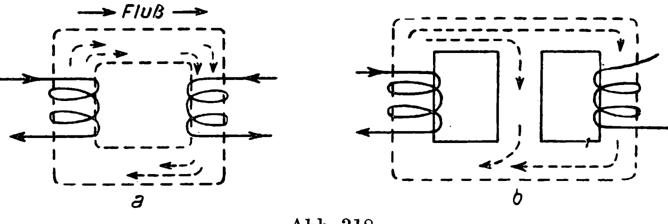


Abb. 318

Fall, daß der *gesamte Kraftfluß durch beide Stromkreise* hindurchtritt (Teil IV, Kapitel I) (siehe Abb. 318a):

$$L = \mu \frac{4\,\pi n^2 F}{l},$$

$$L_1 = \mu \frac{4\,\pi n_1^2 F}{l}, \qquad (3)$$

$$M = \pm \mu \frac{4\,\pi n n_1 F}{l}$$

in elektromagnetischen Einheiten. Dabei sind n und n_1 die Windungsanzahlen der Primär- und der Sekundärspule. Aus diesen Ausdrücken ergibt sich $LL_1 - M^2 = 0$.

Betrachten wir jedoch den in Abb. 318b dargestellten Fall, so sehen wir, daß nicht der gesamte vom Stromkreis (1) ausgehende Kraftfluß durch den Stromkreis (2) fließt und umgekehrt. Es tritt also eine schwächere gegenseitige Induktion als im Fall 318a ein. Bei den in Abb. 319 dargestellten Verhältnissen, wo ein Teil des Kraftflusses nur durch einige Windungen der Spule tritt, macht sich auch eine Abnahme der Selbstinduktionen L und L_1 bemerkbar.

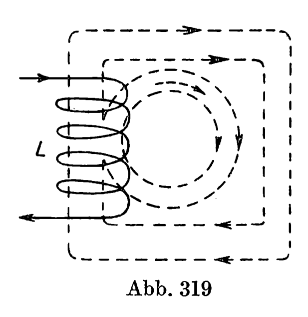


Abb. 319

Um der idealen Bedingung $M^2 = LL_1$ nahezukommen, verwendet man, wenigstens bei niedrigen Frequenzen (immer in Hinblick auf die in der Industrie üblichen Frequenzen) einen „magnetischen Kreis", der aus einem Weicheisengestell besteht. Dann verfügt man über eine hohe Permeabilität und dadurch nehmen L, L_1 und M ebenfalls sehr hohe Werte an. Durch die Brechung der Induktionslinien verlaufen diese praktisch im Inneren des Eisens und gestatten, der Bedingung $LL_1 = M^2$ möglichst nahezukommen. Tatsächlich liegt die Größe $\frac{LL_1 - M^2}{M}$ nur in der Größenordnung einiger Hundertstel des Wertes von M und bei sehr gut durchkonstruierten Transformatoren nur in der Größe einiger Tausendstel.

Wir wollen jetzt einen solchen quasiidealen Transformator annehmen und kehren zu der Gleichung (2) zurück, wobei L, L_1 und M durch (3) gegeben sind. Wir sehen, daß der Ausdruck $\frac{L}{M}$ den Wert $\frac{n}{n_1}$, während $\frac{L_1}{M}$ den Wert $\frac{n_1}{n}$ annimmt. Wenn wir nun mit $\lambda = \frac{n_1}{n}$ das Übersetzungsverhältnis des Transformators bezeichnen, können wir Gleichung (2) in folgender Form darstellen:

$$E = \left(\frac{Z_1}{\lambda} + \lambda R\right) i_1$$

oder

$$\lambda E = (Z_1 + \lambda^2 R) i_1 .$$

Die Vorgänge verlaufen also so, als ob im Scheinwiderstand Z_1 ein Strom i fließt, der von einer Spannungsquelle herrührt, die λmal größer als die reelle Spannungsquelle des Primärkreises ist, und mit Z_1 ein Widerstand R (allgemeiner: der Scheinwiderstand des Primärkreises ohne Selbstinduktion L) in Reihe läge, der mit dem Quadrat des Übersetzungsverhältnisses multipliziert wird.

Diese sehr wichtige Regel erlaubt uns das Verständnis aller Anwendungsmöglichkeiten von Transformatoren. Handelt es sich um eine Streuinduktion $\frac{LL_1 - M^2}{M}$, so gilt diese Regel ebenfalls, man muß jedoch zu $\frac{R L_1}{M} = \lambda R$ einen Scheinwiderstand $j \lambda \frac{LL_1 - M^2}{M} \omega$ hinzufügen. Wir wollen jetzt die Größe $\frac{LL_1 - M^2}{M}$ in den Sekundärkreis einführen. Dann beträgt der Widerstand dort $\lambda^2 R$. Diese Streuinduktion $\frac{LL_1 - M^2}{M}$ macht sich durch den Scheinwiderstand

$$j \lambda \frac{L_1 L - M^2}{M} \omega$$

bemerkbar. Da

$$\frac{M}{\lambda} = L,$$

können wir

$$j \frac{LL_1 - M^2}{L} \omega$$

und

$$j \left[L_1 - \frac{M^2}{L}\right] \omega$$

schreiben. Diese Selbstinduktion ist immer nur ein geringer Bruchteil der Selbstinduktion der Sekundärwicklung L_1.

Unbelasteter Transformator

Wenn der Sekundärkreis eines Transformators „offen" ist, so fließt kein Strom i_1. Der Strom i ist dann durch den Ausdruck

$$E = Ri + L \frac{di}{dt}$$

gegeben. Der Scheinwiderstand $jL\omega$ ist sehr groß, und *der Leerlaufstrom, der durch den Primärkreis des Transformators fließt, ist sehr klein.*

Wir könnten nun den Wirkungsgrad eines Transformators messen, indem wir den Bruchteil der Primärleistung, der in R verbraucht wird, und den, der tatsächlich in den Sekundärkreis übertragen wird, gegenüberstellen. Wir fänden dabei einen ausgezeichneten *Wirkungsgrad.* In der Praxis führt jedoch das Eisen des Kernes zu weiteren Verlusten, z.B. durch den JOULEschen Effekt im Transformator. Wir wollen die technische Beschreibung der Transformatoren so lange zurückstellen, bis wir in der Lage sind, diese Verluste (Hysteresis und FOUCAULTsche Ströme) zu berechnen.

Umkehrbarkeit eines Transformators

Ist das Übersetzungsverhältnis des Transformators $\frac{n_1}{n} = 10$, so wirkt am Scheinwiderstand Z_1 eine 10mal so hohe Spannung wie die Speisespannung E. Wenn Z_1 ein großer Scheinwiderstand ist, können wir dadurch, daß die Stromstärke, die hier fließt, mit 10 multipliziert wird, der Stromquelle eine 100mal größere Leistung (Realteil von $Z_1 i^2$) für den Verbrauch entnehmen. Nehmen wir dagegen an, daß Z_1 ein nur kleiner Scheinwiderstand sei, so können wir ihn wegen der Kurzschlußgefahr nicht mit den Klemmen der Stromquelle verbinden. Kehren wir jetzt unseren Transformator um und benutzen die Sekundärwicklung als Primärwicklung, so liegt an Z_1 die Spannung $\frac{E}{10}$. Wir können dann nur den 100. Teil der Leistung entnehmen, die beim Kurzschluß auftritt. Der Transformator ist also *umkehrbar.*

Kompensationsmöglichkeiten für die Streuinduktion $\frac{LL_1 - M^2}{M}$

Macht sich diese Streuinduktion sehr störend bemerkbar, so kann man sie „kompensieren“ (Abb. 320), indem man eine sehr große Kapazität C_0 in Reihe (oder eine Kapazität C_1 parallel) legt, so daß die Resonanz

$$jL_0\omega + \frac{1}{jC_0\omega} = 0$$

auftritt.

Leistungsmäßig entspricht dies einem Anstieg des $\cos\varphi$ auf den Wert 1.

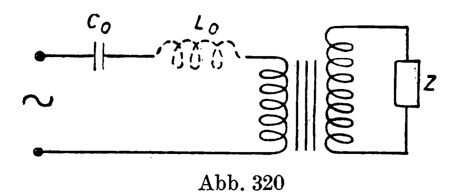


Abb. 320

Verteilung des Wechselstroms im Inneren eines zylindrischen Leiters. Skin-Effekt (Lord Kelvin)

Der Durchgang von Wechselstrom durch einen Leiter wird durch die vom Wechselfeld induzierten Ströme beeinflußt. Das Feld selbst wird vom Strom erzeugt. Die Situation ist also so kompliziert, daß es lohnt, sie genauer zu untersuchen.

Der Strom fließt in Längsrichtung (Abb. 321), und der Stromvektor ist in jedem Punkt zur Achse des Leiters parallel. Mit $\mathfrak{i}$ bezeichnen wir die Stromdichte. Die Beziehung

$$\mathfrak{i} = \sigma \mathfrak{E}$$

zeigt, daß das gleiche für $\mathfrak{E}$ gilt (σ ist die Leitfähigkeit).

Abb. 321

1. Wir werden zeigen, daß die Verteilung von E in einem Querschnitt des Leiters nicht gleichförmig sein kann. Betrachten wir das Rechteck $l dr$, das einen Teil des durch die Achse verlaufenden Längsquerschnittes darstellt. Die Kraftlinien des durch den Strom hervorgerufenen magnetischen Feldes verlaufen um die Achse (axiale Symmetrie) und ergeben einen Kraftfluß durch die Fläche $l dr$. Dieser Fluß hat den Wert

$$\mu\, l dr\, H = \mu\, l dr \frac{2}{r} \int_0^r i\, 2\pi r dr .$$

Der Wert von H beträgt $\frac{2i}{r}$; i ist dabei der Gesamtstrom, der in dem Kreis mit dem Radius r fließt. H und i sind periodische Funktionen. Daher ergibt sich eine elektromotorische Induktionsspannung

$$e = -\mu\, l dr \frac{\partial H}{\partial t},$$

aus der ein Stromfluß im Kreis $ABCD$ resultiert. Wenn $E(r)$ das elektrische (Längs-)Feld im Abstand r von der Achse darstellt, so ruft es keine elektromotorische Kraft längs AD oder BC hervor. Die elektromotorische Kraft e, die nach dem Induktionsgesetz auftritt, kann nur durch eine Differenz des elektrischen Feldes zwischen AB und CD erklärt werden. Man wird also den Ausdruck erhalten

$$e = -l\,[E(r + dr) - E(r)] = -\frac{\partial E}{\partial r}\, l dr .$$

Abb. 322

In dem in Abb. 322 dargestellten Fall steigt der Strom i, der von D nach C fließt, im Zeitpunkt t an, und der nach rechts gerichtete Induktionsstrom durch $ABCD$ wächst ebenfalls. Die Lenzsche Regel führt uns also auf eine elektromotorische Kraft, die den Stromfluß in Richtung $ABCD$ bewirkt. Dies bedeutet, daß das Feld $E(r + dr)$ größer als das Feld $E(r)$ ist.

Das elektrische Feld und damit die Stromdichte wachsen vom Zentrum zur Peripherie des Leiters hin an.[1]) Man kann sich leicht davon überzeugen, daß dieses Gesetz in allen Fällen gilt.

Aus der Beziehung

$$e = -\mu\, l\, dr \frac{\partial H}{\partial t}$$

oder aus

$$\frac{\partial E}{\partial r} = \mu \frac{\partial H}{\partial t}$$

kann man noch eine andere Schlußfolgerung ziehen: Die auftretende elektromotorische Kraft e ist zum Feld H phasenverschoben, also zum Strom i, der im Inneren des Kreises mit dem Radius r fließt. Da e indessen in Phase mit der örtlichen Stromdichte i ist, findet man *eine Veränderung der Phase von E als Funktion des Radius.*

Um $E(r, t)$ vollständig zu bestimmen, genügt es, in der zuletzt gefundenen Gleichung das Feld H als Funktion von i darzustellen und $i = \sigma E$ zu setzen. Wir erhalten

$$H = \frac{2}{r} \int_0^r i\, 2\pi\, r\, dr$$

und folglich durch die Ableitung nach t

$$\frac{\partial E}{\partial r} = \frac{2\mu}{r} \int_0^r \frac{\partial i}{\partial t}\, 2\pi\, r\, dr = \frac{2\mu\sigma}{r} \int_0^r \frac{\partial E}{\partial t}\, 2\pi\, r\, dr$$

oder durch die Ableitung nach r

$$\frac{\partial}{\partial r}\left(r \frac{\partial E}{\partial r}\right) = 4\pi\,\mu\,\sigma\, r \left(\frac{\partial E}{\partial t}\right).$$

Berücksichtigen wir, daß $\frac{\partial}{\partial t} \rightarrow j\,\omega$, so erhalten wir

$$\frac{\partial^2 E}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial E}{\partial r} - 4\pi\, j\,\mu\,\omega\,\sigma\, E = 0.$$

Diese letzte Gleichung gestattet uns, die Veränderungen von E als Funktion des Abstandes von der Achse darzustellen. Die gleiche Formel gilt auch für i, da der Strom in jedem Punkt der Feldstärke E proportional ist. Da einer der Koeffizienten dieser Gleichung imaginär ist, so ist auch die Abhängigkeit $E(r)$ imaginär. Dies erklärt, warum sich die Phase von E mit der Entfernung von der Achse verändert.

---

[1]) Eine gleichförmige Verteilung von longitudinalen Strömen in einem zylindrischen Körper ruft im Innern kein magnetisches Feld hervor, erzeugt aber außerhalb das gleiche Magnetfeld, als wäre der gesamte Strom auf der Achse konzentriert.

Die vorstehende Gleichung ist eine BESSELsche Differentialgleichung. Setzt man

$$k^2 = -4\pi j \omega \mu \sigma$$

oder

$$k = (1 - j) \sqrt{2\pi \sigma \mu \omega},$$

so besitzt sie die unabhängigen linearen Lösungen $J_0(kr)$, $N_0(kr)$, die BESSELsche Funktionen erster und zweiter Art darstellen. Die vollständige Lösung erhält man durch folgende Betrachtungen: Zuerst stellt man fest, daß $N_0(kr)$ für $r = 0$ unendlich wird, was physikalisch unmöglich ist. Die Lösung enthält also nur $J_0(kr)$ mit einem Proportionalitätsfaktor A. Um diesen zu bestimmen, betrachtet man den Gesamtstrom I und setzt

$$\int_0^r i\, 2\pi\, r\, dr = \pi r^2 I.$$

Der Faktor A ist also bestimmt, und die endgültige Lösung $J_1(kr)$ stellt eine BESSELsche Funktion 1. Ordnung dar:

$$\frac{i}{I} = \frac{2j\omega\mu\sigma J_0(kr)}{k r_0 J_1(kr)}.$$

Dabei ist r_0 der äußere Radius des Leiters.

Wir werden uns mit diesem Resultat nicht weiter beschäftigen, da wir die Theorie der BESSELschen Funktionen nicht entwickelt haben; wir wollen nur das Resultat qualitativ beschreiben (siehe Abb. 321).

Je stärker der Parameter k anwächst, d. h., je größer die Frequenz ω wird und je größer μ und σ sind, um so stärker macht sich die Verringerung der Stromdichte mit zunehmender Eindringtiefe bemerkbar. Die maximale Stromdichte liegt an der Peripherie des Leiters. Dies ist als der sogenannte *Skin-Effekt* oder die *Hautwirkung* (Lord KELVIN) bekannt. Bei hohen Frequenzen ω können wir sogar eine (oder mehrere) Richtungsumkehrungen beim Fortschreiten gegen die Achse bemerken.

Kennen wir dieses Resultat, so können wir eine Näherung angeben, wenn die Eindringtiefe des Stromes klein gegenüber dem Leiterradius ist. In diesem Fall ist $\frac{1}{r}\frac{\partial E}{\partial r}$ vernachlässigbar gegenüber $\frac{\partial^2 E}{\partial r^2}$. Die Veränderung von E mit r kann dann durch die Gleichung

$$\frac{\partial^2 E}{\partial r^2} - 4\pi j \omega\sigma\mu E = 0$$

ausgedrückt werden. Setzen wir

$$\beta = \sqrt{2\pi \sigma \mu \omega},$$

so ergibt die Integration

$$E = E_0\, e^{-\beta(r_0 - r) - j\beta(r_0 - r)}.$$

Dabei ist der Term ausgeschlossen, der ein unendliches Feld ergeben würde. Der Imaginärteil im Exponenten zeigt an, daß sich die Phase von E mit der Entfernung von der Oberfläche verändert; der Realteil führt auf den Skin-Effekt mit

einer räumlichen Konstanten (als Analogon zur Zeitkonstanten) oder einer Dicke, in der der Strom auf den Bruchteil $1/e$ seines Oberflächenwertes abgefallen ist. Diese Dicke beträgt in kohärenten Einheiten

$$\delta = \frac{1}{\beta} = \frac{1}{\sqrt{2\pi\mu\sigma\omega}}.$$

Man nennt sie *Eindringtiefe* oder Hautdicke. Sie ist so groß, daß in ihr der Gesamtstrom mit der auf der Oberfläche vorhandenen (maximalen) Stromdichte fließen kann.

Wir geben hier einige Werte von δ für *Kupfer* an, die entsprechenden Werte für *Aluminium* liegen um etwa 25% höher. (Diese Werte haben nur einen physikalischen Sinn, wenn $r_0 \gg \delta$.) Bei *Eisen* müssen die angegebenen Zahlen durch $\sqrt{\mu}$, d.h. durch ungefähr 30 bis 40, dividiert werden.

$\frac{\omega}{2\pi} =$	50	100	10^3	10^4	10^5	10^6	10^7 Hz
$\delta =$	43,4	30,7	9,7	3,07	0,97	0,307	0,097 mm

Der von einer solchen Stromverteilung durchflossene Leiter (Draht) stellt einen gewissen Scheinwiderstand dar. Ist die relative Verteilung der Stromfäden bekannt, so kann der Widerstand des Leiters berechnet werden, ebenso die Selbstinduktion mit Hilfe seiner reziproken potentiellen Energie.

Eine genaue Theorie erfordert die Berücksichtigung der tatsächlichen Stromfädenverteilung. Bei einer angenäherten genügt es, den Strom in der Eindringtiefe δ konzentriert anzunehmen. Die Berechnung des Widerstandes für diesen Fall ist dann einfach. An Stelle des stromdurchflossenen Querschnittes πr_0^2 erhält man jetzt $2\pi r_0 \delta$, und man hat

$$R = R_0 \frac{\pi r_0^2}{2\pi r_0 \delta} = R_0 \frac{r_0}{2\delta}.$$

Dabei ist R_0 der Gleichstromwiderstand. Zur Berechnung der Selbstinduktion ist nach den auf Seite 195 dargestellten Prinzipien die Energie im Raum

$$\iiint \frac{H^2}{8\pi}\, dv$$

zu berechnen (dv ist das Volumenelement) und mit $\frac{1}{2} L i^2$ gleichzusetzen.

In der gebräuchlichen Form geben wir die genauen Resultate als Reihenentwicklung nach

$$X = \frac{r_0}{2}\sqrt{2\pi\omega\sigma\mu}$$

an, wobei ω die Kreisfrequenz ist und σ und μ in elektromagnetischen Einheiten zu nehmen sind.

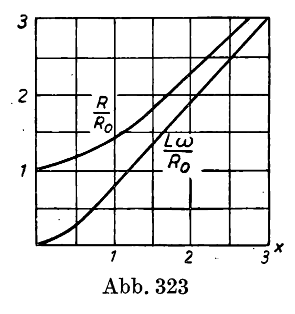


Abb. 323

1. Für $X \ll 1$ gilt

$$\frac{R}{R_0} = 1 + \frac{X^4}{3} \cdots; \qquad \frac{L\omega}{R_0} = X^2 \left(1 - \frac{X^4}{6}\right) \cdots.$$

2. Für $X \gg 1$ gilt

$$\frac{R}{R_0} = X + \frac{1}{4} + \frac{3}{64\,X} \cdots,$$

$$\frac{L\omega}{R_0} = X - \frac{3}{64\,X} + \frac{3}{128\,X^2} \cdots.$$

Wir finden also einen Widerstand, der mit der Frequenz anwächst, und eine Selbstinduktion, die von dem Gleichstromwert verschieden ist (Abb. 323).

Empirische Formel von A. Levasseur

Diese Formel lautet

$$\frac{R}{R_0} = \frac{1}{4} + \sqrt[6]{\left(\frac{3}{4}\right)^6 + V^6},$$

wobei

$$V = \frac{F}{p\,\delta};$$

F = Querschnitt, p = Umfang des Querschnittes, δ = Eindringtiefe, die, zwar nur angenähert, durch

$$\delta = \frac{1}{\sqrt{2\pi\,\mu\,\sigma\,\omega}}$$

gegeben ist.

Diese Formel ergibt Werte, die auf wenigstens 1% genau sind, gleichgültig, um welchen Drahtdurchmesser, welche Frequenzen und welches Material es sich handelt.

Man kann jedoch sehr gut empirisch eine Dicke ε_1 bestimmen, so z. B. für einen zylindrischen Leiter mit dem Radius a:

$$\frac{R}{R_0} = \frac{\pi\,a^2}{\pi\,a^2 - \pi(a - \varepsilon_1)^2},$$

woraus sich

$$\varepsilon_1 = a\left(1 - \sqrt{1 - \frac{R_0}{R}}\right)$$

ergibt.

Verwandte Probleme

Analoge Gleichungen zu denen des Skin-Effektes gestatten die Untersuchung der Verluste, die in Leitern durch induzierte Ströme auftreten. Betrachten wir als Beispiel eine Spule, die auf einen zylindrischen Leiter gewickelt ist (Abb. 324).

Das bei Wechselstrom veränderliche Axialfeld des Solenoids induziert Ströme, deren Richtungen durch die LENZsche Regel gegeben sind und die man leicht berechnen kann. Die Erwärmung des Leiters wird durch das JOULEsche Gesetz bestimmt, und man erhält einen sogenannten *Induktionsofen,* wie er seit etwa dreißig Jahren in der Industrie angewandt wird.

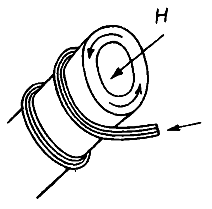


Abb. 324

FOUCAULTsche Ströme

In den vorstehenden Paragraphen ergab sich, daß die in den Leitern induzierten Ströme eine elektromotorische Induktionsspannung verursachten, die die elektromotorische Kraft um so mehr schwächte, je weiter man sich von der Oberfläche des Leiters entfernte. Im allgemeinen machen sich diese induzierten Ströme *störend* bemerkbar (mit der einzigen Ausnahme der Motoren mit Drehfeld und bei Anordnungen mit elektrodynamischer Dämpfung). Betrachten wir z.B. den magnetischen Kreis eines Transformators (Abb. 325). In dem Eisen des Transformators existieren Stromkreise, wie sie in Abb. 325 durch (1) dargestellt werden, und bilden sogenannte Kurzschlußwindungen. In diesen Windungen fließen beträchtliche Stromstärken i, die entsprechende JOULEsche Verluste zeigen und eine unerwünschte Erwärmung zur Folge haben. Dadurch wird der Wirkungsgrad der Energieübertragung in den Sekundärkreis herabgesetzt.

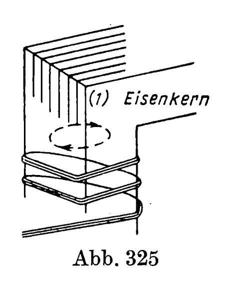


Abb. 325

Man kann eine beträchtliche Verringerung dieses Effektes erreichen, indem man den Transformatorenkern aus einzelnen dünnen Blechen oder, wenn der Kern nicht geschlossen ist, aus zylindrischen Stäben zusammensetzt (zum Beispiel der Kern der Induktionsspule).

Führen wir jetzt die Berechnung für die Stäbe in Abb. 326 unter der Wirkung einer wechselnden longitudinalen Induktion durch.

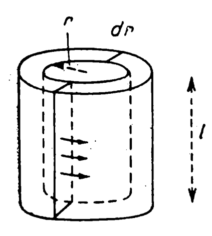


Abb. 326

Wir betrachten die im Inneren eines Stabes zwischen r und $r + dr$ liegende Schicht. Dabei ist die in Richtung des Umfanges auftretende elektromotorische Kraft gegeben zu

$$e = -\pi r^2 \frac{dB}{dt},$$

wobei

$$B = \mu H$$

die Induktion im Stab ist.

Die Länge der leitenden Röhre sei l, ihr Radius r, ihre Dicke dr; dann ist der Widerstand für Ströme, die längs des Umfanges fließen, gegeben zu

$$R = \varrho \frac{2\pi r}{l\,dr}.$$

Dabei ist ϱ der spezifische Widerstand des Eisens.

Die in diesem Leiter pro Sekunde freiwerdende Wärmemenge beträgt

$$d W = R i^2 = \frac{e^2}{R} = \frac{\pi^2 r^4}{\left(\frac{2\pi r \varrho}{l\, dr}\right)} \left(\frac{dB}{dt}\right)^2 = \pi r^3 \frac{l}{2\varrho} \left(\frac{dB}{dt}\right)^2 dr$$

und in dem gesamten Stab mit dem Radius a:

$$W = \int_0^a d W = \frac{\pi a^4 l}{8\varrho} \left(\frac{dB}{dt}\right)^2.$$

Wählen wir jetzt einen Kern mit dem Querschnitt F, der aus einem Bündel von gleichen Stäben besteht, so ist die Anzahl dieser Stäbe gleich $\frac{F}{\pi a^2}$ (wenn wir unter F nur den Eisenquerschnitt verstehen). $F \cdot l$ ergibt dann das Volumen des Kerns, und wir erhalten den Wert der pro Kubikzentimeter in der Zeiteinheit freiwerdenden Wärme zu

$$W = \frac{a^2}{8\varrho} \left(\frac{dB}{dt}\right)^2.$$

Daraus ergeben sich folgende Gesetze: W wird kleiner, wenn der Widerstand des Metalls zunimmt, und nimmt weiterhin ab mit dem Quadrat des Radius der den Kern bildenden Elemente (z. B. nimmt W bei Blechen mit dem Quadrat der Blechstärke ab). Außerdem ist W proportional $\left(\frac{dB}{dt}\right)^2$. Im Bereich sinusförmiger Wechselströme *nimmt W bei maximaler gegebener Induktion mit dem Quadrat der Frequenz zu.*

Besteht der Kern aus Blechen mit der Dicke e (bei industriellen Transformatoren), so sind die pro Kubikzentimeter auftretenden, durch FOUCAULTsche Ströme verursachten Verluste durch die folgende, sich aus einer nicht komplizierten Rechnung ergebende Formel in Watt gegeben zu

$$14{,}6\, e^2 n^2 B^2 \cdot 10^{-12};$$

n ist dabei die Frequenz des Stromes. Als Leitfähigkeit der Bleche ist die von Weicheisen gewählt und B in Gauß angenommen.

Andere als durch FOUCAULTsche Ströme hervorgerufene Verluste sind die *Hysteresisverluste im Eisen.* Auch diese Verluste führen zum Freiwerden von Wärme und wiederholen sich in jeder Stromperiode. Um die Hysteresis zu berechnen, haben wir bereits alle Elemente angegeben:

$$\text{Verluste pro Zyklus} = V \int J\, dH.$$

Im allgemeinen wendet man hier eine Faustformel an:

$$W_{\text{Hyst}} = \eta B^{1,6} n \cdot 10^{-7}\ \text{Watt},$$

in der η der STEINMETZsche Koeffizient ist und B in Gauß gemessen wird.

Diese Betrachtung gestattet uns, die Beschreibung des Transformators zu vervollständigen und ihn selbst zu berechnen.

Der magnetische Kreis, d.h. der Kern, besteht im allgemeinen aus Blechen von einigen Millimetern bis zu 0,5 mm Dicke. Für kleine Transformatoren bei 50 Hz verwendet man 0,3 bis 0,1 mm starke Bleche, und bei Telephonströmen bis zu 0,03 mm starke. Man benutzt für Transformatoren Weicheisenbleche und bevorzugt dabei *Siliziumbleche* mit einem Siliziumgehalt von 4%, da diese einen sehr kleinen STEINMETZ-Koeffizienten ($\eta = 0{,}001$) besitzen und ihr spezifischer Widerstand ϱ 3mal größer als bei gewöhnlichen Blechen ist (dadurch werden die FOUCAULTschen und die Hysteresisverluste vermindert). Die freiwerdende Wärme wird durch die Oberfläche abgegeben (Wärmestrahlung und Konvektion). Um keine übermäßige Erwärmung zu erhalten, muß der Transformator so dimensioniert sein, daß nicht mehr als 5 bis 6 Watt pro dm^2 abgegeben werden. Bei sehr starker Erwärmung kann man den Transformator mit Hilfe von Luft- oder Ölströmen durch seinen Innenraum kühlen.

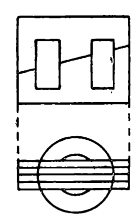


Abb. 327

Man verwendet das Öl außerdem wegen der sehr wichtigen Isolierung zwischen den einzelnen Windungsschichten. Diese Isolierung verhindert bei hohen Spannungen Durchschläge zwischen den Windungen. Vor dem Zusammenfügen des Kerns werden die einzelnen Bleche, die üblicherweise ausgeglüht sind, oxydiert oder gelackt, damit sie untereinander isoliert sind und FOUCAULTsche Ströme möglichst vermieden werden, obwohl die Bleche einander berühren.

Zum Aufbau des Kerns müssen die Bleche, bei vorgegebener Spule, wie in Abb. 327 gezeigt wird, in zwei einander komplementären Teilen hergestellt werden. Sie werden in das Innere des Körpers eingeschoben, auf den die Spule gewickelt ist, und durch eine äußere Befestigung zusammengehalten.

Die besten Transformatoren erreichen für Gebrauch bei den in der Industrie üblichen Frequenzen einen Wirkungsgrad von 92 bis 95%, während die kleineren noch sehr unbefriedigend in dieser Hinsicht sind.

Bemerkung: Siehe auch im folgenden Kapitel: Mehrphasentransformatoren.

Magnetische Kreise aus Sintereisen

Eine Konstruktion des magnetischen Kreises aus kolloidalen Eisenpartikeln (deren einzelner Durchmesser kleiner als 2μ sein kann) mit einem Bindemittel (z.B. Bakelit) gestattet, die FOUCAULTschen Ströme auch bei den höchsten in der Telephonie üblichen Frequenzen auf eine vernachlässigbar kleine Größe zu vermindern. Man findet auch bei dieser Konstruktionsart eine Verringerung der Hysteresisverluste. Unglücklicherweise verringert sich jedoch bei diesem Eisen die mittlere Permeabilität stark. Man stellt solche Materialien mit einem Wert von μ bis zu 80 her und verwendet sie z.B. zur Konstruktion PUPINscher Spulen (Einschaltspulen für Telephoniekreise zur Vergrößerung der Selbstinduktion und Verbesserung der Ausbreitung; dabei muß die Kreisgüte dieser Spulen selbstverständlich sehr hoch sein). Andere Sintereisen, bei denen μ die Werte 4 bis 8 nicht übersteigt, finden als Bandfilterkerne Verwendung und können bei Frequenzen bis $4 \cdot 10^5$ oder sogar 10^6 Hz benutzt werden.

Autotransformatoren

Autotransformator nennt man einen Aufbau, bei dem die Primärwicklung (Spannung U_1) und Sekundärwicklung (Spannung U_2) in Reihe liegen. Zweck dieser Anordnung ist eine höhere Gesamtsekundärspannung. Dies hat allerdings den Nachteil, daß Primär- und Sekundärwicklung eine „gemeinsame Anzapfung" besitzen (Abb. 328).

In schematischen Darstellungen stellt man Transformatoren mit Eisenkern durch ihre Wicklungen dar, zu denen man parallele Striche als Symbol der einzelnen Bleche zufügt.

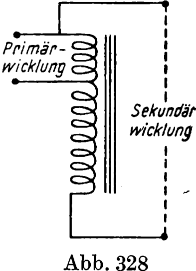


Abb. 328

Bemerkungen über die praktische Berechnung von Transformatoren

Einerseits ist es wichtig, die Verluste möglichst gering zu halten (also viel Eisen mit einer geringen Induktion), andererseits müssen natürlich Wirtschaftlichkeit und Preisgestaltung berücksichtigt werden. Im allgemeinen legt man zuerst die Induktion im Eisen oder vielmehr ihren Spitzenwert bei jeder Periode fest: $B = 7000$ Gauß, wenn man einen guten Wirkungsgrad erreichen will, $B = 10000$ Gauß, wenn man an Größe und Gewicht gewinnen muß und die nahezu doppelten Verluste in Kauf nehmen kann, und $B = 12000$–14000 Gauß, wenn man den Sättigungseffekt des Eisens zur Spannungsstabilisierung im Sekundärkreis ausnutzen will (mit zunehmender Netzspannung wächst B weniger als proportional wegen der Verluste, und die Sekundärspannung, die sich mit $\frac{dB}{dt}$ verändert, ist stabiler). Den magnetischen Kreis bestimmt man durch die folgenden Betrachtungen: Der Verwendungszweck des Transformators ist bekannt, man kennt also die Leistung, die die Sekundärspule liefern muß, und ebenso die Spannung. Die Anzahl der Windungen wird als Funktion des Querschnittes des magnetischen Kreises durch das Gesetz

$$E = -\frac{d\Phi}{dt}$$

bestimmt, und der Durchmesser des Kupfer- bzw. Aluminiumdrahtes ergibt sich daraus (im allgemeinen belastet màn Kupferwicklungen bis zu 3 Amp/mm^2). Aus den vorgegebenen Bedingungen für Größe und Wirkungsgrad ergibt sich die Wahl des magnetischen Kreises. Dieser wird dadurch charakterisiert, daß die „Fenster" in den Transformatorenblechen größenordnungsmäßig die gleiche Fläche besitzen wie die „Schenkel". (Viel Eisen und wenig Kupfer führt zu großen Hysteresisverlusten, viel Kupfer und wenig Eisen führt zu großen JOULEschen Verlusten. Den besten Wirkungsgrad erreicht man nach der Faustformel: Gewicht des Eisens = Gewicht des Kupfers). Durch eine weitere Regel wird dann die Windungsanzahl der Primärwicklung als Funktion der als bekannt angenommenen Speisespannung bestimmt. Den Drahtdurchmesser der Primärwicklung wählt man nach den bekannten Belastungsregeln. In zweiter Annäherung berechnet man den Leerlaufstrom im Primärkreis, die Hysteresisverluste und die FOUCAULTschen Verluste.

Die durch die gesamte Oberfläche abgegebene Leistung darf nicht sehr groß sein. Damit die Temperaturerhöhung gering bleibt, streicht man den Transformator schwarz an, vor allem verringert man so weit nur möglich die Verlustspannungen, damit in der Primärwicklung der tatsächliche Wert der Effektivspannung auftritt.

Elektromagnetische Abschirmung

Wir betrachten eine Kupferplatte, die die Rolle eines FARADAY-Käfigs spielt und den Raum A_2 völlig gegen elektrostatische Effekte, die im Raum A_1 auftreten, abschirmt (Abb. 329). Im Bereich veränderlicher Ströme sind die Gesetze der Elektrostatik nicht mehr gültig. Die elektrischen und magnetischen Felder, die im Raum A_2 durch im Raum A_1 vorhandene Ursachen auftreten, werden dadurch sehr stark verringert. Wir wählen als Beispiel eine senkrecht zur Abschirmungswand angeordnete Spule, wie sie in Abb. 329a dargestellt ist.

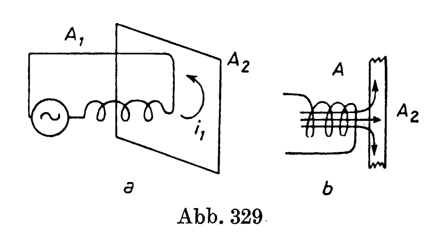


Abb. 329

Schicken wir durch diese Spule einen *Gleichstrom*, so erzeugt dieser ein konstantes Magnetfeld H, das durch die kupferne Abschirmwand nicht verändert und auch im Raum A_2 vollständig vorhanden ist. Um einen magnetostatischen Abschirmeffekt zu erreichen, muß man eine Abschirmwand aus magnetischem Metall verwenden, die sich magnetisieren wird (Abb. 329b). Handelt es sich um einen *kleinen* Magneten, so wird seine induzierte Magnetisierung das Feld in Richtung der Achse verstärken und in der dazu senkrechten Richtung verringern. Handelt es sich um eine Abschirmwand von großen Ausmaßen, so können wir annehmen, daß die Induktionslinien durch die Wand hindurchtreten und das Feld H durch diesen Effekt im Raum A_2 stark geschwächt wird. Dazu ist allerdings erforderlich, daß die Wand eine bestimmte *Dicke* besitzt und die Abschwächung dieser Dicke proportional ist. Schirmen wir z.B. die äußeren magnetischen Einwirkungen auf den Elektronenstrahl eines Kathodenstrahloszillographen ab, indem wir die Röhre mit einer Permalloyschicht umgeben, so stellen wir bei Annäherung eines Magneten an dieses Gerät fest, daß die Ablenkung mit dieser Abschirmung 15 bis 20mal geringer als ohne Abschirmung ist.

Speisen wir jetzt die Spule mit *Wechselstrom:* Die kupferne Abschirmwand besitzt eine bestimmte Wirksamkeit aus einem anderen Grund. Die in ihr induzierten zirkulierenden FOUCAULTschen Ströme haben Paralleltrajektorien zu i, die in umgekehrter Richtung zu i mit gleicher Phase (oder wenn man will, auch in entgegengesetzter Phase) fließen, da das Metall der Abschirmwand gut leitend ist (Widerstand $\ll$ Induktion). Dies ist das bekannte Experiment von ELIHU THOMSON und genau das LENZsche Gesetz. Der Strom i erzeugt ein nahezu gleichstarkes Feld H, das dem ursprünglichen Feld entgegenwirkt. Das veränderliche Magnetfeld wird dann in A_2 fast völlig aufgehoben. Für das Auftreten dieses Effektes genügt eine bestimmte minimale Dicke der Kupferwand. Einerseits erhält man jedoch bereits bei einer sehr geringen Wandstärke einen sehr starken Abschirmungseffekt, außerdem konzentriert bei zunehmender Wandstärke der Skin-Effekt den Strom

in der Oberflächenschicht, und man gewinnt nichts durch die Vergrößerung der Wandstärke.

Diese Betrachtungen müssen durch die Untersuchung der sogenannten elektrostatischen Kopplung ergänzt werden. Diese kann zwischen Schwingkreisen im Raum A_1 und solchen im Raum A_2 auftreten. Zwischen den Spulen (Abb. 330) L_1 und L_2 existiert eine gewisse elektrostatische Kapazität C, wenn keine Abschirmung vorhanden ist. Eine Potentialveränderung am Ende der Spule L_1 induziert in L_2 Ladungen und verursacht einen Strom, wenn sich diese Potentialveränderung über eine längere Zeit erstreckt (besonders, wenn es sich um eine periodische Potentialänderung handelt). Vom Standpunkt der Theorie der Stromkreise muß dieser Strom „durch“ die Kapazität geflossen sein.

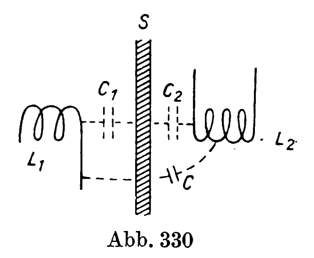


Abb. 330

Bringen wir jetzt die Abschirmwand S an, so ist dieser Strom unterbrochen, und die Kapazität C existiert in elektrostatischer Hinsicht nicht mehr. Sie ist jedoch durch eine Kapazität C_1 zwischen L_1 und der Abschirmwand S ersetzt. Durch die Potentialveränderungen zwischen L_1 und S werden auf der Oberfläche von S Ladungsbewegungen hervorgerufen. Durch diese Ladungsbewegungen treten nach dem OHMschen Gesetz Potentialdifferenzen zwischen den verschiedenen Punkten von S auf, durch die in der Abschirmwand und auf ihrer anderen Seite Ströme erzeugt werden. Auf der anderen Seite der Abschirmwand treten in L_2 durch die Kapazität C_2 zwischen S und L_2 auf elektrostatischem Wege induzierte Ströme auf. Dieser Effekt würde sich nicht zeigen, wenn die Gesetze der Elektrostatik gelten und wenn das Feld im Inneren des Leiters S Null wäre. Bei Wechselstrom ist dies jedoch nicht mehr vollkommen exakt.

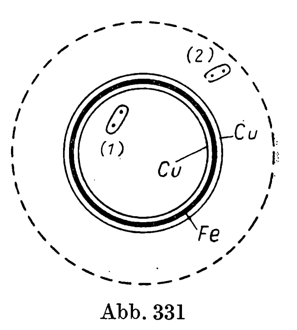


Abb. 331

Bei niedrigen Frequenzen und bei solchen, wie sie in der Radiotechnik auftreten, ist jedoch die elektrostatische Kopplung bei einer guten Abschirmung unter diesen Bedingungen völlig vernachlässigbar. Nur bei sehr hohen Frequenzen spielt die Ausbreitung von Phänomenen aus dem Raum A_1 in den Raum A_2 eine Rolle. Die Veränderung des Feldes H ruft ein veränderliches und reziprokes elektrisches Feld hervor, so daß man nicht mehr zwischen elektrischen und magnetischen Kopplungen unterscheiden kann.

Eine Anwendung dieser verschiedenen Betrachtungen ist sehr wichtig: Das ist die Abschirmung der verschiedenen Adern (1) und (2) eines Telephonkabels (Abb. 331). Die Kopplung zwischen (1) und (2) ist sehr gering, da

1. jeder Draht der beiden Stromkreise von Strömen in entgegengesetzter Richtung durchflossen wird,

2. die einzelnen Drähtepaare miteinander verdrillt sind. Dadurch wird das Vorzeichen der Kopplung umgekehrt. Dies wiederholt sich periodisch über die ganze Länge.

Es verbleibt nur eine geringe Restkopplung, die es möglich macht, ein Gespräch von einer benachbarten Leitung zu übertragen (Diaphonie). Um dies ebenfalls auszuschließen, bringt man zwischen den Drähtepaaren Abschirmungen an. Diese Abschirmungen müssen im gesamten verwendeten Frequenzbereich wirksam sein (Sprechfrequenzen und Trägerfrequenzen). Sie werden im allgemeinen aus dünnen Blechen (0,3 bis 0,5 mm) aus Kupfer und Permalloy hergestellt und so angebracht, daß eine Anordnung Kupfer-Eisen-Kupfer, die sich als am zweckmäßigsten herausgestellt hat, vorhanden ist. Diese spezielle kostspielige Abschirmung wird jedoch nur bei Telephonkabeln verwendet, die zur Gesprächsübertragung über weite Entfernungen benutzt werden und bei denen starke Dämpfungen auftreten, die durch Zwischenverstärker behoben werden müssen.

Minensuchgeräte

Das Problem des Auffindens von (10 bis 20 cm tief) in die Erde vergrabenen Minen, die durch das Gewicht von Panzern, Tieren oder Menschen zur Explosion gebracht werden sollen, führt uns noch einmal die Kenntnisse vor Augen, die wir im Laufe dieses Kapitels erworben haben. Eine brauchbare Anordnung eines solchen Minensuchgerätes besteht aus einem Oszillator, der eine Drahtschleife mit niederfrequentem Strom (1000 Hz) speist. Zwei fest mit dem Sender gekoppelte Empfänger, die einander entgegengeschaltet werden, sind mit einem Verstärker verbunden. Solange die Anordnung symmetrisch ist, gibt der Verstärker kein Signal. Die Mine jedoch, wenn sie *metallisch* ist (nicht notwendig aus Eisen) oder wenn sie irgendwelche kleinen Metallteile enthält (im allgemeinen besteht der Zünder aus Stahl und genügt bereits zum Nachweis), führt zu einer gegenseitigen Induktion M mit dem Empfänger, die nicht Null ist. Besteht zwischen Mine und der Senderschleife eine gegenseitige Induktion M, so fließen in der Mine FOUCAULTsche Ströme, die im Empfänger ein Signal verursachen.

Ein großer Nachteil ist allerdings, daß auch die immer mehr oder weniger leitende Erde ein Signal verursacht.

Dies ist das Hauptproblem bei dieser Frage. An seiner Lösung wird in der ganzen Welt gearbeitet.

Die Bodenbeschaffenheit ist übrigens bei der Suche völlig unbedeutend, da man sogar Löcher und Steine, d. h. selbst dielektrische Minen mit guten Geräten, nachweisen kann. Man ist heute bereits in der Lage, mit handlichen Geräten Minen in 30 bis 40 cm Tiefe mit einiger Sicherheit zu finden.

III. KAPITEL

Wechselstrom (Fortsetzung)

Mehrphasenströme. Drehfelder. Wechselstromumformer. Motore. Anwendungen

Mehrphasenströme

Sternschaltung

Wir betrachten ein System von n sinusförmigen Wechselströmen gleicher Amplitude, die gegeneinander um $\frac{2\pi}{n}$ phasenverschoben sind. Ihre Anordnung bildet ein System von Mehrphasenströmen. So gibt z. B. $n = 3$ ein Dreiphasensystem, und für $n = 4$ ergibt sich

$$(1) = i_0 \cos \omega t; \quad (2) = i_0 \sin \omega t; \quad (3) = -i_0 \cos \omega t; \quad (4) = -i_0 \sin \omega t.$$

Wir erhalten also praktisch *zwei* um $\frac{\pi}{2}$ phasenverschobene Ströme, die einmal in der einen und einmal in der anderen Richtung fließen; daher rührt die im täglichen Gebrauch übliche, aber schlechte Bezeichnung Zweiphasenströme an Stelle Vierphasenströme.

Diese Stromsysteme besitzen verschiedene interessante Eigenschaften:

1. Die Summe aller Ströme des Systems ist Null, da

$$\cos \omega t + \cos\left(\omega t + \frac{2\pi}{n}\right) + \cdots + \cos\left(\omega t + \frac{2\pi(n-1)}{n}\right)$$

identisch Null ist. Dies kann man besonders am Dreiphasensystem nachweisen. Daraus folgt: wenn die Ströme von gleichen Geräten (mit gleichem Leistungsverbrauch und gleichem Leistungsfaktor) aufgenommen werden, so sind die austretenden Ströme ebenso wie die sie hervorrufenden Spannungen mehrphasig, und *Rückleitungen zu den verschiedenen Generatoren sind überflüssig*. Man kann also über den Punkt P z. B. verschiedene Stromkreise belasten. Dies ist die (natürlich auch für Generatoren anwendbare) *Sternschaltung* (Abb. 332). Es ist also im allgemeinen nur nötig, n Drähte an Stelle von $2n$ Drähten bei Mehrphasenschaltung zu benutzen. Für einen Zweiphasenstrom, der ja in Wirklichkeit einen 4-Phasenstrom darstellt, benötigt man also tatsächlich nur 4 Drähte und erreicht eine beträchtliche Einsparung. Dabei braucht zwischen den Scheinwiderständen der Verbraucher R_1, R_2 und R_3 und entsprechend zwischen den Amplituden oder Phasen der Ströme kein Gleichgewicht vorhanden zu sein. Die Summe $i_1 + i_2 + i_3$ ist dann nicht

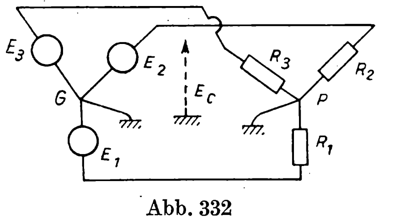
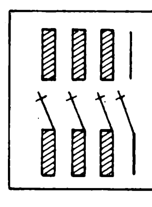


Abb. 332

immer Null, und es muß eine Rückführungsleitung von P nach G vorgesehen werden. Durch diesen Draht fließt jedoch nur ein geringer Teil des Gesamtstromes i_1 in einem der vorhandenen Stromkreise. Sein Durchmesser kann entsprechend dünner gewählt werden, wodurch die Kosten sinken. Aus diesem Grunde enthalten die Schalttafeln der Elektrizitätswerke (Abb. 333), die ihre Abnehmer mit Dreiphasenstrom beliefern, drei starke stromführende und eine schwächere Zuleitung (dies ist die Rückleitung oder der *Nulleiter*). Aus dem gleichen Grunde fordern die Elektrizitätswerke ihre Abnehmer ständig auf, größere Leistungen aus einer Phase, d.h. zwischen Phase und Nulleiter, zu entnehmen. Sie wünschen, daß man zwischen den Phasen 1 und 2, 2 und 3, 3 und 1 ungefähr gleiche Leistungen entnimmt, da sonst im Draht GP unerwünschte Verluste entstehen.


Abb. 333

Untersuchen wir jetzt, welche Spannungen zwischen den einzelnen Klemmen einer solchen Schalttafel liegen. Der Generator E_1 besitzt zwischen seinen Klemmen eine Spannung $U_0 \sin\omega t$ oder $\sqrt{2}\, U_{\text{eff}} \sin\omega t$. Wir nehmen U_{eff} zu 110 V an und bilden aus drei gleichen Generatoren, von denen einer gegen den anderen um $2\pi/3$ phasenverschoben sei, eine Sternschaltung. Zwischen 0 und 1, 0 und 2 sowie 0 und 3 finden wir natürlich 110 V_{eff}, zwischen 1 und 2 jedoch liegt

$$U_2 - U_1 = U_2 - U_0 - (U_1 - U_0) = \sqrt{2} \cdot 110 \left[\sin\omega t - \sin\left(\omega t + \frac{2\pi}{3}\right)\right].$$

Verschieben wir den zeitlichen Ursprung, dann erhalten wir

$$\sqrt{2} \cdot 110 \left[\sin\left(\omega t + \frac{\pi}{3}\right) - \sin\left(\omega t - \frac{\pi}{3}\right)\right] = \sqrt{2} \cdot 110 \cdot 2\sin\frac{\pi}{3}\cos\omega t$$

oder, mit anderen Worten, eine Wechselspannung gleicher Frequenz, jedoch einem anderen Effektivwert:

$$110 \cdot 2 \cdot \sin\frac{\pi}{3} = \sqrt{3} \cdot 110 = 190\,\text{Volt}.$$

Die Verbraucherapparaturen, die zwischen den Phasen liegen (Motoren, Lampen usw.), müssen für 190 V *ausgelegt werden, während für solche, die zwischen Phase und Nulleiter liegen,* 110 V-*Auslegung genügt.* Oft entnehmen die Verteilerstationen den Kraftstrom zwischen zwei Phasen und den Beleuchtungsstrom zwischen Phase und Nulleiter. Man beabsichtigt, indem man in benachbarten Häusern verschiedene Phasen benutzt, ein Gleichgewicht herzustellen und allen Phasen etwa die gleiche Leistung zu entnehmen.

Dreieckschaltung

Die Tatsache, daß man auf den Nulleiter in einem im Gleichgewicht befindlichen Mehrphasensystem verzichten kann, führt uns auf die Möglichkeit der in Abb. 334 dargestellten Dreieckschaltung, die sowohl für Verbraucher als auch für Generatoren gültig ist.

Die von Generatoren mit Dreieckschaltung gelieferten Ströme besitzen eine Stromstärke I. Die vektorielle Darstellung der Ströme zeigt außerdem, daß die effektive Stromstärke in den Seiten des Dreiecks $\sqrt{3} \cdot i_{\text{eff}}$ beträgt.

Das gleiche Resultat erhält man, indem man, von

$$i_1 = A \sin \omega t, \quad i_2 = A \sin\left(\omega t + \frac{2\pi}{3}\right)$$

ausgehend, z.B. $i_2 - i_1$ berechnet.

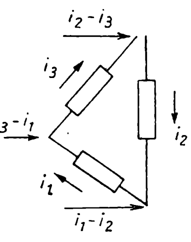


Abb. 334

Drehfelder

Die industrielle Bedeutung der Mehrphasenströme liegt in der Möglichkeit, Drehfelder herzustellen.

Der im Jahre 1826 von ARAGO entdeckte Effekt des *Pseudomagnetismus der Rotation* zeigt sich in folgendem Experiment: Wir bringen eine Kupferscheibe über einer Magnetnadel an. Wird diese Kupferscheibe in Rotationsbewegung versetzt, so zeigt die Magnetnadel einen Ausschlag. Drehen wir dagegen die Magnetnadel, so folgt die Kupferscheibe. Die Erklärung dieses Phänomens ergibt sich leicht aus der Elektronentheorie (in beiden Fällen handelt es sich um FOUCAULTsche Ströme, die die relative Bewegung hervorrufen, und um die LAPLACEwirkung eines Feldes auf diese Ströme). Die Annahme, es handele sich um einen Rotationsmagnetismus, ist ein Trugschluß. Dieses Experiment zeigt uns jedoch die Möglichkeit der Konstruktion von Asynchronmotoren (siehe weiter unten).

Ein umlaufendes Magnetfeld kann man durch feste Spulen erzeugen: In zwei gegeneinander um 90° versetzten Spulen läßt man die beiden Komponenten eines Zweiphasenstromes fließen. Dann erhält man folgendes (Abb. 335): H_x verändert sich mit $\cos \omega t$, H_y mit $\cos\left(\omega t - \frac{\pi}{2}\right)$. *Das resultierende Feld ist in seiner Größe konstant und gleich der Amplitude jedes der Wechselfelder. Seine Richtung schließt mit* Ox *den Winkel* $\varphi = \omega t$ *ein und rotiert mit der konstanten Winkelgeschwindigkeit* ω.

Die gleichen Verhältnisse finden wir bei einem Dreiphasenstrom wieder. Wenn wir durch drei um $\frac{2\pi}{3}$ gegeneinander verschobene Spulen die entsprechenden Ströme

$$i_1' = I \cos \omega t,$$

$$i_2' = I \cos\left(\omega t - \frac{2\pi}{3}\right),$$

$$i_3' = I \cos\left(\omega t + \frac{2\pi}{3}\right)$$

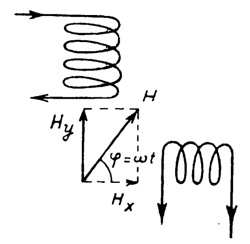


Abb. 335

schicken, erhalten wir ein konstantes Feld, das 1,5mal so groß wie die Amplitude jedes Wechselfeldes ist und mit der Winkelgeschwindigkeit ω rotiert.

Alle Mehrphasenströme erlauben es, mit festen Spulen umlaufende Felder mit konstanter Amplitude zu erzeugen, die bei jeder Periode des Stromes einen Umlauf zeigen.

Wirkung eines umlaufenden Feldes auf einen Magneten

Im Punkt O existiere ein umlaufendes Feld der Größe H, welches mit Ox den Winkel $\omega_0 t$ einschließe. Wir nehmen an, daß um die gleiche Achse ein Magnet mit dem magnetischen Moment M rotiere, der mit Ox den Winkel $\omega t - \varphi$ bildet.

Das von H auf den Magneten ausgeübte Drehmoment hat dann den Wert

$$D = MH \sin \sphericalangle M_1 H = MH \sin [(\omega_0 - \omega) t + \varphi].$$

Ist $\omega \neq \omega_0$, so ist das Drehmoment im Mittel Null. Für $\omega = \omega_0$ ist es konstant und hat den Wert $MH \sin\varphi$, ist also positiv, wenn φ zwischen 0 und π liegt, und kann durch ein Widerstandsmoment D_0 kompensiert werden, wenn dieses kleiner als der Maximalwert MH ist.

Erteilt man einem Magneten die synchrone Winkelgeschwindigkeit ω_0 und läßt ihn gegen ein Widerstandsmoment $D_0 < MH$ Arbeit verrichten, so wird dieser Magnet durch ein mit der Geschwindigkeit ω_0 umlaufendes Feld H in Rotation versetzt und zwar so, daß er gegen das Feld eine konstante Phasennacheilung φ besitzt; $\sin\varphi$ *ist durch den Ausdruck D_0/MH gegeben. Die so beschriebene Anordnung ist ein Synchronmotor.*

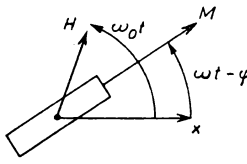


Abb. 336

Wir finden also zwei Werte für φ, von denen der unterhalb $\pi/2$ liegende Wert stabil ist, da bei einer Vergrößerung der Phasennacheilung $\sin\varphi$ anwächst und ein Moment

$$MH \sin\varphi > D_0$$

hervorruft, das den Magneten beschleunigt und daher die Phasennacheilung verringert. Der Wert größer als $\pi/2$ ist aus Symmetriegründen instabil. Wird schließlich D_0 größer, so geht $\sin\varphi$ gegen 1, wenn $D_0 = MH$ ist. In diesem Augenblick „kuppelt der Motor aus", die Rotationsgeschwindigkeit des Magneten verringert sich, er arretiert sich und ist höchstens noch einer Vibration unterworfen.

Mehrphasige, durch die Bewegung eines Magneten induzierte elektromotorische Kräfte

Betrachten wir einen sich drehenden Motor, so ruft der Magnet Kraftflußänderungen, d.h. elektromagnetische Kräfte, in jeder der festen Spulen hervor. Diese elektromagnetischen Kräfte sind infolge der gegebenen geometrischen Anordnung mehrphasig. In jeder Spule tritt also die Gegen-EMK des Motors auf, die nötig ist, um elektrische in mechanische Energie mit einem Wirkungsgrad 1 zu transformieren. Es handelt sich also um den gleichen allgemeinen Fall, wie er im Kapitel „Induktion" dargestellt wurde, mit dem einzigen Unterschied, daß der Stromkreis l fest ist und daß sich die Kraftlinien des Feldes jetzt bewegen. Schalten wir nun den den Motor speisenden Mehrphasenstrom ab, lassen jedoch den Magneten weiterhin mit der Geschwindigkeit ω rotieren, so treten die gleichen elektromotorischen Kräfte auf, und wir erhalten einen Mehrphasenstromgenerator. In den Stromkreisen der verschiedenen Spulen lassen diese elektromotorischen Kräfte mehrphasige Ströme fließen, die ein Feld H in jeder Spule erzeugen. Daraus ergibt sich ein Widerstandsmoment $MH \sin\varphi$, wobei in diesem Fall φ wegen des Lenzschen

Gesetzes negativ sein muß. Der Magnet ist gegenüber dem von ihm erzeugten umlaufenden Feld phasenverschoben.

Die eben beschriebene Anordnung stellt einen *Wechselstromgenerator* dar.

Kurze Beschreibung der technischen Wechselstrommaschinen

1. *Wechselstromgenerator mit beweglichem Anker*

Bringen wir den Magneten fest an und lassen die Spulenanordnung rotieren, so ändert sich an der vorhergehenden Beschreibung nichts. Wählen wir nun an Stelle der Sternschaltung eine Dreieck- oder Polygonschaltung, so erhalten wir eine Maschine, die genauso realisiert werden kann (Abb. 337).

Wir benutzen einen Dynamoanker, dessen Kollektor entfernt ist, und teilen den Anker je nach dem, ob wir Einphasen-, Dreiphasen- oder Diphasenstrom betrachten wollen, in 2, 3 oder 4 gleiche Teile, die wir mit 2, 3 oder 4 Schleifringen verbinden. Nun bringen wir an jedem der Ringe Bürsten an. Die in der Abbildung dargestellte Anordnung gilt für Dreiphasenstrom, und wir erhalten in den Verbrauchern R_1, R_2 und R_3 die mehrphasige Stromverteilung. In der Abbildung ist zur Vereinfachung der Anker als GRAMMEscher Ring dargestellt, während er tatsächlich als Trommelanker ausgebildet ist.

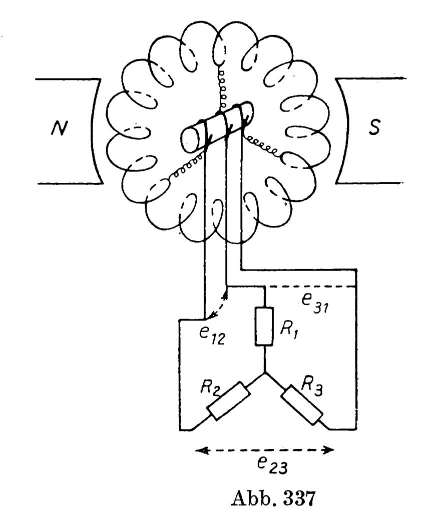


Abb. 337

Die auftretenden elektromotorischen Kräfte kann man leicht berechnen. Wir wollen diese Berechnung für den Fall des Dreiphasenstroms vornehmen. Die Kraftflüsse in den mit den Ringen verbundenen Windungen betragen zur Zeit t

$$\Phi_1 = \Phi_0 \cos \omega t; \quad \Phi_2 = \Phi_0 \cos\left(\omega t + \frac{2\pi}{3}\right), \quad \Phi_3 = \Phi_0 \cos\left(\omega t + \frac{4\pi}{3}\right).$$

Dabei ist Φ_0 der Maximalfluß in einer Windung. Die gesamte elektromotorische Kraft, die zwischen den Ringen 1 und 2 auftritt, beträgt (entsprechend der Formel bei den Dynamos)

$$e_{1,2} = 10^{-8} \frac{\omega}{\alpha} (\Phi_1 - \Phi_2).$$

Dabei ist α der Winkel zwischen zwei benachbarten Windungen und ω die Rotationsgeschwindigkeit. Es ist also

$$e_{1,2} = 10^{-8} \frac{\omega}{\alpha} \sqrt{3}\, \Phi_0 \sin\left(\omega t + \frac{\pi}{3}\right) = 10^{-8} \frac{\sqrt{3}}{2} N n \Phi_0 \sin\left(\omega t + \frac{\pi}{3}\right).$$

Daraus ergibt sich

$$e_{1,2} = \frac{\sqrt{3}}{2} E_0 \sin\left(\omega t + \frac{\pi}{3}\right).$$

Dies ist gerade $\frac{\sqrt{3}}{2}$ mal der elektromotorischen Kraft eines zweipoligen Dynamos, der mit dem gleichen Anker ausgerüstet ist.

Wir finden $e_{2,3}$ und $e_{1,3}$ ähnlich wie $e_{1,2}$, jedoch mit der entsprechend um $\frac{2\pi}{3}$, $\frac{4\pi}{3}$ vergrößerten Phase.

Wir haben damit (im Prinzip) einen Wechselstromgenerator in Dreieckschaltung vollständig berechnet. In der Abbildung ist diese Maschine durch eine Verbrauchersternschaltung belastet.

2. *Umformer*

Wenn wir jetzt den GRAMMEschen Ring mit einem Kollektor mit mehr Bürsten als Ringen ausrüsten, erhalten wir eine Maschine, die folgende Verwendungsmöglichkeiten bietet:

a) gewöhnlicher Nebenschlußdynamo;
b) gewöhnlicher Nebenschlußgleichstrommotor;
c) mehrphasiger synchroner Wechselstromumformer;
d) mehrphasiger Synchronmotor;
e) die Maschine kann mit Gleichstrom zwischen den Bürsten gespeist werden und liefert dann zwischen den Ringen Mehrphasenströme;
f) speist man die Maschine über die Ringe mit einem Mehrphasenstrom und synchronisiert sie wie einen Synchronmotor, so kann man an Stelle eines mechanischen Drehmomentes zwischen den Bürsten einen Gleichstrom entnehmen.

Bei den beiden Verwendungsarten e) und f) haben wir es mit einem Umformer zu tun.

Mehrphasige Stromumformer arbeiten sehr gut, während einphasige Stromumformer anfälliger sind. Der Antriebsmechanismus eines Synchronmotors wird tatsächlich durch die periodische Schwankung des Stromes außerhalb des Ankers bei jedem Passieren eines mit einer Wicklung verbundenen Ringes unter den Bürsten sehr gestört. Dadurch ergibt sich eine periodische Modulation des Bewegungsmoments, das nicht mehr als konstant angesehen werden kann und folglich eine entsprechende Modulation der elektromotorischen Kraft und damit des Stroms verursacht. Durch die auftretenden „Schwebungen" werden Schwingungen niedriger Frequenz erzeugt, die eine Synchronisation vollständig verhindern können. Im allgemeinen kann man diese Schwingungen durch elektrische Dämpfung (FOUCAULTsche Ströme) verringern. Eine solche Dämpfung ist sehr einfach durch Kurzschlußwindungen auf den Induktorpolen herzustellen. Der Durchgang des Wechselstroms durch die Wicklungen, in denen auch der Gleichstrom fließt, erschwert die Umwandlung. Es gibt für die Bürsten keine wirklich neutrale Stellung mehr, und die Rückwirkung des Ankers wird im Laufe einer Periode

moduliert (wenigstens im einphasigen Fall). Für Drei- und Sechsphasenstrom usw. konstruiert man ausgezeichnete Umformer mit sehr großer Leistung (z.B. 5000 kW), die zum Umformen von Wechselströmen in Gleichströme für die verschiedensten Anwendungsgebiete benutzt werden (als Beispiel kann man den elektrischen Bahnbetrieb anführen).

3. *Wechselstromgenerator mit festem Anker*

Bei sehr großen Anlagen verwendet man keine Wechselstrommaschinen mit beweglichem Anker mehr, da die auf den Ringen gleitenden Kontakte die Ent-

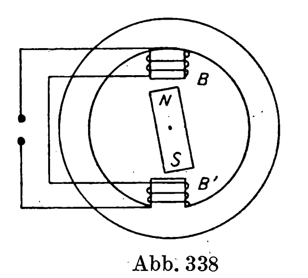


Abb. 338

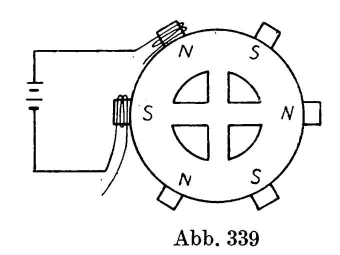


Abb. 339

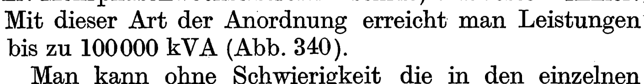
nahme sehr großer elektromotorischer Kräfte nicht gestatten. Bei Wechselstromgeneratoren mit feststehendem Anker dreht sich der Magnet zwischen festen Spulen. Dieser Magnet besteht aus einem Weicheisenkern und wird durch eine Gleichstromwicklung gespeist, die ihrerseits von einem kleinen Gleichstromdynamo, Erregermaschine genannt, versorgt wird. Es ist zweckmäßig, diesen Dynamo auf der Achse des Wechselstromumformers anzuordnen. Die Stromkreise, in denen der Strom erzeugt wird, sind also als fest anzusehen, und man kann elektromotorische Kräfte bis zu der Größenordnung von 15–20000 Volt entnehmen.

Wir wollen jetzt den in Abb. 338 dargestellten Fall betrachten. Hierbei dreht sich der Magnet NS vor einer Spule B, zu der man eine zweite Spule B' hinzufügen kann, deren Effekte sich addieren. Um eine Frequenz von 50 Hz zu erhalten, muß der Magnet mit 50 Umdrehungen pro Sekunde rotieren. Man beobachtet jedoch, daß der Strom wegen der gegebenen kleinen Ausmaße von NS und B nicht sinusförmig ist. Ordnet man p Magnete so an, daß sie voneinander gleiche Abstände besitzen, dann erhält man die gleichen Effekte, obwohl der Magnetring nur $1/p$ der Geschwindigkeit aufzuweisen braucht. In der Praxis konstruiert man ein Polrad mit $2p$ Polen, um welche man die Erregerwicklung (die mit Gleichstrom gespeist wird) so anbringt, daß abwechselnd ein Nord- und ein Südpol auftreten (Abb. 339).

Bringen wir jetzt wieder die festen Spulen B und B' an, dann erhalten wir einen Einphasenwechselstromumformer, der für $p = 3$ mit $\frac{50}{3} = 16{,}67$ Umdrehungen pro Sekunde rotiert.

An Stelle der *beiden* festen Spulen B und B' können wir jedoch leicht $2p$ Spulen symmetrisch auf dem Umfang anbringen. Jede dieser Spulen wirkt dann abwechselnd auf die einzelnen Pole. Wir können die Wicklungen der geraden und

genauso die der ungeraden Spulen in Reihe oder parallel schalten. So erhalten wir zum Beispiel, wenn die Spulen $B_1, B_2, B_3, \ldots$ entsprechend angeordnet sind, einen *einphasigen Wechselstromgenerator*. Jetzt fügen wir eine weitere Spulenserie $B_1', B_2', B_3', \ldots$ gleichmäßig ein und bringen weiterhin die Spulen $B_1'', B_2'', B_3'' \ldots$ an. Ebenso wie für die Spulen B eine, so erhalten wir jetzt drei ähnliche Einphasenwechselstromgeneratoren, die Ströme der gleichen Periode, jedoch gegeneinander um $\frac{2\pi}{3}$ phasenverschoben, erzeugen. Auf diese Weise erhalten wir einen *Dreiphasenwechselstromumformer* (allgemein: Mehrphasenwechselstrommaschine) mit festem Anker.



Mit dieser Art der Anordnung erreicht man Leistungen bis zu 100000 kVA (Abb. 340).

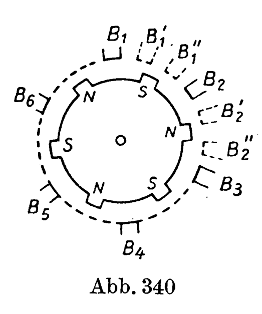


Abb. 340

Man kann ohne Schwierigkeit die in den einzelnen Stromkreisen auftretenden elektromotorischen Kräfte berechnen, wobei man einen sinusförmigen Charakter der Kraftflußänderungen annimmt. Das *Widerstandsmoment*, das entgegenwirkt und durch die Antriebsmaschine überwunden werden muß, besitzt folgende interessante Eigenschaft: Es ist während einer Periode *konstant*, da die vorher durch die Rotation des Magneten (Ankers) hervorgerufenen Mehrphasenströme, die das Widerstandsmoment erzeugen, eine Rückwirkung auf diesen Magneten durch ein konstantes umlaufendes Feld verursachen.

Untersucht man den Wirkungsgrad und die Verluste in diesen Apparaten, so stellt man fest, daß bei einer Frequenz von etwas mehr als 50 Hz die Anzahl der pro Sekunde beschriebenen Hysteresisschleifen größer ist als bei den meisten Gleichstromdynamos. Aus diesem Grunde sind aber auch die Verluste im Eisen größer (sie erreichen 2–3% der Gesamtleistung). Dagegen kann man hier allerdings die JOULEschen Verluste in den Leitern leichter begrenzen, da man bei höheren Spannungen arbeiten kann (1–2% im Anker und ungefähr das gleiche im Induktor). Durch die Verwendung von *Siliziumblechen* (die schon bei den Transformatoren besprochen wurden) werden Wirkungsgrade bis zu 98% erreicht; die der gebräuchlichen Anordnungen liegen zwischen 90 und 95%. Gut konstruierte Umformer haben noch einen etwas besseren Wirkungsgrad, da während eines Teils der Periode der Gleich- oder Wechselstrom direkt vom Ring zur Bürste (oder umgekehrt) fließt, ohne daß JOULEsche Wärme im Anker auftritt und die Eisenbleche beansprucht werden.

Der Wirkungsgrad hängt noch vom Leistungsfaktor $\cos\varphi$ *ab, obwohl* $\cos\varphi$ *keinen Wirkungsgradverlust angibt.* Nimmt $\cos\varphi$ ab, so bleiben U und i konstant. Die JOULEschen Verluste in den Leitern behalten den gleichen Wert, und die Isolatoren erwärmen sich (die Verluste sind proportional U^2), während sich die Leistung mit $\cos\varphi$ verringert. Das Verhältnis der Verluste zur Leistung kann mit $\frac{1}{\cos\varphi}$ anwachsen; $\cos\varphi$ *jedoch mißt nicht den Wirkungsgrad. Durch diese Überlegungen ergibt sich, daß ein Teil des Scheinwiderstandes den Charakter eines Blindwiderstandes besitzt.* Ein $\cos\varphi$ von 0,8 kann bei der Konstruktion solcher Maschinen bereits als gut bezeichnet werden.

4. *Wechselstromgenerator mit umlaufendem Eisenkern*

Die gleichen Effekte wie in den bereits beschriebenen Wechselstromumformern kann man erreichen, wenn man den magnetischen Widerstand des Magnetkreises veränderlich macht, ohne dabei einen der Stromkreise zu bewegen.

Abb. 341 zeigt den magnetischen Kreis mit der Erregerwicklung (Achse 00′) und den Ankerwicklungen. Bei dieser Konstruktion ist es möglich, durch Vervielfachung der Spulen und durch Erhöhung der Rotationsgeschwindigkeit hohe Frequenzen zu erzeugen. Dazu wird der Rotor von den Wicklungen befreit, die die erhöhten Zentrifugalkräfte nicht aushalten.

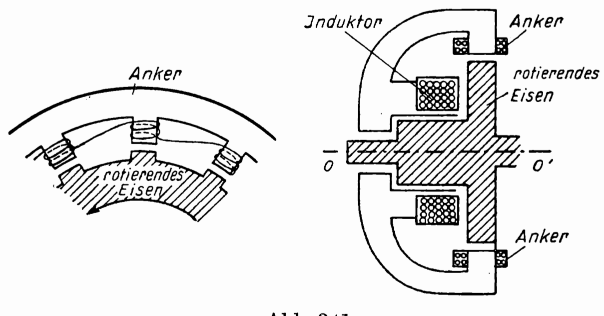


Abb. 341

Es gelang (ANDERSON in Amerika, J. BETHENOD in Frankreich), derartige Wechselstrommaschinen mit einer Leistung von 500 kW bei 20 kHz mit einem Wirkungsgrad von 60% zu konstruieren. Diese Apparate spielten bei den Anfängen der drahtlosen Telephonie (1910 – 1915) eine bedeutende Rolle, da sie Übertragungen über „lange Wellen“ gestatteten.

Wechselstrommotore

Synchronmotor

Das Prinzip des *mehrphasigen* Synchronmotors haben wir bereits erläutert, als wir die Wirkung eines umlaufenden Feldes auf einen Magneten untersuchten. Wir hatten dabei festgestellt, daß Motore und synchrone Wechselstromgeneratoren identisch sind. Ebenso kann man sich einen einphasigen Synchronmotor als einphasigen Wechselstromgenerator vorstellen. Um jedoch die Arbeitsweise zu verstehen, muß man wissen, daß ein Wechselfeld H mit konstanter Richtung

$$H = 2H_0 \cos \omega t$$

als Resultante zweier konstanter Felder H_0 dargestellt werden kann, die in entgegengesetzter Richtung mit den Geschwindigkeiten ω und $-\omega$ rotieren (Abb. 342).

Abb. 342

Betrachten wir die beiden Felder H_0' und H_0'', so erhalten wir für deren Komponenten

$$(H_0')_x = H_0 \cos\omega t; \quad (H_0'')_x = H_0 \cos\omega t\,;$$
$$(H_0')_y = H_0 \sin\omega t; \quad (H_0'')_y = -H_0 \sin\omega t.$$

Daraus folgt längs Ox ein Gesamtfeld

$$(H_0')_x + (H_0'')_x = 2H_0 \cos\omega t.$$

Lassen wir jetzt einen Magneten mit der Geschwindigkeit ω (oder $-\omega$) vor einer Spule rotieren, die das Feld $2H \cos\omega t$ erzeugt, dann tritt ein Gleichlauf mit einem der umlaufenden Felder auf. Daraus ergibt sich ein konstantes Moment. Das andere umlaufende Feld besitzt in bezug auf das erste die Geschwindigkeit $2\,\omega$, und sein mittleres Moment verschwindet. *Die Folgerungen, die auf der Existenz eines umlaufenden Feldes beruhen, gelten also auch für einen Einphasenmotor.*

Betrachten wir einen Motor, dessen Induktor durch mehrere Polpaare (n Paare) gebildet wird, so kann der in unsere theoretische Beschreibung eingeführte Winkel ψ offensichtlich nicht mehr zwischen 0 und $\frac{\pi}{2}$, sondern nur zwischen 0 und $\frac{\pi}{2\,n}$ variieren.

Ein ernsthafter Nachteil der Synchronmotore ist, daß sie nicht von allein anlaufen. Man wirft daher den Synchronmotor mit Hilfe eines kleinen Gleichstrom-anwurfmotors, eines Anlaßtransformators, einer Anlaufwicklung oder einer Hilfsphase an.

Synchronisation eines Synchronmotors

Ein solcher Motor wird durch einen Hilfsmotor angeworfen. Handelt es sich dagegen um einen Umformer, so benutzt man dazu seinen Gleichstromkreis. Man verbindet die Wechselstrompole des Motors mit den entsprechenden Polen des Stromkreises über Glühbirnen mit hohem Widerstand oder über Voltmeter. Läuft nun der Motor an, so zeigt sich an den Lampen oder den Voltmetern ein charakteristischer Ausschlag, der bei zunehmender Synchronisierung kleiner wird. Sind die Lampen dunkel (oder zeigen die Voltmeter keinen Ausschlag), so hat man einen völligen Phasengleichlauf erreicht. In diesem Moment muß der Schalter, über den der Motor direkt aus dem Wechselstromnetz gespeist wird, geschlossen werden. Lampe bzw. Voltmeter sind dann kurzgeschlossen.

Prinzip eines Asynchronmotors

Ein umlaufendes Feld H drehe sich um O mit der Geschwindigkeit ω_0 in der Zeichenebene. Um die gleiche Achse drehe sich außerdem eine Windung senkrecht zur Zeichenebene (Abb. 343). Dadurch wird ein Strom in der Windung induziert, auf den das Feld H ein Moment ausübt. Dieses Moment beschleunigt die Wicklung auf eine von ω_0 verschiedene Geschwindigkeit, die wir jetzt berechnen wollen. Es weist die gleichen charakteristischen Eigenschaften wie ein Motorenmoment auf. Das von uns im folgenden angegebene Schema ist das eines Asynchronmotors.

Es sei $\omega_0 \cdot t$ die Rotation des Feldes H, $(\omega t - \alpha)$ die der Spule mit der Fläche F. Der Fluß von H durch F ist dann gegeben durch

$$\Phi = HF \cos[(\omega_0 - \omega)\,t + \alpha].$$

Die elektromotorische Induktionsspannung in F beträgt

$$U = HF(\omega_0 - \omega)\sin[(\omega_0 - \omega)t + \alpha].$$

Sie erzeugt in der Spule mit dem Widerstand R und der Selbstinduktion L einen Strom i, dessen Maximalintensität durch

$$I = \frac{HF(\omega_0 - \omega)}{\sqrt{R^2 + L^2(\omega - \omega_0)^2}}$$

gegeben ist. Dieser Strom ist in bezug auf e um φ in der Phase zurückeilend, so daß

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{L(\omega_0 - \omega)}{R}.$$

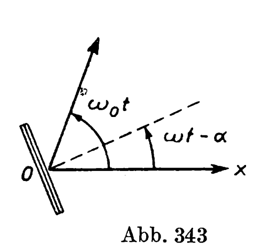


Abb. 343

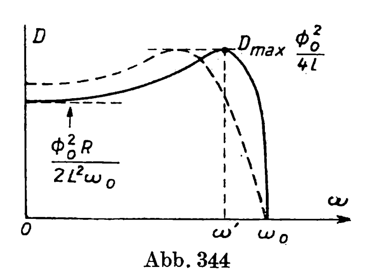


Abb. 344

Das magnetische Moment des der Windung äquivalenten Magneten beträgt

$$\mathfrak{M} = \mathfrak{F}\,\mathfrak{i}.$$

Dabei übt H auf M ein Drehmoment

$$D = FIH\sin[(\omega_0 - \omega)t + \alpha]\sin[(\omega_0 - \omega)t + \alpha - \varphi]$$

aus, da

$$i = I\sin[(\omega_0 - \omega)t + \alpha - \varphi]$$

ist.

Der zeitliche Mittelwert dieses Momentes ist von Null verschieden und gegeben zu

$$\overline{D} = \overline{FiH\sin\Theta\sin(\Theta - \varphi)} = \frac{FIH}{2}\cos\varphi = \frac{1}{2}\cdot\frac{\Phi_0^2 R(\omega_0 - \omega)}{R^2 + L^2(\omega_0 - \omega)^2},$$

wenn man

$$\Phi_0 = HF$$

setzt. Θ ist dabei der Winkel zwischen Feldrichtung und der Normalen zu F und beträgt

$$\Theta = (\omega_0 - \omega)t + \alpha.$$

Dabei stellt man fest, daß bei Veränderung von ω_0 dieses Moment einen Maximalwert durchläuft, der gegeben zu

$$\frac{\Phi_0^2}{4L}$$

und von R unabhängig ist (Abb. 344).

Dieses Moment ist positiv für $\omega < \omega_0$ (Motor) und für $\omega = 0$ nicht gleich Null.

Bei einem Asynchronmotor existiert also vom Anlaufen bis zum Stillstand ein Drehmoment. Daher läuft ein Asynchronmotor mit umlaufendem Feld von selbst an.

Weiterhin sieht man, daß *das Anlaufmoment anwächst, wenn man R vergrößert* (gestrichelte Linie in der Abbildung gibt den Verlauf von D bei größerem R an). Vernachlässigt man $R \ll L\omega_0$, so erhält man für das Anlaufmoment tatsächlich

$$D_0 = \frac{\Phi_0^2}{2} \cdot \frac{R}{L^2 \omega_0}.$$

Die kurzgeschlossene Windung wird in der Praxis durch axiale Kupferstäbe gebildet, die durch zwei Kupferringe verbunden sind (Käfigankermotor oder Kurzschlußläufer). Eine Eigenschaft des Asynchronmotors ist es, daß sich ω stets auf einen kleineren Wert als ω_0 einstellt.

Man kann auch *einphasige* Asynchronmotore konstruieren, die jedoch sehr verschieden von den mehrphasigen sind. Wie wir gesehen haben, handelt es sich bei diesen um zwei im entgegengesetzten Sinne umlaufende Felder. Ist der Motor einmal angeworfen, so läuft er weiter wegen der Differenz der beiden Drehmomente, deren eines im Verhältnis zu $\omega_0 - \omega$ groß und deren anderes klein (praktisch vernachlässigbar) gegen $\omega_0 + \omega$ ist. Beim Anlaufen selbst sind jedoch beide Momente gleich groß. Der Einphasenmotor besitzt kein Anlaufmoment. Es ist nicht nötig, ihn zu synchronisieren, er muß daher angeworfen werden.

Stabilität. Betrachten wir ein gegebenes Bremsmoment kleiner als $\frac{\Phi_0^2}{4L}$. Die Geschwindigkeit ω_0 nimmt zu, wenn das Anlaufmoment größer ist als das Widerstandsmoment (man kann dies langsam anlegen, z. B. durch eine Kupplung). Solange man sich auf dem ansteigenden Ast der Charakteristik befindet ($\omega_0 < \omega'$), entspricht einer Geschwindigkeitszunahme eine Zunahme des Drehmoments, und der Motor wird beschleunigt. Wir befinden uns also im stabilen Bereich auf dem *abfallenden Ast der Charakteristik*, wenn ω_0 nahe bei ω liegt und der Lauf des Motors fast synchron ist.

Ein Nachteil dieser Motore ist es, daß ihr Wirkungsgrad kaum 0,9 erreicht.

In einer gründlicheren Theorie müßten wir noch die genaue Berechnung der Rückwirkung auf den Fluß des Ankerstroms selbst und dessen Rückwirkung auf die Induktorspulen durchführen. Zwischen diesen Spulen und dem Rotor bestehen tatsächlich die gleichen Beziehungen wie zwischen Primär- und Sekundärwicklung eines Transformators, und es ist dies um so wichtiger, als sich auf diesem Wege die elektrische in mechanische Energie umwandelt. Die gegenseitige Induktion zwischen Induktor und Anker gestattet das Auftreten einer Gegen-EMK im Induktorkreis. Dies ist jedoch bei Gleichstrommotoren nicht der Fall, da hier die Gegen-EMK direkt an den Bürsten auftritt.

Allstrommotore

Wir betrachten einen *Gleichstrommotor* (also mit Kollektor) und nehmen an, daß es sich um einen Hauptschlußmotor handelt. Diesen Motor speisen wir mit *Wechselstrom*. Dann wechseln H und I bei jeder Periode im Anker ihre Richtung.

Das Motorenmoment behält also eine konstante Richtung bei und der Motor arbeitet. Diese Motoren, die in beliebigen Größen hergestellt werden können, finden in der Wechselstromtechnik immer weitere Verbreitung.

Mehrphasentransformator

Unsere bisher erworbenen Kenntnisse der Mehrphasenströme gestatten uns, eine Beschreibung der Mehrphasentransformatoren zu geben. Wir beschränken uns hier auf einen Dreiphasentransformator. Mit drei Einphasentransformatoren, die an verschiedenen Phasen liegen, kann man Dreiphasenströme transformieren (Abb. 345). Es ist jedoch möglich, einen Teil von jedem der drei magnetischen Kreise in einem

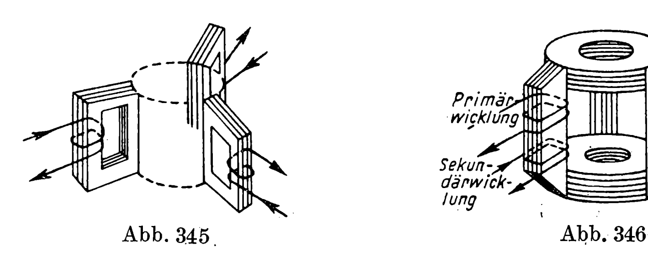


Abb. 345 Abb. 346

gemeinsamen Kern zu vereinigen. Dieser Kern wird dann von einem Gesamtfluß $\Phi_1 + \Phi_2 + \Phi_3 = 0$ durchströmt. In diesem gemeinsamen Kern treten keine Magnetflußveränderungen auf, und er kann fortgelassen werden (Abb. 346).

Primär- und Sekundärwicklungen entsprechen sich natürlich phasenmäßig. Um die Streuverluste möglichst gering zu halten, werden beide übereinander gewickelt. Auf diese Art hat man Transformatoren mit einer Leistung von 50000 kVA und mehr hergestellt, die im allgemeinen 200000 Volt erreichen. Für spezielle Aufgaben existieren Anlagen, die bis zu 1000000 Volt liefern.

Phasenumformer

Wir betrachten eine dreiphasige Spannungsquelle mit den drei Spannungen

$$U_1 = U_0 \sin \omega t,$$

$$U_2 = U_0 \sin\left(\omega t + \frac{2\pi}{3}\right),$$

$$U_3 = U_0 \sin\left(\omega t + \frac{4\pi}{3}\right).$$

Für einen bestimmten Anwendungszweck benötigen wir einen zweiphasigen Strom mit den Spannungen

$$U_1' = U_0' \sin \omega t, \quad U_2' = U_0' \cos \omega t.$$

Wir stellen fest, daß

$$U_2 \quad \text{oder} \quad U_3 = U_0 \left[\sin \omega t \cos \frac{2\pi}{3} \pm \cos \omega t \sin \frac{2\pi}{3}\right]$$

oder, mit anderen Worten,

$$U_2 - U_3 = \frac{2\sqrt{3}}{2} U_0 \cos \omega t$$

ist.

Transformatoren mit einer entsprechenden Anzahl von Windungen und in Reihe liegenden Sekundärwicklungen, die diese Lösungen $U_1 \sqrt{3}$ und $U_2 - U_3$ besitzen, liefern ein Zweiphasensystem. Eine ähnliche Anordnung ist unter dem Namen SCOTT-Transformator bekannt.

Nur der einphasige Strom läßt sich auf diese Art nicht in Mehrphasenstrom transformieren. Im Gegensatz dazu lassen sich alle Mehrphasensysteme in Systeme mit verschiedenen Phasenzahlen durch dem vorstehenden ähnliche Schaltungen transformieren.

Induktionszähler

Im allgemeinen wird der Aufbau eines Wechselstromzählers bekannt sein (Abb. 347).

Wir betrachten eine Spule, die unter der Wirkung zweier fester, im rechten Winkel zueinander stehender Felder h und h' steht. Beide Felder besitzen die

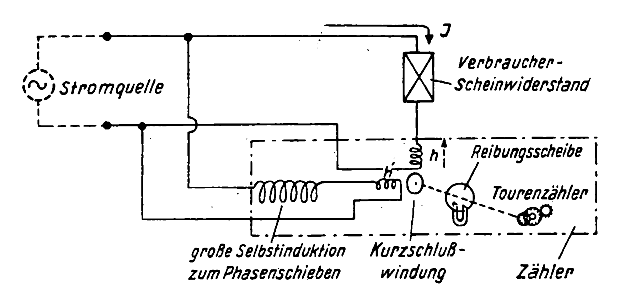


Abb. 347

gleiche Kreisfrequenz ω_0 und sind um den Winkel ψ gegeneinander phasenverschoben. Jedes dieser beiden Felder kann durch zwei andere in einander entgegengesetzten Richtungen umlaufende Felder

$$\frac{h}{2}, \frac{h}{2} \quad \text{und} \quad \frac{h'}{2}, \frac{h'}{2}$$

ersetzt werden. Die beiden Felder, die mit der Geschwindigkeit ω_0 umlaufen, besitzen eine Phasendifferenz von $\frac{\pi}{2} - \psi$ und die mit der Geschwindigkeit $-\omega_0$ umlaufenden Felder eine Phasendifferenz von $\frac{\pi}{2} + \psi$.

Die beiden resultierenden umlaufenden Felder sind dann also nach FRESNEL gegeben zu

$$H_1^2 = \left(\frac{h}{2}\right)^2 + \left(\frac{h'}{2}\right)^2 + \frac{2\,h\,h'}{4}\sin\psi,$$

$$H_2^2 = \left(\frac{h}{2}\right)^2 + \left(\frac{h'}{2}\right)^2 - \frac{2\,h\,h'}{4}\sin\psi.$$

Die Spule bildet also einen Asynchronmotor, der den beiden umlaufenden Feldern unterliegt. Das resultierende Moment ergibt sich, wenn man

$$L(\omega_0 \pm \omega) \ll R$$

annimmt (ω ist die Geschwindigkeit des Rahmens), zu

$$\frac{F^2}{2\,R}(\omega_0 - \omega)\,H_1^2 - \frac{F^2}{2\,R}(\omega_0 + \omega)\,H_2^2 = \frac{F^2}{2\,R}\,\omega_0\,h\,h'\sin\psi - \frac{F^2}{4\,R}\,\omega(h^2 + h'^2).$$

Man wählt die Konstruktion so, daß das Bremsmoment von der Form $B\omega$ ist (es wird z.B. durch eine elektromagnetische Dämpfung, einen Magneten mit einer Scheibe, in der FOUCAULTsche Ströme erzeugt werden, gebildet). Setzen wir das Motorenmoment gleich dem Widerstandsmoment und lösen die Gleichung nach ω auf, so erhalten wir

$$\omega = \frac{\frac{F^2}{2\,R}\,\omega_0\,h\,h'\sin\psi}{B + \frac{F^2}{4\,R}(h^2 + h'^2)}.$$

Die Spule, durch die das Feld h erzeugt wird, durchfließt der Verbraucherstrom $I: h = gI$. Die Spule, die h' erzeugt, wird parallel zu der eben genannten Spule geschaltet und über eine große Selbstinduktion durch die Spannung der Stromquelle $U = U_0 \cos\omega t$ gespeist. Diese Spule wird von einem um $\frac{\pi}{2}$ phasenverschobenen Strom durchflossen. Daraus ergibt sich, daß h' gegenüber dem Feld h um $\psi = \frac{\pi}{2} - \varphi$ phasenverschoben ist, wenn I um φ gegenüber U phasenverschoben ist. Also ist $\sin\psi$ der $\cos\varphi$ des Verbrauchers. Sorgt man fernerhin für die Gültigkeit der Bedingung

$$\frac{F^2}{4\,R}(h^2 + h'^2) \ll B,$$

so sieht man, daß sich ω mit $I\,U\sin\psi = I\,U\cos\varphi$ verändert. Dies ist aber die *Leistung*. Die Anzahl der Umdrehungen des Zählers wird an einem Zählwerk abgelesen und gibt die verbrauchte Energie an. Von den Elektrizitätswerken werden die Zähler in regelmäßigen Abständen abgelesen und der entsprechende Verbraucherpreis eingezogen.

Nachteile eines kleinen $\cos\varphi$

Die Leistung $IU(1 - \cos\varphi)$ ist nicht tatsächlich verloren, sie wird nicht vom Verbraucher, sondern durch die Phasenverschiebung vernichtet, die trotz der Erzeugung des Stromes I (mit den entsprechenden JOULEschen Verlusten) und der Spannung U (mit den Isolationsverlusten, den bisweilen auftretenden Korona-effekten usw., die mehr oder weniger gleichphasig zu den JOULEschen Verlusten sind) auftritt. Das Fließen dieser großen Ströme, die schlecht ausgenutzt werden, ist also die Ursache *zusätzlicher Verluste*. Andererseits ist dies oft der Grund für den Instabilitätsbereich der (manchmal kompliziert geschalteten) Maschinen, die die Stromquelle darstellen oder aus einer solchen gespeist werden. Die Phasenverschiebung φ erfolgt meist im Sinne einer Nacheilung (die Verbraucher besitzen ebenso wie auch die Generatoren eine Selbstinduktion). Diese Phasenverschiebung kann man kompensieren, indem man sie durch Kondensatoren an den Klemmen oder durch leerlaufende Synchronmotoren wieder ausgleicht. Auf diese Technik kann hier nicht weiter eingegangen werden.

Kurze Beschreibung einiger Wechselstrommotorentypen

a) Schaltungen zum selbsttätigen Anlauf von Einphasenmotoren

Wir haben bereits gesagt, daß einphasige Asynchronmotore nicht von allein anlaufen. Die meisten der Schaltungen, die wir hier beschreiben wollen, haben den Zweck, das selbsttätige Anlaufen dieses Motorentyps zu gestatten und eventuell seine Charakteristiken zu verbessern. Sie sind also nur für kleine Leistungen von Interesse, da man bei höheren Leistungen Dreiphasenmotoren vorzieht.

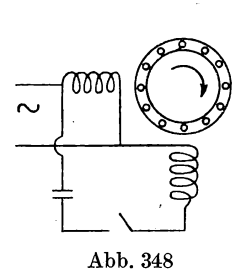


Abb. 348

1. *Kapazitätsschaltung eines einphasigen Asynchronmotors.* Abb. 348 stellt einen Rotor mit Käfigankerwicklung, eine Erregerwicklung (1) und eine zweite (2) um 90° dazu gedrehte Wicklung dar. Letztere wird über einen in Reihe liegenden Kondensator gespeist. *Der Schalter ist zu Beginn geschlossen.* Die Phasen der beiden Ströme in den Spulen stimmen nicht überein, die Phase des zum Kondensator fließenden Stromes eilt vor, und ein Teil des resultierenden Feldes besitzt dann den Charakter eines umlaufenden Feldes.

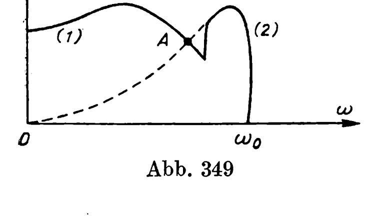


Abb. 349

Der Motor läuft also an. Dann kann man den Schalter von Hand oder mit Hilfe einer automatischen, durch Zentrifugalkräfte wirkenden Anordnung öffnen, sobald der Motor eine genügend hohe Drehzahl erreicht hat. Die Rotationsgeschwindigkeit wird dann nur durch die Wicklung (1) bestimmt.

Der Verlauf des Drehmoments in Abhängigkeit von ω, der Winkelgeschwindigkeit des Motors, ist in Abb. 349 angegeben. Es zeigt sich eine plötzliche Veränderung beim Öffnen des Schalters. Bisweilen hat man ein praktisches Interesse, diese Unstetigkeit in den Punkt A zu legen.

2. *Einphasenmotor mit voreilender Phase.* Bei diesem Motor handelt es sich um das gleiche Prinzip mit einfacherem Schema. Man benutzt dazu keine Kapazität, es genügt bereits, wenn die Erregung in der Wicklung (2) von der in Wicklung (1) verschieden ist, damit ein kleines Anlaufmoment vorhanden ist. Qualitativ hat die Kurve des Drehmoments die gleiche Form wie in Abb. 349.

3. *Motore mit geschlitzten Polen.* Abb. 350 zeigt eine Konstruktion mit 4 Polen (abwechselnd im Vorzeichen). Die Pole sind aufgeschlitzt, und der eine Teil trägt

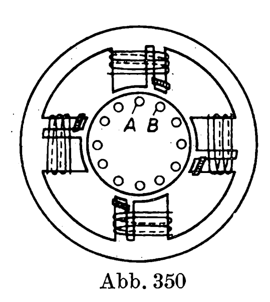
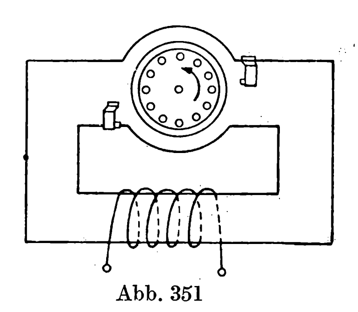


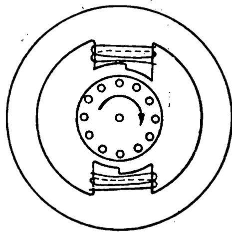
Abb. 350


Abb. 351

einen Kurzschlußring. In den Induktorwicklungen fließt der Wechselstrom. Die Ströme in den Kurzschlußwicklungen sind phasenverschoben, also auch die magnetische Induktion an der Stirnseite der Pole mit den Kurzschlußringen. Zwischen A und B verändert das Feld seine Phase, und es tritt ein umlaufendes Feld auf. Der Motor läuft also an (von A nach B, wo das Feld in der Phase zurückbleibt).

Eine für kleine Leistungen zweckmäßige Anordnung ist in Abb. 351 angegeben.

4. *Das Anlaufen eines Motors durch Änderung des magnetischen Widerstandes.* Das gleiche Resultat wie mit geschlitzten Polen erreicht man, wenn man den Spalt jeweils an einem Teil jedes Pols verbreitert: Durch die Hysteresis wird der Kraftfluß phasenvorverschoben in dem Teil, wo der Luftspalt größer ist. Dadurch tritt wieder ein umlaufendes Feld auf, und der Motor dreht sich in Richtung vom breiten zum schmalen Spalt (Abb. 352).


Abb. 352

5. *Motore mit zwei Geschwindigkeiten.* Indem man mehrere Erregerspulen, die in Reihe oder parallel geschaltet sind, anbringt und entsprechend Schalter einbaut, erhält man Motore mit zwei oder mehreren Geschwindigkeiten für alle betrachteten Motorentypen (Polumschaltmotor).

b) Repulsionsmotor

Dieser Motor ist eine Erfindung von Marius Latour, die allerdings beträchtlich weiterentwickelt wurde. Man betreibt ihn mit *einphasigem Wechselstrom* (Abb. 353).

Betrachten wir einen Motor mit *Kollektor.* Wir fügen zu der Haupterregerwicklung eine zweite um 90° gedrehte Wicklung dazu und *schließen die Bürsten kurz.*

Die Induktionsspule wirkt auf die Ankerspule wie die Primärwicklung auf die Sekundärwicklung eines Transformators. Sie erzeugt also zwischen den Bürsten eine elektromotorische Kraft. Dadurch fließt ein Strom, der unter der Wirkung der Feldspule ein Drehmoment erzeugt. Wie man sieht, ist die Charakteristik also die gleiche wie bei einem Hauptschlußmotor. Dies ist ein bemerkenswertes Resultat (insbesondere erhält man ein maximales Anlaufmoment).

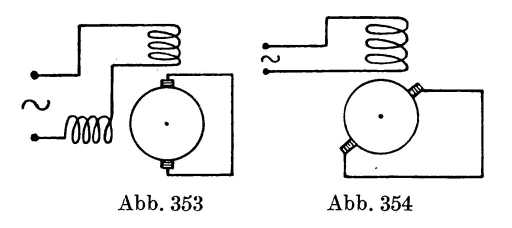


Abb. 353 Abb. 354

Das gleiche Resultat erhält man bei nur *einer* Erregerspule, wenn man die Bürsten verschiebt (tatsächlich setzt sich das Feld aus zwei Vektoren zusammen, von denen einer parallel und der andere senkrecht zur Verbindungslinie der Bürsten liegt). Durch Versuche stellt man die günstigste Lage der Bürsten fest. Dies ist der sogenannte *Repulsionsmotor*, bei dem der gleiche Effekt wie bei dem bekannten Experiment von Elihu Thomson auftritt (Abb. 354).

Diese Bürstenanordnung kann zum selbsttätigen Anlauf eines Motors ausgenutzt werden. Danach kann man den Kurzschluß der Bürsten aufheben und erhält einen normalen Asynchronmotor. Die Kurve des Drehmoments D hat eine besonders günstige Form. Dabei ist dieses bei kleinen Geschwindigkeiten groß, und die Leistung

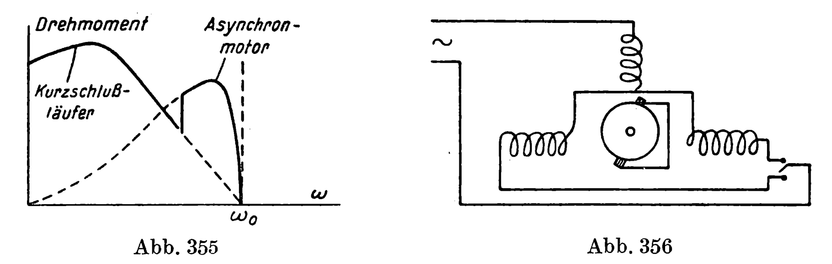


Abb. 355 Abb. 356

$D\,\omega$ bleibt über einen großen Geschwindigkeitsbereich größenordnungsmäßig konstant (Abb. 355).

Man betreibt den Motor in der einen oder anderen Umlaufsrichtung, indem man die Verschiebung der Bürsten verändert oder eine Spulenanordnung, wie die in Abb. 356 dargestellte, wählt.

c) *Hysteresismotor*

Bei diesen Motoren handelt es sich um zwei- oder dreiphasige, bei denen der Rotor aus einem magnetischen Material mit starker Hysteresis besteht. Vernachlässigt man bei einem solchen Rotor die durch Foucaultsche Ströme verursachten Induktionseffekte, so kann man zeigen, daß das Motorenmoment als Funktion der Geschwindigkeit konstant ist. Der ferromagnetische Anker magnetisiert sich nämlich mit der Frequenz $\frac{\omega_0 - \omega}{2\pi}$, wenn ω_0 die Kreisfrequenz des umlaufenden Induktorfeldes und ω die Winkelgeschwindigkeit der Rotation sind. Nun sind die

Hysteresisverluste *pro Umlauf* in einem unbewegten Metall unabhängig von der Frequenz. Daher gilt dies auch hier für einen *relativen Umlauf des Feldes in bezug auf den Anker.* Mit T werden wir nun die auf einen solchen Umlauf bezogenen Verluste bezeichnen. Sie entsprechen einer *Verlustleistung* von

$$T \frac{\omega_0 - \omega}{2\pi}$$

pro Sekunde.

Wenn D das Moment zwischen umlaufendem Feld und Anker ist, liefert das Feld die Leistung $D\omega_0$. Dabei findet man die vom Anker erzeugte mechanische Leistung zu $D\omega$, und die auftretenden Hysteresisverluste werden durch die Differenz dieser beiden Leistungen ausgeglichen. Folglich gilt

$$T \frac{\omega_0 - \omega}{2\pi} = D(\omega_0 - \omega).$$

Daraus ergibt sich

$$D = \frac{T}{2\pi} = \text{const}.$$

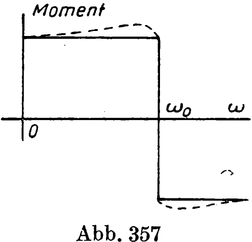


Abb. 357

Die theoretische Kurve der Drehmomente (Abb. 357) wird also in der Praxis durch die Induktionseffekte kaum modifiziert. Der Anker kann daher eine völlig zylindrische Form besitzen. Ein besonderer Vorteil dieser Motore ist ihr weitgehend geräuschloser Lauf. Man verwendet sie bei kleinem Leistungsbedarf, z.B. als Grammophonmotore.

Gegen-EMK von Wechselstrommotoren

Gegen-EMK eines Synchronmotors

In den elementaren Theorien der Wechselstrommotore – wobei wir die Motore mit Kollektor ausschließen – wird die Gegen-EMK nicht in Betracht gezogen. Sie tritt jedoch auf: Die Bewegung des Motors verschiebt Leiter in einem magnetischen Feld oder dieser überstreicht feste Leiter mit einem variablen Feld. Dadurch entstehen elektromotorische Induktionskräfte nach FARADAY, welche die in den besagten Leitern fließenden Ströme modifizieren. Der grundlegende Unterschied zu den Gleichstrommotoren besteht in Folgendem. Diese elektromotorische Kraft tritt im Erregerkreis auf, wo sie dem Stromdurchgang – wenigstens dem Wattscher Ströme – entgegenwirkt, da eine Verringerung des Widerstandsmomentes die der Stromquelle entnommene Leistung verkleinert. Bei einem Gleichstrommotor dagegen wird die Leistung nicht dem Erregerkreis, sondern dem den Rotor speisenden Generator entnommen.

Von diesem Standpunkt aus ist es interessant, noch einmal den Synchronmotor zu betrachten.

Zur Vereinfachung wollen wir einen Zweiphasensynchronmotor behandeln, wie er schematisch in Abb. 358 dargestellt ist. Zwei im Winkel von 90° zueinander an-

geordnete Feldspulen mit dem Widerstand R und der Selbstinduktion L werden von Stromquellen mit dem Scheinwiderstand Null gespeist, die die Spannungen $E_0 \sin \omega t$ bzw. $E_0 \cos \omega t$ liefern, wodurch die Ströme i_1 und i_2 hervorgerufen werden. Das umlaufende Feld übt auf den von uns nur als Permanentmagneten mit dem magnetischen Moment M angenommenen Rotor ein Moment aus, das durch das Bremsmoment D ausgeglichen wird. Hebt der Motor ein Gewicht mg mit der konstanten Geschwindigkeit $r\omega$, so gilt $D = mgr$, und die durch den Motor aufgebrachte mechanische Leistung beträgt

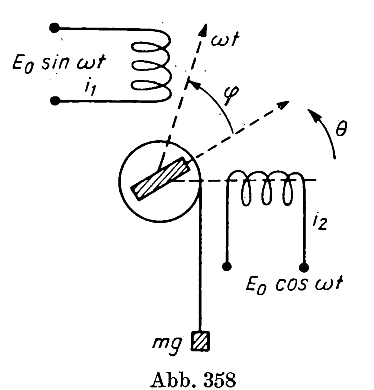


Abb. 358

$$W_1 = mgr\omega = D\omega.$$

Andererseits induziert dieser Magnet in den Spulen einen Fluß. Bezeichnen wir mit Φ_0 den Maximalfluß, dann gilt für die elektromotorische Kraft in der einen Spule

$$-\Phi_0 \frac{d \sin \Theta}{dt}$$

und in der anderen Spule

$$-\Phi_0 \frac{d \cos \Theta}{dt}.$$

Die die Ströme i_1 und i_2 beschreibenden Gleichungen haben also die Form

$$E_0 \sin \omega t = \left(R + L \frac{d}{dt}\right) i_1 + \Phi_0 \frac{d \sin \Theta}{dt}, \tag{1}$$

$$E_0 \cos \omega t = \left(R + L \frac{d}{dt}\right) i_2 + \Phi_0 \frac{d \cos \Theta}{dt}. \tag{2}$$

Nun setzen wir

$$\Theta = \omega t - \varphi; \quad i_1 = i_0 \sin(\omega t - \psi); \quad i_2 = i_0 \cos(\omega t - \psi).$$

Multiplizieren wir jetzt Gleichung (1) mit $\sin \omega t$, Gleichung (2) mit $\cos \omega t$ und addieren beide Gleichungen, so erhalten wir sofort

$$E_0 = R\,(i_0 \cos \psi) + L\omega\,(i_0 \sin \psi) + \Phi_0 \omega \sin \varphi. \tag{3}$$

Durch Multiplikation von Gleichung (1) mit $\cos \omega t$ und Gleichung (2) mit $-\sin \omega t$ und Addition dieser beiden Gleichungen ergibt sich

$$L\omega\,(i_0 \cos \psi) - R\,(i_0 \sin \psi) + \Phi_0 \omega \cos \varphi = 0. \tag{4}$$

Dabei ist $\Phi_0 \omega$ im Grunde die Amplitude E_1 der in jeder Spule durch die Rotation des Motors induzierten Gegen-EMK.

Die Gleichungen (3) und (4) können wir nun leicht nach $\sin\psi$ bzw. $\cos\psi$ auflösen:

$$i_0 \sin\psi = \frac{L\omega}{R^2 + L^2\omega^2} E_0 - \frac{L\omega \sin\varphi - R\cos\varphi}{R^2 + L^2\omega^2} E_1, \tag{5}$$

$$i_0 \cos\psi = \frac{R}{R^2 + L^2\omega^2} E_0 - \frac{R\sin\varphi + L\omega\cos\varphi}{R^2 + L^2\omega^2} E_1, \tag{6}$$

$$(R^2 + L^2\omega^2) \cdot i_0^2 = E_0^2 - 2\,E_1 E_0 \sin\varphi + E_1^2 = E'^2. \tag{7}$$

Diese letzte Formel zeigt, daß die gesamte i_0 erzeugende elektromotorische Kraft aus der elektromotorischen Kraft E_0 der Stromquelle und der elektromotorischen Kraft E_1 (oder Gegen-EMK) des Motors besteht, wobei letztere um $\frac{\pi}{2} + \varphi$ gegenüber E_0 phasenverschoben ist. Beide ergeben eine resultierende elektromotorische Kraft E'.

Es ist jetzt zweckmäßig, $\frac{L\omega}{R} = \operatorname{tg}\varphi_0$ zu setzen und den den Spulen eigenen Phasenwinkel φ_0 einzuführen. Wir erhalten dann

$$\begin{aligned}
\sqrt{R^2 + L^2\omega^2}\; i_0 \sin\psi &= E_0 \sin\varphi_0 + E_1 \cos(\varphi_0 + \varphi),\\
\sqrt{R^2 + L^2\omega^2}\; i_0 \cos\psi &= E_0 \cos\varphi_0 - E_1 \sin(\varphi_0 + \varphi),\\
(R^2 + L^2\omega^2)\, i_0^2 &= E_0^2 - 2\,E_0 E_1 \sin\varphi + E_1^2.
\end{aligned} \tag{8}$$

Nun wollen wir das *Motorenmoment* betrachten: Wirkt durch den in den Spulen fließenden Strom i_0 auf den Magneten M das Feld H_0, dann ist das Moment gegeben zu

$$H_0 M \sin(\varphi - \psi),$$

da $(\varphi - \psi)$ der Winkel zwischen Magnet und Feld ist und positiv gezählt wird, wenn φ und ψ retardiert sind und φ größer als ψ ist.

Allerdings sind H_0, M und $\Phi_0 i_0$ nicht unabhängig voneinander. Ordnen wir H_0 und M unter 90° zueinander an, so fordert die Gleichheit von actio und reactio zwei gleiche und entgegengesetzt gerichtete Momente auf die Spule und auf den Magneten, d.h.

$$H_0 M = \Phi_0 i_0 = \frac{E_1 i_0}{\omega}.$$

Folglich finden wir für das Moment den Ausdruck

$$D = \Phi_0 i_0 \sin(\varphi - \psi). \tag{9}$$

Jetzt wird $i_0 \sin(\varphi - \psi)$ umgeformt in $(i_0 \cos\psi)\sin\varphi - (i_0 \sin\psi)\cos\varphi$. Unter Berücksichtigung von Gleichung (8) gilt dann

$$\sqrt{R^2 + L^2\omega^2}\; i_0 \sin(\varphi - \psi) = (\sin\varphi\cos\varphi_0 - \sin\varphi_0\cos\varphi)\,E_0 - [\sin\varphi\sin(\varphi_0 + \varphi) + \cos\varphi\cos(\varphi_0 + \varphi)]\,E_1$$

oder

$$\sqrt{R^2 + L^2\omega^2}\; i_0 \sin(\varphi - \psi) = E_0 \sin(\varphi - \varphi_0) - E_1 \cos\varphi_0 = \frac{D\sqrt{R^2 + L^2\omega^2}}{\Phi_0}$$

Es wird nun zweckmäßig sein, den Quotienten

$$\frac{\Phi_0}{\sqrt{R^2 + L^2\omega^2}}$$

zu betrachten und ihn gleich $\frac{D_1}{E_1}$ zu setzen. Dabei ist D_1 das maximale Moment, das durch die elektromotorische Kraft E_1 hervorgerufen würde, wenn einzig diese Kraft vorhanden wäre. Wir finden dann

$$\sin(\varphi - \varphi_0) = \frac{E_1}{E_0}\left(\frac{D}{D_1} + \cos\varphi_0\right). \tag{10}$$

Wir haben also zwei Gleichungen zu lösen:

$$\sin(\varphi - \varphi_0) = \frac{E_1}{E_0}\left(\frac{D}{D_1} + \cos\varphi_0\right),$$

$$(R^2 + L^2\omega^2)\, i_0^2 = E_0^2 - 2\, E_0 E_1 \sin\varphi + E_1^2. \tag{11}$$

Betrachten wir nun einen gegebenen Motor, der mit einer gegebenen Frequenz gespeist wird. Dann sind auch φ_0, D_1 und E_1 festgelegt. Wir setzen jetzt das Widerstandsmoment gleich D. Das Problem besteht nun darin, den Motor mit einer Spannung zu betreiben, die zu seinem Betrieb ausreicht, d.h., eine Existenzbedingung für E_0 zu finden, damit wir für φ und i_0 Lösungen erhalten können. Die allgemeinen Formeln sind recht kompliziert, aber man kann interessante Spezialfälle betrachten.

1. Betrachten wir die *Leistung*, wenn $R = 0$ ist: Es treten in der Erregung keine Verluste mehr auf, d.h., die gesamte, der Stromquelle entnommene Leistung

$$W = E_0 i_1 \sin\omega t + E_0 i_2 \cos\omega t = E_0 i_0 \cos\psi$$

muß sich vollständig in der mechanischen Leistung $D\omega$ wiederfinden. Tatsächlich hat man in diesem Fall

$$R = 0, \quad \varphi_0 = \frac{\pi}{2}, \quad \cos\varphi_0 = 0, \quad \sin(\varphi - \varphi_0) = -\cos\varphi = \frac{E_1}{E_0}\cdot\frac{D}{D_1}.$$

Andererseits ist $i_0 \cos\psi$ durch Gl. (6) gegeben zu

$$i_0 \cos\psi = -\frac{\cos\varphi}{L\omega} E.$$

Daraus folgt

$$W = E_0 i_0 \cos\psi = \frac{E_0 E_1}{L\omega}\cdot\frac{E_1}{E_0}\cdot\frac{D}{D_1}.$$

Nun ist $\frac{D_1}{E_1}$ nur eine andere Form für $\frac{\Phi_0}{L\omega}$ (wenn $R = 0$), und es folgt

$$W = E_1 \frac{D}{\Phi_0}.$$

Am Anfang haben wir aber gesehen, daß nach Definition $\Phi_0 \omega = E_1$ ist. Für die elektrische Leistung finden wir also in diesem Falle den Wert $D\omega$, d.h. die mechanische Leistung.

2. Als weiteren Spezialfall wollen wir nun die Möglichkeit der Kompoundierung betrachten. Wir schalten zu jeder der beiden Selbstinduktionen eine Kapazität C in Reihe, wodurch ein Reihenresonanzkreis entsteht; $L\omega$ ist dann immer durch $L\omega - \frac{1}{C\omega}$ zu ersetzen, wobei $L\omega - \frac{1}{C\omega} = 0$ ist. Daraus folgt dann

$$\operatorname{tg}\varphi_0 = 0, \quad \cos\varphi_0 = 1, \quad \sin\varphi_0 = 0,$$

$$\sin\varphi = \frac{E_1}{E_0}\left(\frac{D}{D_1} + 1\right),$$

$$R^2 i_0^2 = E_0^2 - E_1^2\left(2\frac{D}{D_1} + 1\right)$$

und unter Berücksichtigung von Gleichung (6)

$$W = E_0 i_0 \cos\psi = \frac{E_0^2}{R}\left[1 - \frac{E_1^2}{E_0^2}\left(\frac{D}{D_1} + 1\right)\right].$$

Diese letzte Formel zeigt, daß die verbrauchte elektrische Leistung abnimmt, wenn D anwächst. Man hat also tatsächlich dank der Kompoundierung eine Art Leerlaufkurzschlußkreis, und das Widerstandsmoment erhält durch die von ihm verursachten Phasenverschiebungen einen günstigeren Verlauf. Dennoch ist dieser Fall nicht von allgemeinem Interesse, denn es ist günstiger, elektrische Leistung in mechanische umzuwandeln, als zu versuchen, sie durch die Kompoundierung in den Widerständen in Wärme umzusetzen.

Gegen-EMK des Asynchronmotors

Die gleiche allgemeine Bemerkung wie für den Synchronmotor ist auch hier gültig: Die Gegen-EMK rührt von der gegenseitigen Induktion zwischen der Käfigwicklung des Rotors und den Erregerspulen her; das umlaufende Primärfeld induziert in der Rotorwicklung Ströme, die ihrerseits durch induktive Kopplung Ströme verursachen, die das Feld verändern. Die das Motorenelement als Funktion des Induktionsflusses im Rotorkäfig angebende Formel aus der elementaren Theorie bleibt gültig, d.h., nur der Wert dieses Flusses wird verändert.

Es ist recht interessant, den Mechanismus dieses Effektes zu untersuchen.

Zur Vereinfachung wollen wir einen Zweiphasenmotor betrachten und aus Symmetriegründen annehmen, daß der Rotor aus zwei zueinander unter 90° angeordneten Kurzschlußwindungen (1′) und (2′) (Abb. 359) besteht.

Mit R und L bezeichnen wir Widerstand bzw. Selbstinduktion der Statorspulen.

Den Widerstand bzw. die Selbstinduktion einer der Kurzschlußwindungen des Rotors bezeichnen wir mit r und l. Die Frequenz des Speisestroms sei ω_0. Der Rotor drehe sich mit der Winkelgeschwindigkeit ω. Bezeichnen wir die Differenz

$\omega_0 - \omega$ mit ω_1, so sehen wir, daß durch die Anordnung der beiden Windungen rechtwinklig zueinander der Rotor ein umlaufendes Feld erzeugt, das in bezug auf ihn selbst mit der Geschwindigkeit ω_1 und folglich in bezug auf den Stator mit der Geschwindigkeit ω_0 umläuft.

Die Ströme in den Spulen (1) und (2) seien I_1 und I_2, die in den Kurzschlußwindungen (1′) und (2′) seien i_1 und i_2. Wir wollen nun setzen

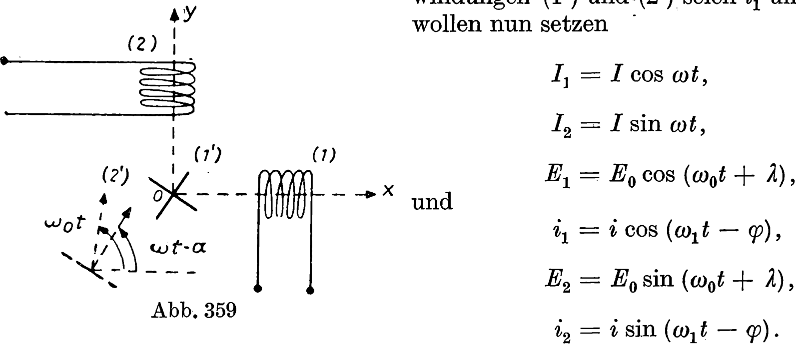


Abb. 359

$$I_1 = I \cos \omega t,$$
$$I_2 = I \sin \omega t,$$
$$E_1 = E_0 \cos (\omega_0 t + \lambda),$$
und
$$i_1 = i \cos (\omega_1 t - \varphi),$$
$$E_2 = E_0 \sin (\omega_0 t + \lambda),$$
$$i_2 = i \sin (\omega_1 t - \varphi).$$

Schließlich bezeichnen wir noch mit M_{11} die gegenseitige Induktion zwischen (1′) und (1), mit M_{12} die zwischen (1′) und (2), und wir erhalten (die gegenseitigen Induktionen sind zeitlich veränderlich)

$$M_{11} = M_{22} = M \cos (\omega t - \alpha),$$
$$M_{12} = -M_{21} = -M \sin (\omega t - \alpha).$$

Man sieht sofort, daß sich daraus folgende Gleichungen ergeben:

$$E_1 = \left(R + L \frac{d}{dt}\right) I_1 + \frac{d}{dt} (M_{11} i_1 + M_{12} i_2),$$

$$E_2 = \left(R + L \frac{d}{dt}\right) I_2 + \frac{d}{dt} (M_{21} i_1 + M_{22} i_2),$$

$$0 = \left(r + l \frac{d}{dt}\right) i_1 + \frac{d}{dt} (M_{11} I_1 + M_{21} I_2),$$

$$0 = \left(r + l \frac{d}{dt}\right) i_2 + \frac{d}{dt} (M_{12} I_1 + M_{22} I_2).$$

Substituieren wir jetzt nach den oben angegebenen Formeln die M, i und I, so gilt

$$M_{11} i_1 + M_{12} i_2 = M i \cos \omega_0 t - (\alpha + \varphi),$$
$$M_{21} i_1 + M_{22} i_2 = M i \sin \omega_0 t - (\alpha + \varphi),$$
$$M_{11} I_1 + M_{12} I_2 = M I \cos (\omega_1 t + \alpha),$$
$$M_{12} I_1 + M_{22} I_2 = M I \sin (\omega_1 t + \alpha).$$

Die Gleichungen für die elektromotorischen Kräfte haben also die Form

$$E_1 = \left(R + L\frac{d}{dt}\right) I_1 - M\omega_0 i \sin \omega_0 t - (\alpha + \varphi),$$

$$E_2 = \left(R + L\frac{d}{dt}\right) I_2 + M\omega_0 i \cos \omega_0 t - (\alpha + \varphi),$$

$$0 = \left(r + l\frac{d}{dt}\right) i_1 + MI\frac{d}{dt} \cos(\omega_1 t + \alpha),$$

$$0 = \left(r + l\frac{d}{dt}\right) i_2 + MI\frac{d}{dt} \sin(\omega_1 t + \alpha).$$

Führen wir jetzt die Ausdrücke $E_1 + jE_2$, $I_1 + jI_2$, $i_1 + ji_2$ ein, dann gilt

$$E_1 + jE_2 = Ee^{j\lambda} = (R + jL\omega_0)\, I + jM\omega_0 e^{-j(\alpha+\varphi)},$$

$$0 = (r + jl\omega_1)\, ie^{-j(\alpha+\varphi)} + jM\omega_1 I.$$

Daraus ergibt sich, wenn man i eliminiert, der Ausdruck

$$\left(R + jL\omega_0 + \frac{M^2\omega_0\omega_1}{r + jl\omega_1}\right) I = Ee^{j\lambda}.$$

Der Term mit M^2 führt auf eine Begrenzung des Stromes I durch die Gegen-EMK. Wir wollen nun Real- und Imaginärteil trennen:

$$\operatorname{tg}\left(\lambda + \operatorname{arc\,tg}\frac{l\omega_1}{r}\right) = \frac{\dfrac{L\omega_0}{R} + \dfrac{l\omega_1}{r}}{1 - \dfrac{Ll - M^2}{rR}\,\omega_0\omega_1}$$

und

$$I = E \cdot \frac{\sqrt{r^2 + l^2\omega_1^2}}{\sqrt{[Rr + (M^2 - Ll)\,\omega_0\omega_1]^2 + (rL\omega_0 + Rl\omega_1)^2}},$$

da

$$\alpha + \varphi = \frac{\pi}{2} + \operatorname{arc\,tg}\frac{l\omega_1}{r} \quad \text{und} \quad i = I \cdot \frac{M\omega_1}{\sqrt{r^2 + l^2\omega_1^2}}.$$

Berechnung des Momentes

Die vorstehenden Formeln enthalten alle notwendigen Einzelheiten. Die magnetische Fläche einer Kurzschlußwindung des Rotors sei durch F gegeben.

Das magnetische Moment Fi_1 besitzt die Richtung $\omega t - \alpha$, das Moment Fi_2 die Richtung $\omega t - \alpha + \dfrac{\pi}{2}$. Das umlaufende Primärfeld hat die Form

$$H_0 = 4\pi I\mu n_1 \cdot e^{j\omega_0 t}.$$

Dann hat das Moment den Wert

$$D = -Fi\,|H_0|\,[\cos(\omega_1 t - \varphi)\sin(\omega_1 t + \alpha) - \sin(\omega_1 t - \varphi)\cdot\cos(\omega_1 t + \alpha)]$$
$$= -FiH_0 \sin(\alpha + \varphi) = -FiH_0 \frac{r}{\sqrt{r^2 + l^2\omega_1^2}}$$
$$= -FH_0\, I \frac{M\omega_1 r}{r^2 + l^2\omega_1^2}.$$

Nun ist jedoch $FH_0 = MI$, d.h.

$$D = M^2 I^2 \frac{r\omega_1}{r^2 + l^2\omega_1^2}.$$

Dies ist übrigens wieder die Formel aus der elementaren Theorie, wobei sich nur I verändert hat. MI ist der Maximalfluß Φ_0 durch eine der beiden Rotorwindungen und wird durch eine kompliziertere Formel (siehe weiter oben) angegeben, die auch die Rückwirkungen des Rotors berücksichtigt. Substituiert man nun I, dann kann man schreiben:

$$D = \frac{E^2}{R^2} M^2 \cdot \frac{r\omega_1}{\left[r + \frac{(M^2 - Ll)\,\omega_0\,\omega_1}{R}\right]^2 + \left[\frac{r}{R}\cdot L\omega_0 + l\omega_1\right]^2}.$$

Läßt man nun R gegen Unendlich gehen, so findet man für D wieder die elementare Formel, wobei die Effekte der Gegen-EMK nicht berücksichtigt sind. Es empfiehlt sich jedoch, lieber auf die elementare Formel zu verzichten und einen guten Motor mit einem nicht zu hohen Statorwiderstand zu entwerfen.

Spezielle Anwendungsmöglichkeiten der Wechselstrommotore

a) Fernanzeige durch Selbstsynchronisation

Es seien S ein Geber und E ein Empfänger (Abb. 360). Die bewegliche Spule von S werde von einem der Spannungsquelle entnommenen Wechselstrom durchflossen. Diese Spule induziert in den drei festen, in Sternschaltung angeordneten Spulen drei elektromotorische Wechselkräfte in gleicher Phase. Die Amplituden dieser Kräfte hängen jedoch von der Orientierung Θ der beweglichen Spule ab.

Diese drei elektromotorischen Kräfte treten ebenfalls in den entsprechenden Feldspulen des Empfängers auf. Dadurch wird ein magnetisches Wechselfeld in der Richtung Θ erzeugt. Wird nun die bewegliche Spule des Empfängers von einem der Stromquelle entnommenen Strom durchflossen, dann orientiert sie sich in Richtung Θ.

Die gleiche Anordnung kann man bei zweiphasigem Strom verwenden. Da die Rechnung für diesen Fall etwas einfacher ist, werden wir im folgenden die Betrachtungen für zweiphasigen Strom durchführen. Natürlich kann man auch

mehrphasige selbstsynchronisierende Anordnungen ohne prinzipielle Änderungen konstruieren.

Aus den in Abb. 360 und 361 schematisch dargestellten Schaltungen kann man ein Fernanzeigegerät aufbauen. Ein mit der beweglichen Spule des Empfängers verbundener Zeiger stellt sich auf einer Skala auf den Wert ein, den man der beweglichen Spule des Senders gibt. Außerdem sind Sender und Empfänger *reversibel*, d.h., man kann sie vertauschen.

Die *Genauigkeit* eines solchen selbstsynchronisierenden Fernanzeigegeräts (wie die aller ähnlichen Anlagen) kann durch *Untersetzung* sehr vergrößert werden.

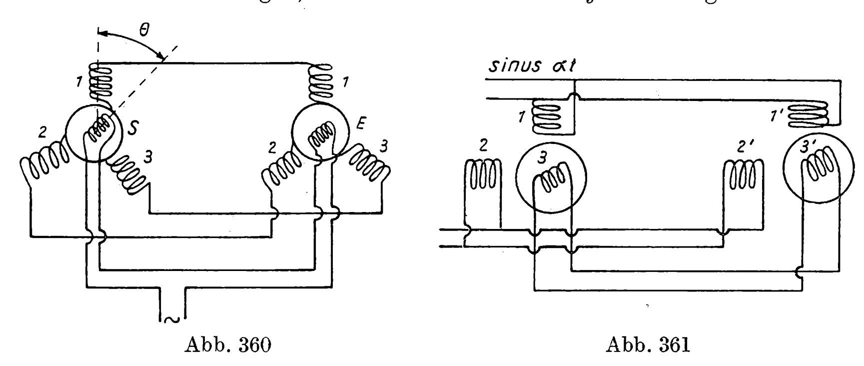


Abb. 360 Abb. 361

Bei einer solchen Untersetzung wirkt der selbstsynchronisierte Sender auf einen anderen Sender, der sich 10 oder 100mal so schnell dreht. Man ordnet zwei entsprechende selbstsynchronisierende Empfänger an, von denen einer zum Zählen der Umdrehungen, der andere zum Anzeigen der 10tel oder 100stel Umdrehungen dient. Nehmen wir z.B. an, daß die Untersetzung 100 betrage, dann ist es klar, wenn der Konstruktionsfehler des Hauptsenders nicht mehr als $^1/_{100}$ eines Umlaufes in jedem Punkt der Skala beträgt, daß mit dieser Methode die Fehler stark verringert werden. In vielen Fällen kann man auf Grund dieser Bemerkung Sender und Empfänger durch einen einfachen mechanischen Tourenzähler ersetzen, während der Zeiger der Untersetzung die Bruchteile einer Umdrehung anzeigt.

Ein Nachteil dieser Schaltung ist das geringe Drehmoment, durch das der Zeiger des Empfängers bewegt wird. Jedes nennenswerte Widerstandsmoment führt zu einer Winkelverschiebung. Dieser Nachteil macht sich besonders stark bemerkbar, wenn man mit nur einem Sender mehrere parallelgeschaltete Empfänger koppeln will. Es genügt z.B., daß einer dieser Empfänger blockiert ist oder durch irgendeine Störung ausfällt (Drahtbruch), um die Anzeigen aller übrigen Empfänger zu verfälschen. Durch ihre gegenseitige Wechselwirkung werden elektromotorische Kräfte induziert, und jedes Paar feste Spule – bewegliche Spule spielt die Rolle eines Transformators.

b) Selbstsynchronisation bei mehrphasigen Strömen

Die Symmetrie der selbstsynchronisierenden Anlagen gestattet verschiedenste Schaltungen. Wir speisen z.B. bei einer zweiphasigen Anlage im Sender S die Spule 1 mit einem Strom der Phase sinαt und die Spule 2 mit einem um 90° dazu

verschobenen, d. h. mit der Phase $\cos\alpha t$. Dieser Fall ist in Abb. 361 dargestellt. Die bewegliche Spule 3 sei in Richtung Θ orientiert. Das induzierte Feld hat dann die Form

$$-\sin\alpha t \cdot \cos(\pi - \Theta) + \cos\alpha t \sin\Theta = -\sin(\alpha t - \Theta)$$

und die induzierte elektromotorische Kraft die Form

$$\cos(\alpha t - \Theta).$$

Diese elektromotorische Kraft wird auf die Klemmen von 3′ des Empfängers übertragen. Dadurch fließt dort ein Strom mit der Phase $\sin(\alpha t - \Theta)$, der diese Spule magnetisiert, indem er ein proportionales magnetisches Moment M hervorruft.

Die feste Spule 1′ übt also auf die bewegliche Spule 3′ ein Drehmoment der Form

$$-\sin\alpha t \cdot \sin(\alpha t - \Theta) \sin\Theta_1$$

und die feste Spule 2′ auf die gleiche bewegliche Spule ein Moment der Form

$$-\cos\alpha t \sin(\alpha t - \Theta) \cos\Theta_1$$

aus.

Die Summe der beiden Drehmomente beträgt also

$$-\sin(\alpha t - \Theta) \cos(\alpha t - \Theta_1).$$

Da nun aber

$$\sin^2\alpha t = \frac{1 - \cos 2\alpha t}{2}, \quad \cos^2\alpha t = \frac{1 + \cos 2\alpha t}{2},$$

$$\sin\alpha t \cos\alpha t = \frac{1}{2} \sin 2\alpha t$$

ist, ergibt sich für dieses Moment der Ausdruck

$$-\frac{1}{2}(\sin\Theta_1 \cos\Theta - \cos\Theta_1 \sin\Theta) - \frac{1}{2} \sin 2\alpha t \cos(\Theta_1 + \Theta)$$
$$- \frac{1}{2} \cos 2\alpha t \cdot \sin(\Theta_1 - \Theta).$$

Der zeitliche Mittelwert dieses Momentes ist also gegeben zu

$$\frac{1}{2} \sin(\Theta_1 - \Theta).$$

Das *mittlere* Moment hebt sich für $\Theta_1 = \Theta$ oder $\Theta_1 = \pi + \Theta$ auf, jedoch entspricht nur dem ersteren Fall ein stabiles Gleichgewicht (Rückdrehmoment von Θ_1 gegen Θ wegen des Minuszeichens).

Wir haben also in dieser Anordnung ein Fernanzeigegerät, das dem in *a*) beschriebenen äquivalent ist, nur daß in diesem Fall eine kompliziertere Stromversorgung notwendig ist.

c) *Fernsteuerung*

Beabsichtigt man an Stelle einer Winkelanzeige die Übertragung einer dem Winkelausschlag entsprechenden elektromotorischen Kraft, so verwendet man dazu zweckmäßig die im folgenden beschriebene Anlage. Wir betrachten z. B. eine bewegliche Spule 3, die beliebige Drehungen ausführt (z. B. hervorgerufen durch einen Beobachter, der ein Zielgerät auf einen bestimmten Ort einstellt und damit gleich-

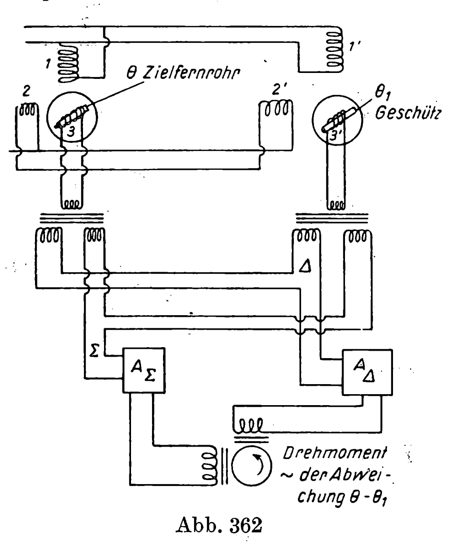


Abb. 362

zeitig die Spule bewegt). Die Spule 3′ sei nun mit einer Kanone oder einem Geschützturm so verbunden, daß dieser den Bewegungen des Zielgerätes folgt (Abb. 362).

Das Zielgerät hat die Richtung Θ, der Geschützturm die Richtung Θ_1. Sender und Empfänger werden wie in b) mit Strom versorgt (Abb. 361). Es tritt an den Klemmen von 3 eine elektromotorische Kraft $\cos(\alpha t - \Theta)$ und an den Klemmen von 3′ eine mit der Phase $\cos(\alpha t - \Theta_1)$ auf. Subtrahieren wir diese elektromotorischen Kräfte in der richtigen Reihenfolge voneinander, dann hat die resultierende elektromotorische Kraft die Form

$$\begin{aligned}\Delta &= \cos\left(\alpha t - \frac{\Theta + \Theta_1}{2} - \frac{\Theta - \Theta_1}{2}\right) - \cos\left(\alpha t - \frac{\Theta + \Theta_1}{2} + \frac{\Theta - \Theta_1}{2}\right)\\ &= 2 \sin\left(\alpha t - \frac{\Theta + \Theta_1}{2}\right) \sin\frac{\Theta - \Theta_1}{2}.\end{aligned}$$

Addieren wir sie dagegen, so erhalten wir

$$\Sigma = 2 \cos\left(\alpha t - \frac{\Theta + \Theta_1}{2}\right) \cos\frac{\Theta - \Theta_1}{2}.$$

Erfüllt diese Schaltung ihren Zweck, dann ist $\Theta - \Theta_1$ klein, und $\cos\frac{\Theta - \Theta_1}{2}$ ist ungefähr gleich eins. In Abb. 362 werden die oben angegebenen, Σ und Δ er-

gebenden Operationen mit Hilfe zweier Transformatoren durchgeführt, deren Primärwicklungen durch die Spulen 3 und 3′ gespeist werden und deren je zwei Sekundärwicklungen mit einer anderen Sekundärwicklung verbunden sind, wie es die Abbildung zeigt.

Die *Fernsteuerung* von 3′ durch 3, d.h. der Kanone durch den Beobachter, kann also auf folgende Art am einfachsten erläutert werden:

Die elektromotorische Kraft Σ wird auf den Eingang eines Leistungsverstärkers A_Σ gegeben und tritt aus diesem als ein zu $\cos\left(\alpha t - \frac{\Theta + \Theta_1}{2}\right)$ proportionaler Strom in eine der beiden Erregerwicklungen eines Zweiphasenmotors mit umlaufendem Feld.

Die elektromotorische Kraft Δ liegt ebenfalls am Eingang eines Leistungsverstärkers A_Δ, und aus diesem tritt ein Strom proportional zu

$$\sin\left(\alpha t - \frac{\Theta + \Theta_1}{2}\right) \cdot \sin\frac{\Theta - \Theta_1}{2}$$

aus, der in die zweite Erregerwicklung des gleichen Motors geschickt wird.

Die Phase des Erregerstroms Δ ist um 90° gegen die Phase des Erregerstroms Σ verschoben, die Richtung der Verschiebung hängt jedoch von $\Theta - \Theta_1$ ab. In dem Zweiphasenmotor tritt also ein zu der Winkeldifferenz $\Theta - \Theta_1$ proportionales Drehmoment auf, dessen Sinn sich mit dem Vorzeichen der Winkeldifferenz umkehrt. Dieses Drehmoment bewegt die Kanone oder den Geschützturm und damit gleichzeitig die mit diesem verbundene Spule 3′. Wir haben also eine Fernsteuerung der Kanone durch den Beobachter.

Die besondere Kunst eines Kanoniers ist die Berücksichtigung der notwendigen Korrekturen, die sich aus der *Flugbahn des Geschosses, der Bewegung des Zielobjektes, der Höhenkorrektur* usw., ergeben.

d) Elektromagnetische Wechselstrompumpen

Wir haben bereits in Teil II (Seite 204) das Prinzip der elektromagnetischen Gleichstrompumpe betrachtet. Der Nachteil dieser Pumpe bestand in Folgendem:

Um bei üblichen Induktionen (10000 Gauß) Kräfte zu erzielen, die einen annehmbaren Druck erzeugen (einige Meter Wassersäule), sind enorme Ströme erforderlich. Betrachten wir ein Beispiel

$$F = Bli \quad (l = 10\text{ cm}, \qquad B = 10000\text{ Gauß}).$$

Nehmen wir einen Querschnitt von 10 cm² an, so beträgt der erzeugte Druck bei 100000 Ampere, d.h. 10000 CGS-Einheiten,

$$P = \frac{Bli}{10^2} = \frac{10^4 \cdot 10 \cdot 10^4}{100} = 10^7\text{ bar} = 10\text{ Atm}.$$

Es ist jedoch keine Frage, daß die Erzeugung und die Übertragung von 100000 Ampere Gleichstrom durch Kabel für ein so geringes Objekt überhaupt nicht diskutabel ist. Aus diesem Grunde findet die elektromagnetische Gleichstrompumpe kaum Anwendung.

Glücklicherweise ist es jedoch möglich, ohne besondere Schwierigkeiten mit Wechselstrom Resultate von praktischem Wert zu erreichen. Die Abb. 363 läßt sich wie folgt aus der Abb. 214 herleiten.

Der magnetische Kreis besteht aus einem *mit Wechselstrom gespeisten Elektromagneten,* dessen primäre Erregerwicklung E mit einem Wechselstromgenerator verbunden ist. Die Induktion B kehrt sich also nach jeder Halbperiode um. Be-

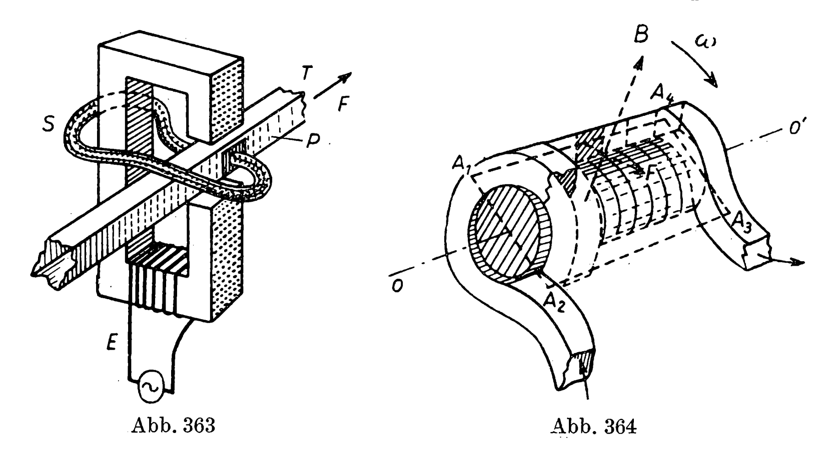


Abb. 363 Abb. 364

achtet man nun, daß der durch die Flüssigkeit tretende Strom i sich ebenso und nach Möglichkeit mit der gleichen Phase umkehrt, dann findet man den Ausdruck

$$Bi = B_0 \sin \omega t \cdot i_0 \sin \omega t = B_0 i_0 \sin^2 \omega t.$$

Der Mittelwert dieses Ausdruckes beträgt $\frac{B_0 i_0}{2}$. Die auf die Flüssigkeit wirkende Verschiebungskraft F hat also den Wert

$$F = Bl \cdot i = B_0 i_0 l \sin^2 \omega t,$$

wobei die Gleichstromkomponente, die die Flüssigkeit immer in die gleiche Richtung pumpt, $\frac{B_0 i_0 l}{2}$ beträgt. Daneben gibt es noch eine pulsierende Kraft, die addiert wird und $-\frac{B_0 i_0}{2} \cos 2\omega t$ beträgt, sich jedoch nicht weiter unangenehm bemerkbar macht.

Man erhält den erforderlichen Wechselstrom i, indem man eine einzige große Sekundärwicklung S anbringt, die durch den Transformatoreffekt von der Primärwicklung gespeist wird und über die leitenden Platten P des Rohres T ihren Strom als Kurzschlußstrom liefert (Abb. 363). Der Leser überlege sich selbst die Richtung der Kraft in dem in der Abbildung dargestellten Fall.

Eine *andere,* sehr geschickte *Lösung* sei hier noch angeführt, die auf *umlaufenden Feldern* beruht.

Ein Rohrleiter wird spiralförmig auf einen Kern oder eine Walze aus Eisenblechen wie beim Dynamo so gewickelt, daß die Windungen dicht nebeneinander liegen. Ein nicht dargestellter *Stator,* der z.B. mit dreiphasigem Strom gespeist wird, erzeugt ein mit der Frequenz der Stromquelle um die Achse $O\,O'$ umlaufendes Feld B (Abb. 364).

Die Flüssigkeit ist leitend, und die Windungen stoßen aneinander. Dann treten im gesamten so gebildeten Volumen, das man idealisiert als eine Art Windung $A_1A_2A_3A_4$ betrachten kann, induzierte Ströme auf. Diese Windung verläuft quasitransversal durch die Flüssigkeit, die sie so oft schneidet, wie es Windungen gibt. Die metallischen Wände des Rohres sichern in allen Punkten den Schluß des Stromkreises. Die Windung selbst unterliegt von dem umlaufenden Feld einer Kraft, die sie gerade wie den Rotor eines Asynchronmotors zu drehen versucht. Die so durch die Röhre gepumpte Flüssigkeit fließt in der *Rotationsrichtung des umlaufenden Feldes* und schreitet von einem Ende zum anderen in der Spirale fort. Da die Dichte des im Gesamtkreis $A_1A_2A_3A_4$ fließenden Stroms nun berechnet werden kann, wird man jedes Element des Flüssigkeitsstroms in jedem Röhrenquerschnitt und den Strom, der ihn durchquert, betrachten und schließlich die Kraft F berechnen, die auf ihn wirkt. Durch die Verteilung des Druckes über eine große Flüssigkeitslänge sind bei diesem System nicht mehr so große Stromstärken wie bei der vorstehenden Anordnung erforderlich, und es ist daher bedeutend besser für Anwendungen geeignet.

Es existieren noch andere Konstruktionen, die keine umlaufenden Felder verwenden, bei denen jedoch trotzdem die magnetischen Kräfte direkt auf die FOUCAULTschen Ströme wirken, die im Innern der Flüssigkeit geschlossene Schleifen bilden, ähnlich wie es beim Experiment von E. Thomson der Fall ist (Seite 313), wo die Sekundärwindung eines Transformators sehr heftig durch die Primärwicklung abgestoßen wird. Diese Anordnungen werden wir jedoch hier nicht weiter betrachten.

Allgemein kann man sagen, daß diese elektromagnetischen Pumpen in der chemischen Industrie eine gewisse Anwendung gefunden haben. Zweifellos werden sie in der Zukunft für atomenergetische Zwecke (wo z. B. flüssiges Natrium dazu verwendet wird, die Wärme des Reaktors abzuführen) große Bedeutung erlangen.

IV. KAPITEL

Einige technische Anwendungen des Ferromagnetismus in der Wechselstromtechnik

Spezielle Legierungen

Wir haben bereits in Teil II, IV. Kapitel, das Permalloy oder Mu-Metall, eine Eisen-Nickel-Legierung mit 78,5% Ni, und Siliziumbleche (diese bei den Transformatoren) erwähnt. Das Permalloy erhält seine interessanten Eigenschaften (seine Permeabilität erreicht einen Wert von 100000 bei schwachen Feldern von nur 0,05–0,10 Oersted – seine Sättigung tritt bei 0,25 Oersted ein) erst nach einer speziellen thermischen Behandlung und behält sie nur unter der Bedingung, daß es später keiner noch so geringen mechanischen Verformung oder Spannung unterworfen wird. Selbst wenn diese Bedingungen eingehalten werden, weist es noch eine Reihe weiterer Nachteile auf:

1. Seine Hysteresisschleife besitzt, obwohl sie sehr klein ist, doch eine nahezu rechtwinklige Form, d.h., die Remanenz liegt in der Nähe der Sättigung, was für einige Anwendungszwecke recht unvorteilhaft ist. So würde man z. B. die Induk-

toren kleiner Motoren für Fernübertragungsanlagen gern aus Permalloy herstellen, um mit kleinen Leistungen arbeiten zu können. Die starke Remanenz des Permalloy führt jedoch zu unbefriedigenden Lösungen, da bereits ein sehr schwaches entgegengesetztes Feld ausreicht, um das Signal zu verfälschen.

2. Permalloy ist ein guter Leiter, so daß die Verluste durch FOUCAULTsche Ströme recht beträchtlich sind. Der Vorteil, die Hysteresisverluste reduziert zu haben, ist daher nicht von Bedeutung, da unter Umständen die Zunahme der durch FOUCAULTsche Ströme auftretenden Verluste größer als die Abnahme der Hysteresisverluste ist.

Aus diesem Grunde entwickelte man neue Legierungen, die auf Kosten der magnetischen Qualitäten eine Reduktion der übrigen Nachteile gestatten. Wir nennen dazu das *Anhyster D*, eine an Nickel ärmere Eisen-Nickel-Legierung als das Permalloy, die jedoch noch sehr leicht magnetisierbar ist. Sie besitzt geringere Hysteresisverluste und einen dreimal so hohen spezifischen Widerstand. Dadurch werden die durch FOUCAULTsche Ströme hervorgerufenen Verluste bei Wechselstrom stark reduziert. Das *Anhyster D* ist weniger empfindlich in seinen magnetischen Eigenschaften. Es erträgt eine gröbere thermische Behandlung und mechanische Belastungen. Bei den meisten Verwendungszwecken wählt man eine derartige Legierung (mit einer Ausnahme: PUPINsche Spulen bei der Telephonie über große Entfernungen). Anhyster D ist ein Stahl mit 45–50% Nickelgehalt.

Kürzlich entwickelte man eine 50% Nickel enthaltende Legierung, die in einem starken magnetischen Feld geglüht wurde. Sie zeigt z.B. eine vollkommen rechtwinklige Hysteresisschleife und eine erhöhte Sättigung.

Die Stähle mit Zusätzen bis zu 35% Ni-Gehalt ergaben interessante Legierungen. Wir erwähnen dabei das Rhometall (hohe Anfangspermeabilität, großer spezifischer Widerstand, d.h. geringe FOUCAULTsche Verluste, also gute Eignung für Verwendungen bei hohen Frequenzen).

Die genaue Zusammensetzung und vor allem die Wärmebehandlungen werden von den erzeugenden Firmen mehr oder weniger streng geheimgehalten. In den angegebenen Nickelgehalten können geringe Prozentsätze an anderen Metallen (Molybdän, Kupfer usw.) enthalten sein.

In Abb. 152 sind die Induktionskurven und die Permeabilitäten von *Permalloy* und *Anhyster D* mit denen des *Rhometalls* verglichen.

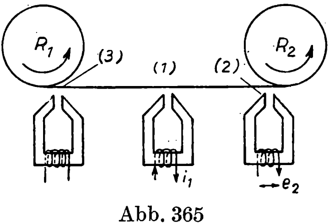


Abb. 365

Magnettonverfahren

Ein Gerät, das nahezu alle ferromagnetischen Eigenschaften ausnutzt und aus diesem Grunde hier erwähnt zu werden verdient (Abb. 365), ist das Magnetophon.

Ein Band aus magnetischem Material (ein mit Stahlspänen bedecktes Kunststoffband oder ein einfacher Draht aus Spezialstahl) wird von der Rolle R_1 auf die Rolle R_2 umgewickelt. Wir wollen annehmen, daß der Draht noch seine jungfräuliche Magnetisierung besitze. In (1) verläuft dieser Draht um Bruchteile eines Millimeters entfernt vom Spalt eines kleinen Magnetkreises, der es je nach dem zu

registrierenden Strom i mehr oder weniger stark magnetisiert. Es sei i_1 z.B. der von einem Mikrophon herrührende Wechselstrom, dem eine Gleichstromkomponente i_0 zur Vormagnetisierung der Anordnung überlagert ist. Diese Anordnung nennt man *Registrierkopf*.

Wegen der Hysteresis behält das Band oder der Draht eine gewisse, vom Ort abhängige veränderliche Induktion, die durch die Intensität des Feldes gegeben ist, das auf diesen Teil des Bandes eingewirkt hat. Läßt man nun später das Band in umgekehrter Richtung von R_2 nach R_1 ablaufen, so erhält man im „Hörkopf", der durch einen fast gleichen Magnetkreis gebildet wird, ein Signal. Dieser Hörkopf wird auf eine hier nicht dargestellte Art vormagnetisiert. Er ist im Schema der Abbildung mit (2) bezeichnet und liefert an den Klemmen einer Spule eine elektromotorische Kraft e_2, die man in einem Röhrenverstärker zur Wiedergabe des Signals ausnutzen kann.

Mit dieser Anordnung ist es möglich, die Wiedergabe des Signals sehr oft durchzuführen, und man kann die mit Signalen versehenen Bänder beliebig lange aufbewahren.

Die Bänder lassen sich mehrmals benützen, wenn man das erste Signal wieder „löscht". Das einfachste Verfahren dazu ist die Anbringung eines starken Magnetkreises in (3), der das Band bis zur Sättigung magnetisiert. In einem solchen Fall wirkt der „Sprechkopf" (1) auf ein gesättigtes Band ein, und seine Aufgabe ist es, das Band mehr oder weniger zu entmagnetisieren. Das Feld des Sprechkopfes ist in diesem Fall entgegengesetzt zum Feld des Löschkopfes gerichtet.

Diese Geräte wurden hier erwähnt, da sie eine sehr weite Verbreitung gefunden haben.

Magnetometer mit Permalloy

Während des Krieges 1939–1945 wurden Magnetometer zum Auffinden von Minen, von nicht explodierten Bomben und Granaten und zur Feststellung von Unterseebooten auf breiter Basis entwickelt. Alle diese Objekte sind magnetisch, oder sie nehmen, wenn sie aus Eisen sind, durch die Wirkung des Erdfeldes eine induzierte Magnetisierung an, die ausreicht, um das Erdfeld in ihrer Umgebung zu verändern. Daraus ergab sich der Gedanke der Anwendung von Magnetometern zu ihrem Auffinden.

Die Magnetometer in ihrer klassischen Form mit einem Permanentmagneten sind jedoch für diesen Zweck ungeeignet (Aufhängung, Unbeweglichkeit, Dauer der Messungen usw.).

Die Geräte, deren Prinzip wir jetzt beschreiben wollen, erreichen leicht die gleiche Leistung (Bruchteile eines Gammas, $1\gamma = 10^{-5}$ Oersted). Ihr Aufbau ist etwas komplizierter, hat jedoch den Vorteil, sehr leicht kurzzeitige Messungen zu gestatten.

a) Magnetisches Bolometer

Ein Bolometer besteht aus einer WHEATSTONEschen Brücke, deren einer Widerstand einen großen Temperaturkoeffizienten besitzt. Das Nichtgleichgewicht der Brücke kann als Maß für die Temperatur dieses Widerstandes verwendet werden.

Wir benutzen jetzt eine analoge Brücke, bei der jedoch einer der Widerstände R von einem *Permalloydraht* gebildet wird (Abb. 366). In diesem Fall *hängt der Widerstand von dem umgebenden magnetischen Feld ab.* Wirkt auf die Brücke ein *Wechsel-*

strom ein, dann ist der Widerstand vom Skin-Effekt abhängig. Der Skin-Effekt ist sehr bedeutend, da die Eindringtiefe in den Draht sich mit $\frac{1}{\sqrt{\mu}}$ verändert und μ sehr groß ist. Nun hängt jedoch μ selbst vom magnetischen Feld ab, und das Nichtgleichgewicht der Brücke ist schließlich ein Maß für die Veränderungen des magnetischen Feldes. Außer diesem Effekt findet man noch eine „Magnetoresistenz", d.h. mit anderen Worten, der Widerstand verändert sich mit dem magnetischen Feld. Dieser Effekt tritt auch bei Gleichstrom auf, ist dort jedoch gering und wird technisch nicht ausgenutzt.

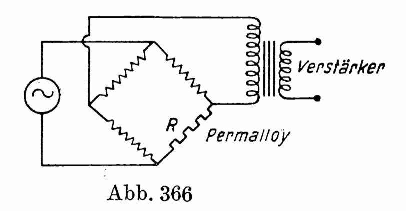


Abb. 366

b) *Magnetometer mit gesättigtem Permalloy*

Verzichtet man auf Einzelheiten und vernachlässigt die Hysteresis, dann hat ein Permalloystab in Abwesenheit irgendwelcher permanenter Magnetfelder die in Abb. 367 (1) dargestellte Magnetisierungskurve. Verändert man dagegen das Feld H in einem sehr schnellen Wechsel (z.B. durch eine von einem sinusförmigen Wechselstrom durchflossene Spule), also nach dem Gesetz

$$H = H_1 \sin \omega t,$$

dann verändert sich die Induktion nur kurzfristig zu den Zeiten $t = 0$, $t = \frac{2\pi}{\omega}$ usw. Dies bestimmt das Veränderungsgesetz (Abb. 367, (1′)) für $\frac{dB}{dt}$.

Betrachten wir jetzt den gleichen Permalloystab in einem permanenten Magnetfeld H_0 ($H_0 < H_1$) und setzen ihn dem gleichen Wechselfeld aus. Wir erhalten nun die gleichen Effekte, die jedoch *zeitlich verschoben* sind. Die Kurve $\frac{dB}{dt}$ wird also die in (2′) dargestellte Form besitzen.

Abb. 367

Jetzt lassen wir in dem gleichen Stab einen Strom in *umgekehrter Richtung* fließen (wobei wir z.B. auch die Polung des Fluxmeters umkehren müssen, welches $\frac{dB}{dt}$ mißt), so entspricht dies einer Veränderung des Vorzeichens von H_0. Wir erhalten also den in Abb. 367 (3′) dargestellten Verlauf für $\frac{dB}{dt}$.

Schalten wir jetzt die Stäbe (2) und (3) gegeneinander. Wir erhalten an den Klemmen des Ensembles der beiden von einem Strom $\sin \omega t$ durchflossenen, in Reihe geschalteten Stäbe eine elektromotorische Kraft, die Null ist, wenn kein Feld H_0 vorhanden ist (1″). Ist ein Feld H_0 in einer bestimmten Richtung vorhanden, so bewirkt die elektromotorische Kraft den in (2″) dargestellten Verlauf der Induktionsveränderung. Hat dagegen das Feld H_0 die dazu entgegengesetzte Richtung, so hat die Kurve die in (3″) dargestellte Form.

Diese elektromotorische Kraft kann auf Elektronenröhrenschaltungen übertragen werden, die durch sehr verschiedene Verfahren eine Messung des Feldes H_0 gestatten.

Auch ist es möglich, Brückenschaltungen zu verwenden, um mit ihrer Hilfe die durch den OHMschen Widerstand in den Stäben auftretende elektromotorische Kraft usw. zu eliminieren.

Nach dem Prinzip der vorstehenden Erläuterungen ist es tatsächlich die Phasenverschiebung zwischen den Maxima und Minima von $\frac{dB}{dt}$, die die Messung von H_0 ermöglicht. Tatsächlich haben die Induktionskurven jedoch nicht die einfache in Abb. 367 dargestellte Form. Ist eine permanente magnetische Polarisation H_0 vorhanden, so wird der Stab auf einer Seite mehr gesättigt sein als auf der anderen. Dadurch muß man nicht nur mit einer Phasenverschiebung, sondern auch mit einer Amplitudenveränderung zwischen den positiven und negativen Punkten rechnen. Diese Tatsachen erschweren jedoch die Messung nicht.

In diesen Magnetometern muß das permanente Erdfeld durch genau dosierte Gleichströme in den Wicklungen ausgeglichen werden.

So hat man diese Magnetometer z. B. in Flugzeugen angebracht, die in niedriger Höhe über dem Meer fliegen, um eventuell vorhandene Unterseeboote feststellen zu können. Obwohl diese Apparate nur eine geringe Reichweite besitzen, wird dieser Nachteil durch die Fluggeschwindigkeit ausgeglichen. Diese Technik hat sich besonders an engen Meeresstellen als vorteilhaft erwiesen, so z. B. in der Meerenge von Gibraltar, wo die Amerikaner 1943 mehrere deutsche Unterseeboote ausmachen und versenken konnten.

Heute werden derartige Magnetometer besonders in Nordkanada zu geophysikalischen Untersuchungen verwendet. Der Einbau in ein Flugzeug erfordert jedoch immer eine sehr vollkommene Stabilisierung der Orientierung, um eine Inklination des Magnetometers gegenüber dem Magnetfeld der Erde zu verhindern. Im allgemeinen wird dies durch einige Kunstgriffe erreicht.

Magnetische Verstärker

Ein Dynamo oder eine Wechselstrommaschine stellen vom *elektrischen Standpunkt* einen Leistungsverstärker dar. Wie wir gesehen haben, gestattet eine Erregerleistung von 1–4% der Gesamtleistung, die im Induktor verbraucht wird, die Gesamtleistung vollkommen zu steuern. Es ist jedoch keineswegs erforderlich, umlaufende Teile zu verwenden, um diese rein elektrischen Effekte zu erhalten. Die unter dem Namen „*magnetische Verstärker*“ bekannten Apparate geben für dieses Problem eine Lösung, deren Prinzip behandelt werden soll.

In Abb. 368 ist ein Magnetkreis mit einer Wicklung (1) in Reihe mit einem Widerstand R dargestellt, der aus einer Wechselstromquelle gespeist und von dem Strom i durchflossen wird. Eine zweite Wicklung (2) wird von einem Regelgleichstrom durchflossen, der die Sättigung des Eisens, also den Strom i steuert, indem er den Wert der Selbstinduktion (1) bestimmt. Man kann dann die Leistungsveränderung in R auf die Veränderung der Gleichstromleistung, die zur Steuerung benötigt wird, beziehen und bei diesem Apparat wie bei einem Leistungsverstärker den Verstärkungsfaktor definieren.

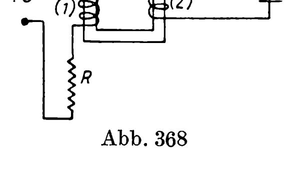


Abb. 368

Ein Fehler, den man vermeiden muß, ist das Arbeiten mit konstanter Induktion, d.h. die Spule (1) an die Klemmen einer Stromquelle ohne Scheinwiderstand zu legen und die verfügbare Leistung über eine Sekundärwicklung zu entnehmen. In diesem Fall erreicht man durch die konstant gehaltene Induktion in der Primärwicklung auch eine konstante (Wechsel-) Spannung in der Sekundärspule. Nur die geringe Streuinduktion verändert sich in dem Maß, wie die Bleche gesättigt sind, und jede Steuerung der Leistung ist unmöglich.

Das Schema der Abb. 368 ist auch noch in anderer Hinsicht kritisch: In der Gleichstromsteuerwicklung treten Wechselspannungen auf. Diesen Nachteil überwindet man, indem man die in den beiden Gleichstromsteuerspulen induzierten Flüsse einander entgegengesetzt schaltet. Die Abb. 369 zeigt eine derartige Anordnung; auf dem gleichen Prinzip beruhende gibt es in vielen Ausführungen.

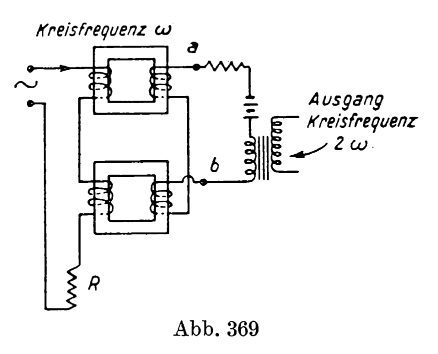


Abb. 369

Bei solchen Schaltungen liegt der Leistungsfaktor in der Größenordnung von 25. Man kann ihn auf 100–1000 erhöhen, wenn man den folgenden Kunstgriff der *Rückkopplung* anwendet: Der austretende Strom wird in einer Gleichrichterbrücke gleichgerichtet und dann durch zusätzliche Gleichstromsteuerspulen geschickt.

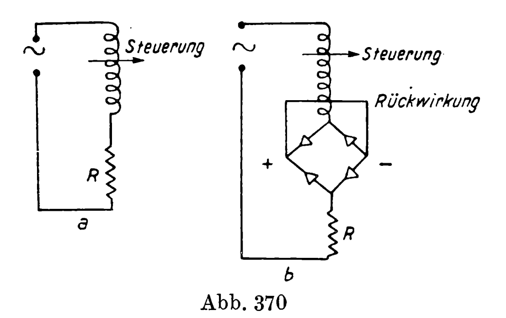


Abb. 370

Die Abb. 370 (b) gibt eine Prinzipschaltung an, während 370 (a) die Abb. 369 schematisiert zeigt.

Eine solche Selbstinduktion, die durch Gleichstromwicklungen gesteuert wird, nennt man gewöhnlich Sättigungsdrossel.

Polarisierte Magnetverstärker

Man nennt einen Magnetverstärker *polarisiert*, wenn der austretende Strom seine Richtung mit der Richtung des Steuerstroms ändert. Ist der Steuerstrom Null, so existiert kein gleichförmiges Magnetfeld zur Polarisation der Bleche. Es ist klar, daß beim Auftreten eines Steuerstroms, gleich welcher Richtung, die Selbstinduktion des Magnetverstärkers verringert wird. Mit einfachen Mitteln kann man bereits vorher ein beachtliches gleichförmiges Feld erzeugen und damit erreichen, daß der

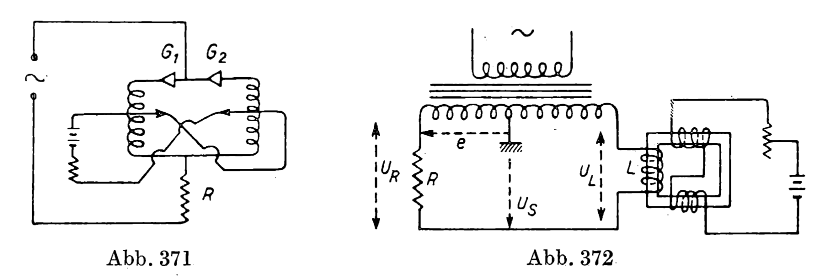


Abb. 371 Abb. 372

Steuerstrom, je nach seiner Richtung, zu dem ursprünglichen gleichförmigen Feld einen Bruchteil addiert oder subtrahiert: Der Magnetverstärker ist polarisiert.

Ohne auf die folgende Schaltung einzugehen, können wir trotzdem allgemein sagen (Abb. 371): Der Magnetverstärker besteht aus zwei verschiedenen Selbstinduktionen und zwei Gleichrichtern G_1 und G_2, die den Strom in der einen oder anderen Richtung, entsprechend seinem Sinn, gleichrichten. Die gleichgerichtete Komponente in jeder Selbstinduktion ruft gleichzeitig eine *Polarisation* und ebenso eine *Rückkopplung* hervor, da sie anwächst, wenn der Steuerungsstrom die Selbstinduktion sättigt.

Unter den vielen verschiedenen Schaltungen, die man mit Magnetverstärkern wählen kann, wollen wir besonders den „Nullverstärker" erwähnen. Bei diesem werden Gegentaktschaltungen verwendet, um austretende Spannungen zu erreichen, die im Gleichgewichtszustand Null sind und mit der Richtung des Steuerstroms ihr Vorzeichen verändern.

Die magnetischen Verstärker finden in den Fällen Verwendung, in denen eine Anwendung von Elektronenröhren aus verschiedenen Gründen nicht möglich ist (z.B. militärische Zwecke), sowie bei der Verstärkung von schwachen Strömen bei geringem Scheinwiderstand, d.h. in Fällen, in denen es sich um Gleichspannungen in Bruchteilen von Mikrovolt handelt, die zu verstärken mit Röhren sehr schwierig ist. Besser als Röhrenverstärker gestatten diese den *Nullabgleich* bei Gleichstromverstärkung. Dagegen besitzen sie den ersteren gegenüber eine große Zeitkonstante, die durch die Selbstinduktion des Eingangskreises und die Reaktanz, die alle kurzzeitigen Signale verzerrt, bedingt ist.

Als Anwendung der magnetischen Verstärker werden wir jetzt den in Abb. 372 angegebenen Stromkreis betrachten, der es gestattet, die *Phase* einer Wechselspannung zu variieren, ohne ihre Amplitude zu verändern:

Die den beiden äußeren Klemmen der Sekundärspule zur Speisung der Anlage entnommene Spannung betrage $2e$. Diese Sekundärwicklung ist über einen in Reihe mit einer Selbstinduktion L liegenden Widerstand R geschlossen. Die Selbstinduktion L kann durch eine mit Gleichstrom hervorgerufene magnetische Steuerung verändert werden. Wir nennen die an den Klemmen von R und L auftretenden Spannungen U_R und U_L und interessieren uns für die Spannung U_S, die zwischen dem Mittelpunkt des Transformators und dem Verbindungspunkt von R und L liegt. U_R und U_L sind um 90° gegeneinander phasenverschoben, wodurch wir das in Abb. 373 angegebene Diagramm erhalten, das ohne weitere Erläuterungen verständlich ist. Man sieht, daß sich U_S, der Radius des Kreises, dreht und konstant bleibt, wenn der Punkt M einen Halbkreis unter dem Einfluß der Veränderung von U_R beschreibt. Die Spannung U_S verändert also ihre Phase ohne Veränderung der Amplitude (Abb. 373).

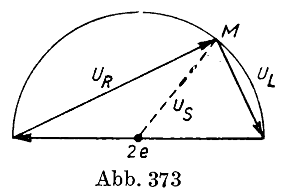


Abb. 373

Modulatoren

Die Beziehung zwischen B und H ist in einem Magnetkreis nicht linear. In erster Näherung setzt man zur Beschreibung der Sättigung

$$B = \mu H - a H^3.$$

Daraus ergibt sich in einem der Abb. 369 entsprechenden Kreis eine an den Klemmen a, b auftretende harmonische Spannung, deren Frequenz das Doppelte derjenigen der Speisespannung beträgt und die das, allerdings verstärkte, Signal der Steuergleichspannung bildet. Dieser Stromkreis stellt einen *Modulator* dar.

Wir nehmen jetzt an, daß

$$H = H_0 + H_1 \sin \omega t$$

ist, wobei H_0 vom Steuerstrom und $H_1 \sin \omega t$ vom Durchgang des Wechselstroms durch die Primärwicklung erzeugt werden. Dann ist $\frac{\partial B}{\partial t}$ ein Maß für die in den Windungen auftretenden elektromotorischen Kräfte, und in $\frac{\partial B}{\partial t}$ findet man

$$\frac{\partial}{\partial t} (3\, a\, H_0\, H_1^2 \sin^2 \omega\, t).$$

Diese Spannung, die ihr Vorzeichen mit H_0 verändert, wird also in den in Reihe gelegten Primärwindungen verschwinden, dagegen doppelt so hoch sein in den zur Steuerung dienenden Wicklungen (oder jeder anderen in gleicher Weise angebrachten Spule), die für den Wechselstrom mit der Grundfrequenz die entgegengesetzte Wicklungsrichtung besitzen. Andererseits weist diese Spannung die Kreisfrequenz 2ω auf.

Auf diese Weise hat man einen *Modulator* gewonnen. Der erhaltene austretende Wechselstrom ist ein Maß für die eintretende Gleichspannung. Er kann im folgenden z. B. durch einen Röhrenverstärker sehr viel einfacher weiter verstärkt werden.

V. KAPITEL

Elektromechanische Schwinger. Wandler

Die Wandler

Den Namen *Wandler* hat man zur Bezeichnung solcher elektromechanischer Schwinger eingeführt, mit deren Hilfe man entweder die Leistung eines Wechselstroms in mechanische oder akustische Leistung oder umgekehrt, die Leistung einer Schallwelle oder einer Schwingung in ein verstärkbares, registrierbares usw. elektrisches Signal umwandeln kann. Von diesen Anordnungen wollen wir die folgenden behandeln:

elektrodynamischer Lautsprecher und Mikrophon;
elektromagnetischer Lautsprecher und Mikrophon;
elektrostatischer Lautsprecher und Mikrophon;
Tonabnehmer und Tonaufzeichner für Schallplatten;
Ultraschallapparate, Mikrophone, Sender usw.

In dieser kurzen Aufzählung sind nur *reversible* Geräte enthalten, deren elektromechanische Umwandlung mit einem Wirkungsgrad in der Nähe von 1 erfolgt. Daneben gibt es interessante Anordnungen, die jedoch zu einer anderen Gruppe gehören und die Zuführung einer zusätzlichen Energie erfordern:

Beim Kohlemikrophon, wo der Widerstand zwischen den kleinen Kohlekörnern im Rhythmus der Schallwellen moduliert wird, rührt das elektrische Wechselsignal von einem Effekt her, der analog einem mehr oder weniger geschlossenen Ventil ist, das auf den Durchgang eines ursprünglich kontinuierlichen Stromes wirkt. Daneben kann man die Lautsprecher mit moduliertem Luftstrahl erwähnen: Ein starker Luftstrom wird mehr oder weniger durch ein von einem elektrischen Signal gesteuertes Ventil oder Gitter abgeschlossen. Der Ton wird durch die Modulation des Strahls hervorgerufen. Diese Apparate sind nicht reversibel und gestatten keine allgemeine Untersuchung.

Elektrodynamische Wandler

Der *elektrodynamische Lautsprecher* ist ein gutes Beispiel, an dem man die ganze Theorie der Wandler darstellen kann. Sein Aussehen ist aus den Radioempfängern bereits gut bekannt. Erinnern wir uns kurz seines Prinzips (Abb. 374):

Wir bezeichnen den Permanent- oder Elektromagneten, der im *ringförmigen* Luftspalt ein *radiales* magnetisches Feld hervorruft, mit A. N sei z. B. ein Nordpol und S ein ringförmiger Südpol, der den Nordpol umgibt. Die Kraftlinien haben die in Abb. 375 dargestellte Form. In diesen Luftspalt taucht eine Spule, deren Windungen im Schnitt in Abb. 374 zu erkennen sind. Die Gesamtlänge l des Drahtes steht senkrecht zur Induktion B im Spalt. Wird nun die Spule von einem Strom i

durchflossen, so unterliegt sie also einer *longitudinalen* (entsprechend der Achse des Magneten) LAPLACE-Kraft Bli, und bei einer Verschiebung der Spule mit der Geschwindigkeit v erzeugt sie eine elektromotorische Induktionskraft mit dem Wert $-Blv$. Das Minuszeichen resultiert aus der LENZschen Regel, und in beiden Fällen ist der gleiche Richtungssinn vorausgesetzt. Diese Formeln enthalten bei Verwendung von kohärenten Einheiten (z. B. elektromagnetischen CGS-Einheiten) keine Koeffizienten.

An der Spule ist eine *Membran* befestigt, die mit Hilfe einer Feder F_1 um eine definierte Mittellage schwingen kann. Neben der Bewegung dieser Membran

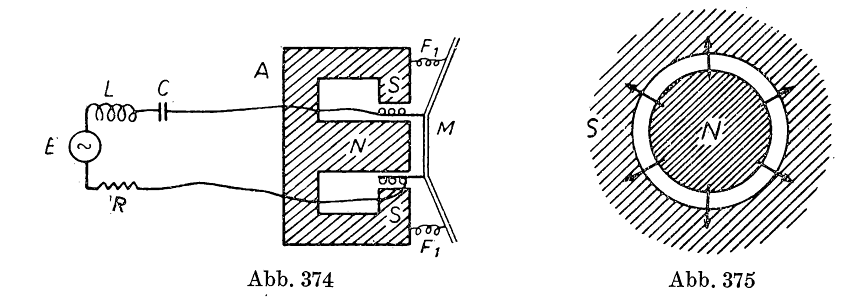


Abb. 374 Abb. 375

können auch noch kompliziertere Deformationen auftreten. Wir werden in unserem Fall jedoch annehmen, daß die Membran starr bleibt und sich wie ein flacher Kolben bewegt. Schließlich liegt die Spule noch in einem elektrischen Kreis, den wir schematisch als Beispiel durch einen Generator, eine Selbstinduktion, einen Widerstand und eine Kapazität in Reihenschaltung darstellen.

(In der Praxis wird die Selbstinduktion zum Teil durch die Selbstinduktion der Spule selbst und zum Teil durch die Selbstinduktion eines Anpassungstransformators [beim Lautsprecher] oder eines Leistungstransformators [beim Mikrophon] gebildet; der Widerstand wird durch denjenigen dieser verschiedenen Schaltelemente sowie den eines Ausgangskreises gegeben. Eine Kapazität braucht nicht vorhanden zu sein.)

Es ist also möglich, eine mechanische Gleichung aufzustellen, die die Bewegung x (Longitudinalverschiebung) der Spule beschreibt

$$m\frac{d^2x}{dt^2} + f\frac{dx}{dt} + Kx = \text{äußere Kräfte} = Bli + F.$$

Dabei ist f der Koeffizient einer viskosen Reibungskraft $f\frac{dx}{dt}$, von der wir noch sprechen werden; K ist die Federkonstante, m die Masse der Spule und der Membran; F stellt die angelegte äußere Kraft dar, die z. B. aus einem auf die Membran wirkenden Schalldruck besteht.

Ebenso kann man eine elektrische Gleichung aufstellen:

$$L\frac{di}{dt} + Ri + \frac{1}{C}\int i\,dt = E - Blv = E - Bl\frac{dx}{dt};$$

(i ist dabei der in der Spule fließende Strom und E eine in den Kreis eingeführte elektromotorische Kraft, wie z.B. beim Lautsprecher). Führt man jetzt $v = \frac{dx}{dt}$ an Stelle von x ein, so erhalten unsere beiden Gleichungen die Form

$$F = m\frac{dv}{dt} + fv + K\int v dt - Bli, \tag{1}$$

$$E = L\frac{di}{dt} + Ri + \frac{1}{C}\int i dt + Blv. \tag{2}$$

Die Symmetrie dieser Gleichungen in i und v ist offensichtlich.

Symmetrie und Vorzeichen der Kopplungskoeffizienten

In der ersten, der mechanischen Gleichung, ist die *Geschwindigkeit* v die Variable, und es tritt ein elektrischer *Kopplungsterm* $-Bli$ auf. In der zweiten, der elektrischen Gleichung, ist die Variable der *Strom*, und es tritt ein mechanischer *Kopplungsterm* Blv auf. Schreibt man die Gleichungen korrekt, d.h. mit der Bedingung, daß alle Terme in der mechanischen Gleichung eine Kraft und alle Terme in der elektrischen Gleichung eine Spannung darstellen, so ist der Koeffizient des Kopplungsterms Bl in beiden Ausdrücken gleich. Die *Vorzeichen* der entsprechenden Terme sind jedoch entgegengesetzt: $-Bli$ für die Kräfte, $+Blv$ für die Spannungen.

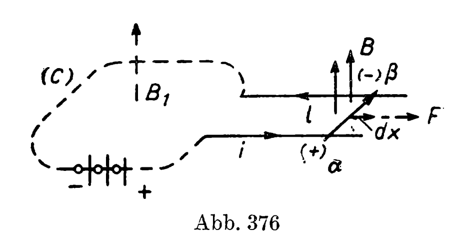


Abb. 376

Man kann zeigen, daß diese Eigenschaft eine Konsequenz der Tatsache ist, daß sich die elektrische Energie infolge der gleichzeitigen Einwirkung der LAPLACEschen Kräfte und der elektromagnetischen Induktionskräfte mit einem Wirkungsgrad 1 in mechanische Energie umwandelt und umgekehrt.

Um dies zu sehen, betrachten wir den einfachen in Abb. 376 dargestellten Fall, bei dem ein Stab der Länge l von einem Strom i durchflossen und einem senkrechten Magnetfeld mit der Induktion B unterworfen wird. Man sieht, daß in der Richtung F eine LAPLACEsche Kraft Bli wirkt. Bei einer seitlichen Verschiebung des Stabes um die Größe dx, d.h. in der Richtung von F, leistet die Kraft F die *Arbeit* $F dx$, die in dem in der Abbildung dargestellten Fall *positiv* ist. Diese Arbeit kann jedoch nur von der Batterie (der einzigen Energiequelle), die den Strom liefert, erzeugt werden. Nun wissen wir durch die Induktionsgesetze, daß bei der *Bewegung* des Stabes l im Feld B, die mit der Geschwindigkeit $v = \frac{dx}{dt}$ erfolgt, eine elektromotorische Kraft mit dem Wert $-Blv$ auftritt, die in dem betrachteten Beispiel *negativ* ist.

(Genau gesagt wäre die elektromotorische Kraft $-\frac{d\Phi}{dt}$ mit $d\Phi = Bl dx$, wenn die Länge l in dem konstanten Feld B um dx verschoben wird und die drei Vektoren l, B, dx oder v aufeinander senkrecht stehen.)

Daraus folgt, daß jedes Coulomb, das in Richtung der Leistungsabgabe der Batterie fließt, wegen dieser elektromotorischen Kraft die elektrische Energie $+Blv$ oder $Blv\,dq$ *verliert*. Nun ist jedoch $v = \frac{dx}{dt}$, und man kann für diese Größe auch schreiben

$$Bl\frac{dq}{dt}dx \quad \text{oder} \quad \left(\text{mit } i = \frac{dq}{dt}\right) \qquad Bli\,dx \quad \text{oder} \quad F\,dx;$$

dabei ist F die LAPLACE-Kraft.

Wir sehen nun, daß die Gleichheit des Koeffizienten Bl der Kopplungsterme in beiden Gleichungen (1) und (2) folgendes bedeutet: Die durch die Wirkung der elektromotorischen Kraft Blv verlorengehende elektrische Energie wird durch die *Energieabgabe* ausgeglichen, deren Größe gerade einer mechanischen Arbeit, nämlich der der LAPLACEschen Kraft entspricht. Man kann also von einer Energieumwandlung mit dem Wirkungsgrad 1 sprechen. Es würde nicht das gleiche sein, wenn die Energie *mehrere* Umwandlungsmöglichkeiten hätte. Bei einer Batterie z.B. vergrößert oder verringert sich die durch die Reaktion erzeugte chemische Energie, die die elektrische Energie liefert, je nachdem ob ein positiver oder negativer Wärmeaustausch der Batterie selbst mit der Umgebung auftritt. In der Elektrodynamik gibt es jedoch zu diesem Experiment kein Analogon.

Die *Korrektur der Vorzeichen* $-$ bzw. $+$ vor den Kopplungstermen $-Bli$ und $+Blv$ in den Gleichungen (1) und (2) erklärt sich durch die von uns im folgenden angestellten Überlegungen. Wir wollen dazu unsere Aufmerksamkeit der Abb. 376 zuwenden.

Die Achsen B, F, l in dieser Abbildung sind, wenn l in Richtung des Pfeiles (der in unserem Fall die Richtung von i besitzt) verläuft, *links*drehende Achsen. Der Strom i, dessen Richtung durch die Pfeile gekennzeichnet ist, wird in unserem speziellen Beispiel ebenso wie B und auch die Kraft F durch eine *positive* Zahl bestimmt. Betrachten wir nun eine positive Verschiebung von l, so sehen wir, daß die Kraft eine Arbeit *leistet*. Die Energieerhaltung erfordert, daß der Strom i dann einen Energieverlust aufweist, d.h., wir müssen in α ein höheres Potential finden als in β. Wir können die *LENZsche Regel* als gültig annehmen, können dies jedoch auch nachweisen: Durch den Kreis C tritt ein bestimmter, von B verursachter Fluß, der *positiv* ist, da i um B im sogenannten trigonometrischen Sinn, d.h. umgekehrt zum Uhrzeigersinn, verläuft. Verschiebt man den Draht l in Richtung positiver dx, so vergrößert sich der positive Fluß von B durch C. Die auftretende elektromotorische Induktionsspannung muß nun diesen Fluß verringern, d.h., sie verursacht einen neuen Strom i', um den i *verkleinert* wird oder, anders gesagt, der in umgekehrtem Sinn fließt. Daher ist das Potential an den Klemmen von l so, daß der Punkt α gegenüber β positiv ist. Wir sehen, daß die Erklärung mit der LENZschen Regel den gleichen Sinn für die Induktion ergibt wie die Erklärung mit der Energieerhaltung bei der elektromechanischen Umwandlung.

Außerdem werden die Richtungen und diese Vorzeichen durch die beiden entgegengesetzten Vorzeichen $-Bli$ und $+Blv$ in den Gleichungen (1) und (2) korrekt ausgedrückt: Im vorstehenden Experiment sind Bli und Blv beide *positiv*. Die äußere Kraft Bli ergibt sich also zu $+Bli$ im linken Glied von Gleichung (1)

(äußere Kräfte), jedoch zu $-Bli$ im rechten Glied (Reaktion). Dies ist notwendig, damit eine positive *vom System geleistete* Arbeit auftreten kann, wenn dx positiv ist. Die elektromotorische Kraft berechnet sich zu $-Blv$ in dem Term für die angelegte elektromotorische Kraft, und dies ist auch notwendig, damit die fließenden Coulomb die der Batterie entnommenen (elektrischen) Joule kompensieren.

Schließlich ist es wichtig, die beiden Kopplungsterme in den Gleichungen (1) und (2) mit entgegengesetzten Vorzeichen anzugeben. Die gleichzeitige Vertauschung beider Vorzeichen entspräche einer Umkehrung des Sinnes von B und gerade einem anderen physikalischen Fall, der ebenfalls möglich ist, wenn man bei der Betrachtung die Richtungen vertauscht. Zwei gleiche Vorzeichen (+ oder −) ergäben jedoch (theoretisch) ein katastrophales Ergebnis, da die Verschiebung dx gleichzeitig eine mechanische Energie und eine (übrigens gleich große) elektrische Energie liefern würde. Dies ist eine Annahme, die offensichtlich falsch ist.

Die beiden Gleichungen (1) und (2) gestatten uns nun, sogenannte *elektrodynamische Systeme mit beweglicher Spule* zu untersuchen, die durch sie beschrieben werden. Setzt man in diesen Gleichungen $F = 0$ und $E = E_0 e^{j\omega t}$, so erhält man die *Funktion eines Lautsprechers*: Ein von einer äußeren Stromquelle E gelieferter Wechselstrom fließt durch die Spule und verursacht deren Bewegung. Diese Bewegung ruft in dem Medium, in dem sich die Membran befindet (Luft, Wasser ...) eine entsprechende akustische Strahlung hervor. Für den Fall $E = 0$, $F = F_0 e^{j\omega t}$ erhält man dagegen die *Funktion eines Mikrophons*: Auf die Oberfläche S der Membran fällt eine Schallwelle. Ihr Druck $P = P_0 e^{j\omega t}$ (am Ort der Membran) ergibt hier eine Kraft $F = PS$, und diese Kraft ($F_0 = P_0 S$) führt zu einer Bewegung der Membran. Diese Bewegung verursacht in der mit der Membran fest verbundenen Spule eine elektromotorische Induktionskraft ($-Blv$), die zu einem Strom i Veranlassung gibt, den man messen, verstärken, durch einen Transformator oder in einen Telephonhörer schicken kann usw. Man sieht, daß der Lautsprecher und das elektrodynamische Mikrophon nur eine einzige und gleiche Anordnung darstellen, bis auf kleine Abweichungen, die wir im folgenden angeben.

Bedeutung der Koeffizienten

Es ist notwendig, noch auf die Bedeutung der Koeffizienten einzugehen. Bei m und K sowie für L und C gibt es keine Schwierigkeiten. Es wird immer angegeben, ob die Selbstinduktion der beweglichen Spule in L enthalten ist; die Selbstinduktion wird bei unbeweglicher Spule gemessen. Weiterhin wird vorausgesetzt, daß die Bewegungsamplitude dieser Spule so klein ist, daß diese nicht aus dem Spalt heraustritt, sonst wäre L als Funktion von x variabel. Diese Selbstinduktion muß gemessen werden, indem man die Spule in den Magneten einbringt, wodurch eine Verringerung durch die Kopplung mit dem Eisen auftreten muß. Der Ausdruck für die Selbstinduktion wird dann $L - \frac{M^2}{L_1}$, wobei L_1 die Selbstinduktion der den im Eisen induzierten Strömen entsprechenden Kreise ist und M die gegenseitige Induktion zwischen L und L_1. Die Koeffizienten R und f verdienen größere Aufmerksamkeit.

Bei unbeweglicher Anordnung bezeichnen wir mit R den *Gesamt*widerstand des elektrischen Stromkreises bei der betrachteten Frequenz. Dabei sind in R bereits die passiven Widerstände der Elemente des Stromkreises enthalten, einschließlich (wenn es sich um einen Lautsprecher handelt) der Primärwicklung eines Transformators, an deren Sekundärwicklung die Spule liegt, bzw. einschließlich (bei einem Mikrophon) des Verbraucherkreiswiderstandes (z.B. ebenfalls eines Transformators).

Für f gilt genau das gleiche: Wir verstehen unter f einerseits einen die mechanischen Reibungen (die oft recht beträchtlich sein können) beschreibenden Faktor. Häufig wird die Membran zur Erreichung einer bestimmten gewollten Dämpfung durch einen Filzring gehalten. Andererseits enthält f jedoch auch den sogenannten *Strahlungswiderstand* (mechanischer Widerstand) der schwingenden Membran, die Energie in das sie umgebende Medium abstrahlt.

Bemerkungen über den Strahlungswiderstand

Obwohl wir in diesem Zusammenhang nicht die gesamte Akustik wiederholen können, ist ein gewisses Minimum an Erklärungen doch unerläßlich.

Wir betrachten einen flachen Kolben mit der Oberfläche S, der auf dem Boden eines mit Flüssigkeit gefüllten Rohres mit der Geschwindigkeit $u = u_0 \sin \omega t$ schwingt. Die Schallgeschwindigkeit in der Flüssigkeit sei c. Der Kolben erzeugt eine *Schallwelle*, die (Abb. 377) sich nach rechts ausbreitet. Die Geschwindigkeit des Luftquerschnittes in x wird durch die Beziehung

$$u(x, t) = u\left(0, t - \frac{x}{c}\right) = u_0 \sin \omega\left(t - \frac{x}{c}\right)$$

Abb. 377

gegeben.

Daneben ist das Auftreten dieser variablen Geschwindigkeit des Luftquerschnittes von einem proportionalen *Schalldruck*

$$P = \varrho c u$$

begleitet, wobei ϱ die Flüssigkeitsdichte ist und nur wenig durch die Bewegung verändert wird. Ebenso variiert auch der statische Druck P_0 der Flüssigkeit nur wenig mit P.

Dieser Druck P ist in jedem Punkt *isotrop*, da die Flüssigkeit als ideal angenommen wird, und wirkt besonders auf den Kolben selbst, den man in nur wenig von $x = 0$ verschobener Stellung annehmen kann. Auf diesen Kolben wirkt also eine Kraft F, die *zu seiner Geschwindigkeit entgegengesetzt gerichtet* ist und folglich die Größe

$$F = PS = S\varrho c u = S\varrho c u_0 \sin \omega t$$

besitzt.

In der Gleichung des durch eine bewegliche Spule angeregten Kolbens muß man also schreiben

$$m\frac{d^2x}{dt^2} + Kx = Bli - F,$$

wobei $F = S\varrho c\frac{dx}{dt}$. Setzen wir $f = S\varrho c$, dann gilt

$$m\frac{d^2x}{dt^2} + f\frac{dx}{dt} + Kx - Bli = \text{die anderen äußeren Kräfte;}$$

$$= 0 \text{ für einen Lautsprecher.}$$

Das so bestimmte f bezeichnet man als *Strahlungswiderstand*, da $f\left(\frac{dx}{dt}\right)^2$ offensichtlich die *Leistung* ist, die der Kolben in Form akustischer Strahlung an die Flüssigkeit abgibt.

In der Praxis strahlt ein Lautsprecher nicht in ein Rohr. Es muß vielmehr beachtet werden, daß jedes Element der Membranoberfläche Wellen aussendet, d.h. als elementare HUYGENSsche Quelle wirkt. Diese Wellen interferieren miteinander und geben ein resultierendes Strahlungsdiagramm.

In Abb. 378 sind drei verschiedene Fälle dargestellt: a) Ist die Frequenz hoch, dann ist die in der Flüssigkeit gemessene ausgestrahlte Wellenlänge sehr viel kleiner

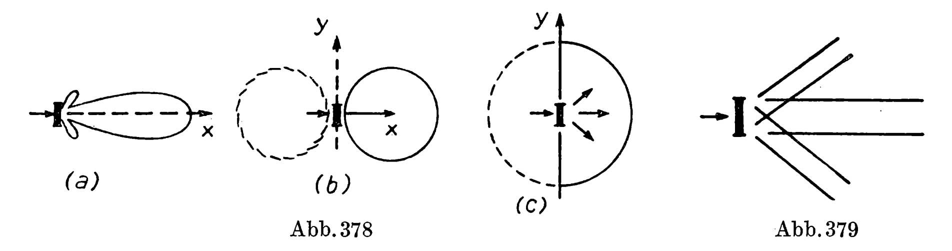


Abb. 378 Abb. 379

als der Membrandurchmesser. Da die seitliche Strahlung sich wegen der *Interferenzen* der von den einzelnen Punkten ausgehenden Wellen nahezu aufhebt, handelt es sich um ein Strahlungsdiagramm mit großer Richtwirkung. Dies ist z.B. der Fall beim Schalltrichter. Für den Strahlungswiderstand erhält man

$$f = S\varrho c.$$

b) und c) Die Wellenlänge ist viel größer als der Membrandurchmesser. Verschiedene Wellen besitzen so schräge Richtungen, daß die Phasendifferenzen zwischen ihnen nicht mehr zu einer Auslöschung durch Interferenz ausreichen. Es ist, als würde die Membran in verschiedene Rohre strahlen, die von ihr aus in die verschiedenen Richtungen weisen (Abb. 379). Der Strahlungswiderstand wird in diesem Fall kleiner als $S\varrho c$ sein: $f \ll S\varrho c$.

Im Falle b) wirkt die schwingende Membran als Dipol. Die Phase der nach links gerichteten Strahlung ist entgegengesetzt zu der nach rechts gerichteten Strahlung. Daraus ergibt sich, daß unter 90° (in Richtung Oy) kein Schall abgestrahlt wird. Im Falle c) dagegen ist der Raum rechts von der Membran durch eine feste Wand von dem linken Raum getrennt. Man verhindert so Interferenzen zwischen

der nach rechts und der nach links gerichteten Strahlung und findet bei tiefen Frequenzen eine in der Richtung gleichförmige Abstrahlung.

Aus diesen Betrachtungen zeigt sich, daß der *Strahlungswiderstand* f eine Funktion des Verhältnisses von Wellenlänge λ zum Durchmesser $2a$ der Membran ist. Diese Funktion nun kann nur durch komplizierte Rechnungen gefunden werden (siehe Lord RAYLEIGH, Theory of Sound) und hat den in Abb. 380 dargestellten Verlauf. Dieser Begriff des Strahlungswiderstandes gilt natürlich sowohl für das Mikrophon als auch für den Lautsprecher.

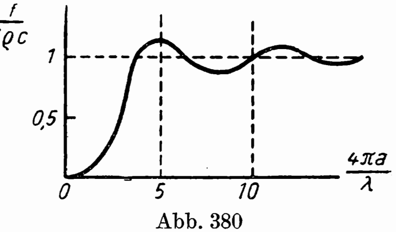


Abb. 380

Mitschwingende Flüssigkeitsmasse

Erfolgt die Rückwirkung der Flüssigkeit auf die Membran durch einen reinen Widerstand? Im Grenzfall für hohe Frequenzen ja, denn wir haben in dem einfach berechenbaren Fall eines eine ebene Welle in einen Zylinder ausstrahlenden Kolbens nur einen reinen Widerstand gefunden. Bei tiefen Frequenzen dagegen und besonders, wenn man sich der Frequenz Null nähert, wird man einen *Sog* feststellen, bei dem ein Teil der Flüssigkeitsmenge der Bewegung des festen Körpers folgt. Die bereits oben erwähnten Berechnungen von Lord RAYLEIGH zeigen, daß es beim langsamen ($\lambda \gg 2a$) Eintauchen einer Kugel in eine Flüssigkeit notwendig ist, bei der Berechnung ihrer Bewegung die Hälfte der Masse des von ihr verdrängten Flüssigkeitsvolumens der Masse zuzurechnen. Diese Korrektur geht z. B. in die Bewegung eines *Pendels* ein. Betrachten wir eine Membran mit einer Abschirmung (Abb. 378c), so muß die Masse der in einem Zylinder mit der Höhe $8a/3\pi$ über der Membran enthaltenen Flüssigkeit mitberücksichtigt werden. Bei einem dichten Medium auf nur einer Seite (in Wasser abstrahlende Anordnungen) berücksichtigt man nur die Masse der dichten Flüssigkeit. Wir wiederholen jedoch noch einmal, daß diese zusätzliche Masse nur bei tiefen Frequenzen eine Rolle spielt und für $f/S\varrho c \to 1$ sehr schnell verschwindet.

Lautsprecherwirkung

Wir setzen $F = 0$. Dann kann keine äußere Schallwelle auf die Membran treffen, die unter der Voraussetzung, daß im Kreis eine von uns als sinusförmig angenommene elektromotorische Kraft E vorhanden ist, als Lautsprecher wirkt.

Mit $E = E_0 e^{j\omega t}$ erhalten wir

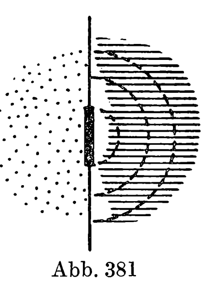
$$\frac{d}{dt} = j\omega; \int \ldots dt = \frac{1}{j\omega}.$$

Daraus folgt

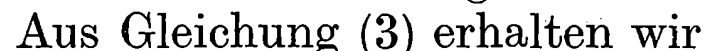
$$\left(jm\omega + \frac{K}{j\omega} + f\right) v - Bli = 0, \tag{3}$$

$$\left(jL\omega + \frac{1}{jC\omega} + R\right) i + Blv = E_0. \tag{4}$$

Um jetzt eine Gleichung zu finden, die i als Funktion von E_0 und ω darstellt, eliminieren wir v aus diesen beiden Gleichungen. Die dann gefundene Gleichung ist für den Elektrotechniker, der Spannung und Strom im Lautsprecherkreis festzustellen wünscht, von Interesse und wird von ihm durch Scheinwiderstände ausgedrückt.


Abb. 381

Aus Gleichung (3) erhalten wir



$$v = -\frac{Bli}{jm\omega + \frac{K}{j\omega} + f}$$

und aus Gleichung (4)

$$i\left(jL\omega + \frac{1}{jC\omega} + R + \frac{B^2 l^2}{jm\omega + \frac{K}{j\omega} + f}\right) = E_0. \qquad (5)$$

Die Klammer auf der linken Seite dieser Gleichung stellt den *gesamten Scheinwiderstand des bewegten Lautsprechers* sowie aller mit ihm in Reihe liegenden Elemente dar. Der Anteil

$$jL\omega + \frac{1}{jC\omega} + R = R + jX$$

ist ein passiver, toter Scheinwiderstand, der gleich bleibt, unabhängig davon, ob der Lautsprecher in Funktion ist oder nicht.

Der Anteil

$$\frac{B^2 l^2}{\left(jm\omega + \frac{K}{j\omega} + f\right)} = R_1 + jX_1$$

ist ein neuer Scheinwiderstand, der sogenannte *Bewegungsscheinwiderstand*, der die Effekte der *mechanischen* Elemente m, K, f des Kreises in elektrische Ausdrücke (einen Widerstand R_1 und einen Blindwiderstand X_1) überführt. Die Größen m, K und f werden dabei über den Kopplungskoeffizienten (der übrigens nur noch in seinem Quadrat $B^2 l^2$ auftritt) in die entsprechenden elektrischen Ausdrücke umgewandelt.

Wir wollen jetzt den Widerstand und den Bewegungsblindwiderstand genau angeben. Trennen wir Real- und Imaginärteil, so haben wir

$$R_1 + jX_1 = \frac{B^2 l^2}{jm\omega + \frac{K}{j\omega} + f} = \frac{(B^2 l^2)\, f^2 \omega^2}{(K - m\omega^2)^2 + f^2\omega^2} + j\,\frac{(B^2 l^2)\,(K - m\omega^2)\,\omega}{(K - m\omega^2)^2 + f^2\omega^2}. \qquad (6)$$

Aus diesen Ausdrücken sieht man, wie der Bewegungsscheinwiderstand auf den Wert Null gebracht werden kann:

1. Durch Unterdrückung der Kopplung: Wir entfernen das magnetische Feld ($B = 0$), so daß die Apparatur nicht mehr schwingt oder wenigstens beim Schwin-

gen keine Induktion mehr auftritt und der Apparat elektrisch nicht mehr angeregt werden kann.

2. Durch unendliche Vergrößerung entweder der Masse m oder der Federkonstante K oder der Reibung f, wodurch die Bewegung unterdrückt wird.

Trotz der etwas komplizierten Form des Ausdruckes für R_1 und X_1 als Funktion der Frequenz kann man aus ihm doch eine Reihe von Feststellungen herleiten.

1. Wir entwickeln R_1 als Funktion von ω und erhalten

$$\frac{L\omega}{(1 - LC\omega^2)^2 + R^2C^2\omega^2}.$$

Dies ist gerade (sehr angenähert) das Quadrat des Scheinwiderstandes eines Parallelresonanzkreises.

Die Entwicklung von X_1 ist sehr ähnlich.

Wir sehen bereits hieraus, daß es zweifellos möglich sein wird, *die schwingende elektrische Apparatur durch einen einfachen, reellen und konstruierbaren äquivalenten elektrischen Kreis darzustellen.* Mit dieser Frage werden wir uns noch weiter unten beschäftigen.

2. Eliminieren wir ω so weit als möglich aus R_1 und X_1, so finden wir eine interessante Beziehung:

Für R_1 können wir schreiben

$$\frac{B^2l^2}{f} \cdot \frac{f^2\omega^2}{(K - m\omega^2)^2 + f^2\omega^2} = \frac{B^2l^2}{f} \cdot \frac{1}{1 + \left(\frac{K - m\omega^2}{f\omega}\right)^2}. \tag{7}$$

Für X_1 erhalten wir

$$\frac{B^2l^2}{f} \cdot \frac{\left(\frac{K - m\omega^2}{f\omega}\right)}{1 + \left(\frac{K - m\omega^2}{f\omega}\right)^2}. \tag{8}$$

Daraus folgt, wenn man die Gleichungen durcheinander dividiert,

$$\frac{X_1}{R_1} = \frac{K - m\omega^2}{f\omega}. \tag{9}$$

Der Bewegungsblindwiderstand und der Bewegungswiderstand stehen im gleichen Verhältnis zueinander wie der mechanische Blindwiderstand und der mechanische Widerstand.

Substituieren wir weiterhin diesen Wert $\frac{K - m\omega^2}{f\omega}$, z.B. in den Ausdruck für R_1, so erhalten wir

$$\left(1 + \frac{X_1^2}{R_1^2}\right) R_1 = \frac{B^2l^2}{f} \quad \text{oder} \quad X_1^2 + R_1^2 - \left(\frac{B^2l^2}{f}\right) R_1 = 0. \tag{10}$$

Diese Beziehung zwischen X_1 und R_1 hängt nicht mehr von ω ab.

*Kennelly*scher *Kreis*

Die Gleichung (10) ist die Gleichung eines *Kreises*, wenn man $R_1(\omega)$ auf der Abszisse und $X_1(\omega)$ auf der Ordinate aufträgt. Die Werte der Gleichungen (7) und (8) – oder Gleichung (6) – für R_1 und X_1 als Funktion von ω sind Parametergleichungen, die den Kreis (10) beschreiben.

In Abb. 382 ist gezeigt, wie dieser sogenannte Kennellysche[1]) Kreis aussieht. Er berührt den Nullpunkt; sein Mittelpunkt liegt auf der Achse positiver R_1, und sein Durchmesser beträgt $\frac{B^2 l^2}{f}$. Jeder Frequenz, jeder Kreisfrequenz ω entspricht ein Punkt dieses Kreises. Es ist interessant, den Verlauf genauer zu betrachten.

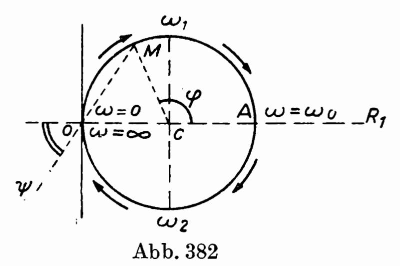


Abb. 382

Der Punkt A entspricht $X_1 = 0$, d.h. einer Kreisfrequenz ω_0, für die $K - m\omega_0^2 = 0$. Dies ist die *Frequenz der rein mechanischen Resonanz* der schwingenden Membran bei Berücksichtigung einer Rückstellkraft, jedoch ohne jede Reibung f.

Der auf dem Kreis umlaufende Punkt nähert sich Null, wenn sowohl R_1 als auch X_1 sehr klein werden. Dies ist bei $\omega = 0$ und $\omega = \infty$ der Fall.

Bei $\omega < \omega_0$ ist X_1 positiv, d.h., man beschreibt den oberhalb der R_1-Achse liegenden Halbkreis (Abb. 382). Ist $\omega > \omega_0$, so wird der unter dieser Achse liegende Halbkreis betrachtet. Der Kreis wird also, wenn ω von 0 nach ∞ variiert wird, einmal im Uhrzeigersinn durchlaufen.

Um die Geschwindigkeit abzuschätzen, mit der der umlaufende Punkt den Kreis beschreibt, wollen wir uns für die Frequenzen ω_1 und ω_2 interessieren, deren Lage in der Abbildung gekennzeichnet ist. Wir sehen sofort, daß sie durch folgende Gleichung bestimmt sind:

$$\pm X_1 = R_1 = \frac{1}{2}\,\frac{B^2 l^2}{f}.$$

Setzen wir also $\frac{X_1}{R_1} = 1$, dann lautet ihre Bestimmungsgleichung

$$\pm(K - m\omega^2) = f\omega.$$

Diese Frequenzen entsprechen gleichem mechanischem Blindwiderstand und mechanischem Widerstand bzw. geben für die Phase der mechanischen Bewegung gegenüber der Kraft einen Wert von $\pm\frac{\pi}{4}$. Diesen Wert kann man auch Phase des mechanischen Scheinwiderstandes der Apparatur nennen, und man findet ihn als Phase des äquivalenten elektrischen Bewegungsscheinwiderstandes wieder.

---

[1]) Kennelly führte die imaginären Scheinwiderstände bei Wechselstrom ein. Von ihm stammt eine Theorie des Telephonempfängers, die auf den Kennellyschen Kreis führte, der sich auch für die Betrachtung des Einflusses der Ionosphäre auf Radiowellen als nützlich erwies.

Schließlich betrachten wir noch den Strahl, der den Punkt C (das Zentrum des KENNELLYschen Kreises) mit dem auf dem Kreis umlaufenden Punkt M verbindet. Dieser Vektor läuft mit einer Kreisfrequenz ω um, die in einer bestimmten Beziehung zur mechanischen Phase steht. Der in der Abbildung mit φ bezeichnete Winkel MCA läuft von $-\pi$ für $\omega = 0$ über 0 für $\omega = \omega_0$ bis π für $\omega = \infty$. Er besitzt bei den extremen Frequenzen den Wert $\pm\frac{\pi}{2}$. Die mechanische Phase ist also bis auf das Vorzeichen durch

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{K - m\omega^2}{f\omega}$$

bestimmt und geht von $-\frac{\pi}{2}$ für $\omega = 0$, $-\frac{\pi}{4}$ für $\omega = \omega_1$, 0 für $\omega = \omega_0$ und $+\frac{\pi}{4}$ für die zweite quadrantale Frequenz ω_2 schließlich auf $+\frac{\pi}{2}$ für $\omega = \infty$. Man findet also, daß der Winkel φ besser durch 2ψ dargestellt würde.

Wir wollen nun versuchen, dies zu beweisen. Nach Abb. 382 gilt

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{X_1}{R_1 - \frac{B^2 l^2}{2f}} = \frac{\frac{X_1}{R_1}}{1 - \frac{B^2 l^2}{2fR_1}} = \frac{\frac{K - m\omega^2}{f\omega}}{1 - \frac{1}{2}\left[1 + \left(\frac{K - m\omega^2}{f\omega}\right)^2\right]}$$

$$= \frac{2\left(\frac{K - m\omega^2}{f\omega}\right)}{1 - \left(\frac{K - m\omega^2}{f\omega}\right)^2}. \qquad (11)$$

In $\frac{K - m\omega^2}{f\omega}$ erkennt man den Wert $\operatorname{tg}\psi$, d.h.

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{2\operatorname{tg}\psi}{1 - \operatorname{tg}^2\psi}. \qquad (12)$$

Diese Relation ist gleichbedeutend mit $\varphi = 2\psi$, wenigstens für die Bestimmung der uns hier interessierenden Winkel.

Wir können übrigens noch feststellen, daß der Winkel ψ offensichtlich auch in der Abbildung enthalten ist. Setzt man nämlich $\psi = \sphericalangle MOC$, so gilt tatsächlich $\operatorname{tg}\psi = \frac{X_1}{R_1}$, und φ ist gleich 2ψ.

Allgemeiner ausgedrückt: *Das KENNELLYsche Diagramm* erhält man, wenn man in einem Diagramm auf der Abszisse den gemessenen Gesamtwiderstand und auf der Ordinate den Gesamtblindwiderstand der Anordnung aufträgt. Für den in Abb. 374 dargestellten Kreis würde man also ein Diagramm finden, wie es in Abb. 383 gezeigt ist, mit einem passiven Widerstand R = const und einem stark von ω abhängigen Blindwiderstand X. Die als *genügend scharf angenommene* mechanische

Resonanz würde verursachen, daß zu dem Bewegungsblindwiderstand X_1 der Apparatur ein passiver Blindwiderstand $jL\omega + \frac{1}{jC\omega}$, der in der Nähe von $jL\omega_0 + \frac{1}{jC\omega_0}$ liegt, in diesem gesamten Resonanzbereich hinzugezählt werden muß, so daß praktisch das resultierende Gesamtdiagramm ein eine senkrechte Gerade tangierender Kreis wäre.

In Wirklichkeit verändert sich jedoch einerseits der Widerstand R etwas mit der Frequenz, so wächst er z.B. wegen des Skin-Effektes etwas mit dieser an. Dies hat zur Folge, daß die senkrechte Gerade eine gewisse Neigung erfährt. An-

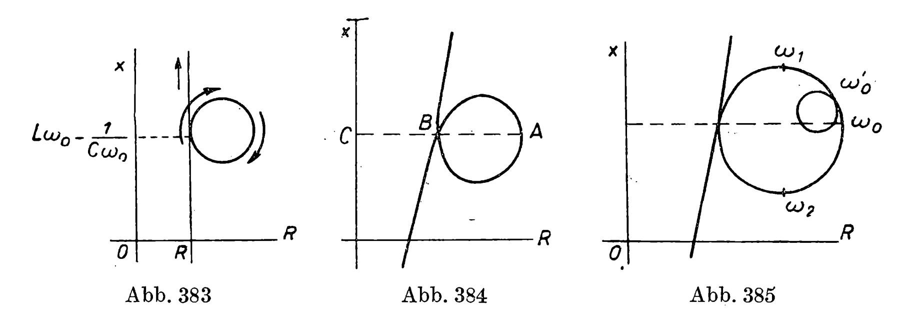


Abb. 383 Abb. 384 Abb. 385

dererseits können sich auch die Bewegungskonstanten m, k und f mit der Frequenz verändern, und diese Veränderung kann eine Veränderung der reinen Kreisform des Diagramms zur Folge haben. Ein KENNELLY-Diagramm, wie es in der Praxis vorkommt, hat vielmehr etwa das in Abb. 384 angegebene Aussehen. Nichtsdestoweniger ist seine Interpretation sehr interessant, da sie sofort die Ergebnisse einer vollständigen Untersuchung der Frequenzverhältnisse im ganzen System ergibt: Ein solches Diagramm, wie es in Abb. 385 dargestellt ist, ergibt deutlich zwei mechanische Resonanzen, von denen die Hauptresonanz ω_0 eine zweifellos sehr schwache Kopplung mit einer anderen mechanischen Resonanz ω_0' besitzt, die nahe genug an ω_0 liegt, um gerade zwischen einer extremalen und einer Resonanzfrequenz zu liegen. Befinden sich zwei extremale Frequenzen des kleinen Kreises sehr nahe beieinander, so kann man annehmen, daß die ω_0' entsprechende Resonanz sehr scharf ist, d.h. ein kleiner Koeffizient f auftritt. Findet man außerdem einen sehr kleinen Durchmesser für den KENNELLYschen Kreis (Abb. 385), so muß geschlossen werden, daß eine sehr schwache Kopplung mit dem elektrischen Kreis besteht, da sonst der Durchmesser beträchtlich wäre.

Wir wollen hier nicht alle zur Aufzeichnung eines KENNELLYschen Diagramms notwendigen Messungen erörtern. Selbstverständlich benötigt man eine Wechselstrombrücke, mit der R und X im gesamten Frequenzarbeitsbereich gemessen werden können. Außerdem muß das elektromechanische System durch eine bei allen Frequenzen sinusförmige Spannung in diesem sehr engen Intervall um die mechanische Resonanzstelle herum angeregt werden können. Es tritt dabei eine geringe Schwierigkeit auf: Die benutzte Apparatur (z.B. ein Meßgenerator) muß sehr *frequenzstabil* sein. Seine Frequenz muß kontinuierlich alle Werte durchlaufen

und immer unabhängig von den Reaktionen der geprüften Anordnung sein. Dies jedoch ist keine einfach zu befriedigende Bedingung.

Wirkungsgrad eines Lautsprechers

Bei jeder Frequenz wird die Leistung $(R + R_1) i^2$ frei, und zwar $R i^2$ in Form JOULEscher Wärme und $R_1 i^2$ als mechanische Energie. Der durch das Verhältnis dieser mechanischen Leistung $R_1 i^2$ zur gesamten erzeugten elektrischen Leistung definierte *Wirkungsgrad* lautet dann

$$\eta = \frac{R_1 i^2}{(R + R_1) i^2} = \frac{R_1}{R + R_1}.$$

Besonders ist bei der Resonanzfrequenz ω_0 R_1 gleich dem Durchmesser des KENNELLYschen Kreises und der Wirkungsgrad gleich dem Verhältnis $\frac{AB}{AC}$ in Abb. 384.

Wird allerdings ein gewisser Bruchteil der mechanischen Leistung in Form schädlicher Reibung verbraucht, dann verringert sich selbstverständlich auch der Wirkungsgrad beträchtlich. Mit anderen Worten: Der akustische Gesamtwirkungsgrad ist gleich dem Produkt des elektrodynamischen Wirkungsgrades η und dem sogenannten akustischen Wirkungsgrad.

Wie wir bereits bei einem über eine große Membran in Luft abstrahlenden Lautsprecher erwähnt haben, ist die Dämpfung der tiefen Resonanz besonders notwendig. Man nimmt dabei in Kauf, daß durch die dazu notwendige passive Reibung $^9/_{10}$ der Leistung verlorengehen. Schließlich ist der *akustische Wirkungsgrad* also von der Frequenz nahezu unabhängig, aber sehr klein (1–4%).

Andere Darstellung des Bewegungswiderstandes

Ohne den KENNELLYschen Kreis zu konstruieren, tragen wir einfach in einem Diagramm den Wert des gemessenen Gesamtwiderstandes $R + R_1$ als Funktion der Frequenz oder der Kreisfrequenz ω auf (Abb. 386). Man erhält dann im allgemeinen eine Form, wie sie in der Abbildung durch ABC gekennzeichnet wird und die R und seine geringe Veränderung mit ω darstellt. Der Teil $AB'C$ der Kurve, der über ABC liegt, stellt offensichtlich den Bewegungswiderstand dar. Man findet leicht das Maximum BB', das den Wert $\frac{B^2 l^2}{f}$ besitzt. Die extremalen Frequenzen ergeben sich, wenn man eine zu ABC parallele Gerade α, β durch die Mitte von BB' legt.

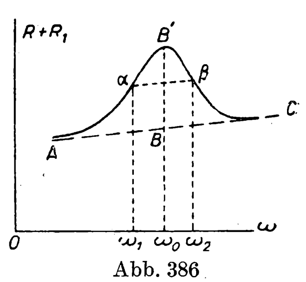


Abb. 386

Abhängigkeit vom Medium

Im Resonanzfalle gilt $R_1 = \frac{B^2 l^2}{f}$; je größer f ist, um so kleiner ist R_1. Strahlt eine Anordnung in Luft ab, so tritt ein charakteristischer akustischer Scheinwider-

stand pro cm² auf[1]), der $\varrho c = 42$ CGS-Einheiten beträgt. Erfolgt die Abstrahlung in Wasser unter sonst gleichen Bedingungen, so ändert sich dieser charakteristische akustische Scheinwiderstand auf $\varrho c = 1{,}5 \cdot 10^5/\text{cm}^2$. Die Durchmesser der KENNELLYschen Kreise variieren mit $1/f$, und f geht bis auf einen geometrischen Faktor mit ϱc, wenn sonst keine mechanischen Verluste auftreten. Für die gleiche strahlende Anordnung erhalten wir also

in Luft einen KENNELLYschen Kreis mit dem großen Durchmesser $^1/_{42}$

in Wasser einen Kreis mit dem viel kleineren Durchmesser $\dfrac{1}{1{,}5 \cdot 10^5}$.

Das Verhältnis dieser beiden Werte beträgt $\dfrac{1{,}5 \cdot 10^5}{42} = 3570.$

Es wird selten gelingen, die Phänomene unter ganz reinen Bedingungen zu betrachten. Selbstverständlich macht sich bei einem in Luft schwingenden Apparat z. B., der nur wenig gedämpft ist, die Dämpfung seiner Unterlage oder die mechanischen Verluste der Konstruktion (z. B. der Papiermembranen in Lautsprechern) im Durchmesser des KENNELLYschen Kreises bemerkbar. Gleichzeitig mit der Vergrößerung des KENNELLYschen Durchmessers nähern sich jedoch die extremalen Frequenzen einander. Tatsächlich hat man

$$K - m\omega_0^2 = 0, \qquad \pm(K - m\omega_0^2) = f\omega_1,$$
$$\omega_0 + \Delta\omega = \omega_1, \qquad 2m\omega_0\Delta\omega = f\omega_0.$$

$\Delta\omega$ steht also in direkter Beziehung zu f, d.h. zu ϱc.

Der KENNELLYsche Kreis beschreibt ein um so kleineres Frequenzintervall, je größer sein Durchmesser ist.

Funktion als Mikrophon

Wir betrachten jetzt die gleiche Anordnung, in der jedoch keine elektromotorische Kraft vorhanden sei, und lassen auf die Membran die Kraft

$$F = F_0 \sin\omega t \quad \text{oder} \quad F = F_0 e^{j\omega t}$$

wirken.

Stellt der Apparat ein Mikrophon dar, so wird diese Kraft durch einen auf die Oberfläche S der Membran wirkenden Druck P gegeben, so daß

$$F = PS = P_0 S e^{j\omega t}.$$

Das auftretende Problem, nämlich die Kenntnis des Zusammenhanges zwischen P und einem vorher in einer akustischen Schallwelle (die sich *ohne Störung durch das Mikrophon* im Raum ausbreitet) festgestellten akustischen Druck, ist an sich ein akustisches Problem und wird von uns hier nicht ausführlich behandelt.

[1]) Wir wollen noch einmal daran erinnern: Der akustische Scheinwiderstand wurde als Quotient aus Druck P und dem Wert Su definiert. Er hatte also für eine Welle in einem Rohr, für die $P = \varrho c u$ gilt, den Wert $\dfrac{\varrho c}{S}$. Dies ist ein *charakteristischer* Scheinwiderstand, wie auch jede elektrische Leitung für eine sich in einer einzigen Richtung ausbreitende Welle einen solchen besitzt. Weiterhin kann man vereinbaren, den Scheinwiderstand auf 1 cm² zu beziehen, woraus sich ϱc ergibt.

Die beiden Fundamentalgleichungen bleiben unverändert

$$\left(jm\omega + f + \frac{K}{j\omega}\right)v - Bli = F, \tag{13}$$

$$\left(jL\omega + R + \frac{1}{jC\omega}\right)i + Blv = 0, \tag{14}$$

falls wir wie im folgenden annehmen, daß $E = 0$ und $F \neq 0$. Offensichtlich kann man aus den Gleichungen (13) und (14) i eliminieren und erhält dann

$$\left(jm\omega + f + \frac{K}{j\omega} + \frac{B^2 l^2}{jL\omega + \frac{1}{jC\omega} + R}\right)v = F.$$

Diese Gleichung gestattet uns, einen mechanischen KENNELLYschen Kreis durch die Weiterführung einer auf der Betrachtung von mechanischen Scheinwiderständen beruhenden Berechnung zu konstruieren. Da in der Praxis die Messung der mechanischen Scheinwiderstände kaum durchgeführt wird, da dies sehr unbequem wäre, haben diese Entwicklungen kaum ein Interesse. Wir können höchstens sagen, daß sich bei der elektrischen Resonanzfrequenz ω', für die

$$jL\omega' + \frac{1}{jC\omega'} = 0 \quad \text{oder} \quad LC\omega'^2 = 1$$

gilt, der mechanische Widerstand f um $\frac{B^2 l^2}{R}$ vergrößert. Dies ist also ein Maß für die Vergrößerung der mechanischen Dämpfung, die bei einem mechanischen Schwinger durch die Kopplung mit einem elektrischen Kreis gesichert wird, dessen Scheinwiderstand gerade R beträgt.

Interessanter ist es noch, aus den Gleichungen (13) und (14) v zu eliminieren. Man findet dann

$$\left[\frac{\left(jm\omega + f + \frac{K}{j\omega}\right)\left(jL\omega + R + \frac{1}{jC\omega}\right) + B^2 l^2}{B \cdot l}\right] i = F \tag{15}$$

oder

$$\left[jL\omega + R + \frac{1}{jC\omega} + \frac{B^2 l^2}{jm\omega + f + \frac{K}{j\omega}}\right] i = \frac{Bl}{jm\omega + f + \frac{K}{j\omega}} F. \tag{16}$$

In Gleichung (16) tritt also wieder der gleiche Bewegungsscheinwiderstand auf wie in Gleichung (5):

$$\frac{B^2 l^2}{jm\omega + f + \frac{K}{j\omega}}. \tag{17}$$

Dieser Ausdruck addiert sich zu dem gleichen passiven Scheinwiderstand $jL\omega + R + \frac{1}{jC\omega}$. Der Strom i fließt also, wenn eine fiktive *elektromotorische Kraft*

$$E = \frac{Bl}{jm\omega + f + \frac{K}{j\omega}} F$$

vorhanden ist, die in irgendeiner Weise *die Einführung der äußeren Kraft in den elektrischen Kreis* bewirkt.

Durch die Einführung dieses letzten Begriffes finden wir das KENNELLYsche Diagramm mit allen seinen Eigenschaften, seinen extremalen Frequenzen, Wirkungsgrad usw. wieder, so daß wir auf die allgemeine Theorie des elektrodynamischen Mikrophons mit Ausnahme der folgenden Punkte verzichten können.

a) Das Rauschen durch den Bewegungswiderstand. Wir bezeichnen mit R_1 den Bewegungswiderstand, mit R den Gesamtwiderstand. Wir werden weiter hinten (siehe Anwendung der Trioden) feststellen, daß ein Widerstand $R + R_1$ Sitz einer elektromotorischen Rauschspannung ist, die von der thermischen Bewegung der Elektronen herrührt. Das mittlere Quadrat $(dE)^2$ dieser Spannug besitzt im Frequenzbereich $d\nu$ den Wert

$$(dE)^2 = 4\,(R + R_1)\,kT\,d\nu, \tag{18}$$

wobei $k = 1{,}38 \cdot 10^{-16}$ CGS-Einheiten die BOLTZMANN-Konstante darstellt.

Messen wir das von einem Mikrophon in seinem eigenen Kreis erzeugte Rauschen, so werden wir zweifellos den Wert (18) finden. Indessen stellt nur der Widerstand R eine materielle physikalische Realität dar, und offensichtlich tragen nur seine Elektronen zum Rauschen bei, so daß nur der Bruchteil $4\,RkTd\nu$ des Rauschens erklärt zu sein scheint.

Das Paradoxon erklärt sich, wenn man feststellt, daß das Mikrophon eine Membran besitzt, die Wirkungen des äußeren Mediums unterliegt. Man kann zeigen, daß die *Druckschwankungen*, die in den Schallwellen durch thermische Bewegung hervorgerufen werden, das Medium durchlaufen, die Membrän des Mikrophons erreichen und Ursache des Rauschens sind, welches sich gerade zu $4\,R_1kTd\nu$ berechnet.

Das Rauschen durch die thermische Bewegung im Widerstand ist nichts anderes als der elektrische Ausdruck für das Rauschen durch die mechanische Bewegung der Mikrophonmembran.

Die Theorie ist nicht besonders kompliziert, es genügt, die Membran als ein *Pendel* anzusehen, das eine mittlere potentielle Energie $^1/_2\,kT$ und eine gleiche mittlere kinetische Energie besitzt.

Wir haben bisher angenommen, daß zwischen Mikrophon und Medium thermisches Gleichgewicht besteht. Befindet sich jedoch das Mikrophon auf der Temperatur T und das Medium auf der Temperatur T_1, so wird das Rauschen selbstverständlich durch

$$(dE)^2 = 4\,k\,(RT + R_1T_1)\,d\nu \tag{19}$$

gegeben sein.

Dieser die Leistung der Mikrophone beeinträchtigende Begriff des Rauschens ist tatsächlich von großer Bedeutung, da das Ohr praktisch eine Art empfindliches Mikrophon darstellt, dessen Membran, das Trommelfell, in der Größenordnung von 0,5 cm² liegt. Das Ohr ist ein sehr empfindliches Organ, seine Hörschwelle liegt zwischen 1000 und 2000 Hz bei etwa $3 \cdot 10^{-4}$ bar ($3 \cdot 10^{-10}$ Atm). Wäre die Empfindlichkeit des Ohrs um den Faktor 3 bis 4 höher, so könnte man noch das Rauschen der Luftbewegung feststellen. Daraus folgt, daß man ein Mikrophon zwar zur Verstärkung eines bereits hörbaren Geräusches verwenden kann, daß jedoch kein Mikrophon in der Lage ist, so geringe Geräusche hörbar zu machen, die unterhalb des Rauschpegels liegen. Die Leistungen des Mikrophons sind genau wie die des Ohrs durch das Verhältnis Signal : Rauschen begrenzt.

b) Der Wirkungsgrad beim Empfang. Die Wirkungsweise eines Mikrophons führt uns auf die Betrachtung eines anderen Charakteristikums als dem energetischen Wirkungsgrad der Energieumwandlung von akustischer in elektrische Form. Tatsächlich findet man zuerst eine Schallwelle, die pro sec und pro cm² einen Energiefluß

$$\frac{P^2}{\varrho c}$$

in das Medium transportiert, in dem sich das Mikrophon (dessen Membran die Fläche S besitzt) befindet. Wir wollen die Größe

$$\frac{S P^2}{\varrho c} \tag{20}$$

die *durch die Welle auf die Membran treffende Leistung* nennen.

Die Reaktion des Mikrophons ist uns noch unbekannt. Vielleicht wird es 99% der auffallenden Leistung reflektieren und den kleinen Rest von 1% mit einem ausgezeichneten Wirkungsgrad in ein sehr kleines elektrisches Signal umwandeln. Vielleicht wird es jedoch auch der Schallwelle die Leistung auf einer viel größeren Fläche als S entziehen und mit irgendeinem Wirkungsgrad ein starkes elektrisches Signal liefern.

Der Begriff des Strahlungswiderstandes gestattet, eine Antwort auf diese Frage zu geben. Zur Vereinfachung betrachten wir das Mikrophon sowohl bei elektrischer als auch bei mechanischer Resonanz: $j m \omega + \frac{K}{j \omega} = 0$ und $j L \omega + \frac{1}{j C \omega} = 0$. Den mechanischen Widerstand f unterteilen wir in $f = f_1 + f_2$, wobei f_1 den passiven Reibungen und f_2 dem Strahlungswiderstand entsprechen. Wir erhalten also

$$\begin{aligned} F &= S P = f v - B l i, \\ 0 &= R i + B l v, \end{aligned} \tag{21}$$

woraus man

$$v = \frac{S P}{f + \frac{B^2 l^2}{R}}$$

erhält.

Weiterhin ergibt sich die reelle, im Mikrophon auftretende mechanische Leistung zu

$$\overline{Fv} = \overline{SPv} = \frac{S^2 P^2}{f + \frac{B^2 l^2}{R}}. \tag{22}$$

Der Bruchteil $\frac{R_1}{(R + R_1)}$ dieses Wertes wird in elektrische Leistung umgewandelt, wobei $R_1 = \frac{B^2 l^2}{f}$. Das Verhältnis η von erreichter elektrischer zu aufgewandter akustischer Leistung ist also leicht zu berechnen und beträgt

$$\eta = \frac{\frac{R_1}{R + R_1} \cdot \frac{S^2 P^2}{f + \frac{B^2 l^2}{R}}}{\frac{S P^2}{\varrho \cdot c}} = \left(\frac{\varrho c S}{f}\right) \frac{R_1}{R + R_1} \cdot \frac{1}{1 + \frac{B^2 l^2}{f R}}. \tag{23}$$

Da nun $\frac{B^2 l^2}{f}$ nichts anderes als R_1 ist, können wir auch schreiben

$$\eta = \left(\frac{\varrho c S}{f}\right) \frac{\frac{R_1}{R}}{\left(1 + \frac{R_1}{R}\right)^2}. \tag{24}$$

Man sieht, daß sich dieser Wirkungsgrad aus zwei Faktoren zusammensetzt, von denen der erste

$$\frac{\varrho c S}{f} = \frac{\varrho c S}{f_1 + f_2} \tag{25}$$

in irgendeiner Weise die *Qualität* des Strahlungswiderstandes angibt. Durch Einführung einer zusätzlichen Reibung f_1 kann man deren Wert *verringern.* Tritt jedoch nur f_2 auf, dann kann er nie viel kleiner als 1 werden, da f_2 den Wert $\varrho c S$ nur wenig übersteigt, wie in Abb. 380 gezeigt wird. Bei genügend niedrigen Frequenzen, bei denen die Wellenlänge im Medium die Dimensionen der Membran bedeutend übersteigt, gilt $f_2 \ll \varrho c S$, und der Faktor $\frac{\varrho c S}{f}$ kann sehr viel größer als 1 werden. In diesem Fall verhält sich das Mikrophon wie ein *Resonator* mit einem enorm großen *Wirkungsquerschnitt* im akustischen Feld (siehe den gleichen, für ein *freies Elektron* und für eine *Antenne* eingeführten Begriff).

Der andere Faktor

$$\frac{\frac{R_1}{R}}{\left(1 + \frac{R_1}{R}\right)^2} \tag{26}$$

ist ebenfalls interessant, da er für $\frac{R_1}{R} = 1$ durch ein *Maximum* verläuft. Daraus ergibt sich

1. daß ein zu großer KENNELLYscher Kreis, $\frac{R_1}{R} \gg 1$, nicht zweckmäßig ist; das Mikrophon besitzt zwar eine sehr gute Resonanz, aber man findet keinen elektrischen Kreis, der diese Leistung auch verbraucht;

2. daß ein zu kleiner KENNELLYscher Kreis, $\frac{R_1}{R} \ll 1$, ebensowenig interessant ist, entweder weil die durch R hervorgerufene Dämpfung des mechanischen Kreises zu groß oder weil der Koeffizient der elektromechanischen Kopplung Bl zu klein ist.

Praktische Beispiele

Nach diesen allgemeinen Betrachtungen wollen wir die Größenordnungen festlegen. Die üblichen *Lautsprecher* in Rundfunkempfängern sind allgemein bekannt. Die in ihrem Spalt auftretenden Felder betragen 7000 bis 10000 G, selten mehr. Eine übliche Spule eines Lautsprechermagneten habe z. B. 44 Windungen mit einem Durchmesser von 4 cm, ihre Länge betrage also $l = 44\pi \cdot 4 = 550$ cm. Bei einer Feldstärke von 10000 G wird dann Bl den Wert $5{,}5 \cdot 10^6$ besitzen.

Bildet man die Membran durch einen flachen Kolben von 20 cm Durchmesser, dann gilt

$$f = \varrho c S = 0{,}0013 \cdot 3{,}3 \cdot 10^2 \cdot \pi \cdot 100 = 13000 \text{ CGS-Einh.},$$

$$R = \frac{B^2 l^2}{f} = \frac{(5{,}5)^2 \cdot 10^{14}}{1{,}3 \cdot 10^4} = 2{,}3 \cdot 10^9 \text{ elektr.magn.Einh.} = 2{,}3\ \Omega .$$

Nun kann eine solche Spule mit einem Drahtdurchmesser von 0,1 — 0,2 mm bereits bei niedrigen Frequenzen einen Widerstand von 3 — 4 Ω besitzen. Wir können also durch die großen Dimensionen der Membran verhältnismäßig leicht in einen Bereich gelangen, in dem $\frac{R_1}{R}$ in der Größenordnung von 1 liegt.

Tatsächlich wäre es noch nötig, von der Resonanzfrequenz dieser Membran mit der Feder zu sprechen. Es ist unangenehm genug, daß diese im Bereich *tiefer Frequenzen* liegt, da man bei einer Frequenz von 100 Hz in Luft bereits eine Wellenlänge von 3,3 m erhält. Daraus folgt, daß der Faktor f bei einer Membran von 20 cm ⌀ *viel kleiner* ist als die oben angenommenen 13000 CGS-Einheiten. Die Membran muß also *stark gedämpft* werden, z. B., wie wir es bereits weiter vorn erwähnt haben, durch einen Filzring. Im Mittel wird jedoch die Beweglichkeit der Membran für alle diese Frequenzen nahezu gleich sein, wie es auch für korrekte akustische Wiedergabe unerläßlich ist.

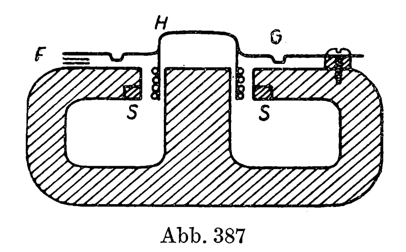


Abb. 387

Dies ist das Hauptproblem beim elektrodynamischen Lautsprecher.

Das *Mikrophon* (Abb. 387) wollen wir nur kurz erwähnen. Die Anwesenheit des Mikrophons und seines Stativs darf das akustische Feld nicht deformieren. Es sind

außerdem ästhetische Bedingungen zu erfüllen, der Sprecher bzw. der Sänger müssen ihr Auditorium sehen können und auch von diesem gesehen werden. Das Mikrophon, von welchem Typ es auch sei, muß also notwendigerweise *klein* sein. An der Erhöhung H der metallischen Membran wird die Spule befestigt. Ein Ring G gestattet ihr eine Bewegung wie ein ebener Kolben. Ein Nachteil ist jedoch die mangelnde Dämpfung, die einerseits dadurch erhöht wird, daß die Luft beim Ein- und Austritt durch die Schlitze F gezwängt wird, und andererseits durch die Anordnung einer *Kurzschlußwindung S aus Kupfer*, die durch ihre Kopplung mit der Spule der Sitz starker FOUCAULTscher Ströme wird, sobald sich letztere bewegt. Man kann ohne weiteres zeigen, daß ihre mechanische Reaktion (LAPLACEsche Kräfte) auf die Spule einer Dämpfung entspricht.

Wandler mit ähnlicher Wirkungsweise wie elektrodynamische Lautsprecher

Wir wollen in diesem Zusammenhang den *elektromagnetischen Lautsprecher* und den *Telephonhörer* nennen, die beide auf dem elektromagnetischen System beruhen, sowie die *Magnetostriktionsschwinger*, die in der Unterwasserakustik Verwendung finden. Auch die elektrisch angeregte *Stimmgabel* beruht auf dem elektromagnetischen Prinzip. Betrachtet man nur kleine Bewegungen, so kann man sich mit Annäherungen zufriedengeben, die auf lineare Gleichungen führen und die Arbeitsweise dieser Apparaturen ähnlich den elektrodynamischen Lautsprechern behandeln.

Elektromagnetische Anordnungen

In Abb. 388 ist schematisch ein elektromagnetischer Lautsprecher dargestellt. Der magnetische Kreis des Elektromagneten ist deformierbar, da wegen der Federung der Lamelle L der Spalt x variiert werden kann. An dem beweglichen

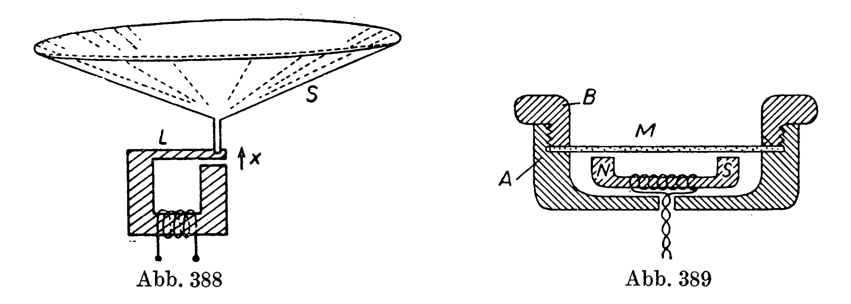


Abb. 388 Abb. 389

Teil L ist die Membran S befestigt, die in die Luft abstrahlt. Die Abb. 389 zeigt einen Schnitt durch einen Telephonhörer. A ist dabei die Ebonitmuschel. Der Deckel B drückt beim Einschrauben gegen die Membran M, die aus Weicheisen besteht. Diese verändert beim Schwingen den Spalt eines Magneten NS, dessen Fluß außerdem durch den in der gezeigten Wicklung fließenden Wechselstrom gesteuert wird.

Mit L bezeichnen wir die Selbstinduktion der in der Abb. 388 dargestellten Wicklung. Die magnetische Energie $\frac{1}{2} L i_1^2$ entspricht einem *Potential* gegenüber

der mechanischen Kraft, die der Ableitung der Energie nach der Bewegung entspricht,

$$F = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{L}{2}\, i_1^2\right) \tag{27}$$

und ist die Kraft, die beim Strom i_1 die Membran M bewegt. Formal hängt dieser Strom i_1 nicht von x ab, so daß

$$F = \frac{i_1^2}{2}\,\frac{\partial L}{\partial x}.$$

Will man, daß die Kraft (oder die Durchbiegung) proportional zum Strom sei, so sieht man, daß die Anordnung *polarisiert* werden muß: i_1 wird dann durch einen starken Strom i_0 gebildet, der den magnetischen Kreis in einen Permanentmagneten umwandelt, und es wird gelten

$$i_1 = i_0 + i.$$

Dabei ist $i \ll i_0$ der kleine Wechselstrom, der die Bewegung hervorruft. In dem Ausdruck $i_1^2 = i_0^2 + 2 i i_0 + i^2$ wird man i^2 vernachlässigen können, und der veränderliche Teil von F wird *für die kleinen Bewegungen* maßgebend sein

$$F = \left(i_0\,\frac{\partial L}{\partial x}\right) i. \tag{28}$$

Der Faktor $i_0\,\frac{\partial L}{\partial x}$ spielt die gleiche Rolle wie Bl in der Theorie der elektrodynamischen Lautsprecher.

Sind s der Querschnitt des Eisens, $R_{\text{magn.}}$ der magnetische Widerstand des Kreises und L die normale Selbstinduktion des unbelasteten Kreises, dann kann man zeigen, daß

$$i_0\,\frac{\partial L}{\partial x} = \frac{L i_0}{s\,R_{\text{magn.}}}, \tag{29}$$

wenn man untersucht, wie sich L in erster Näherung mit dem Spalt x verändert.

Wir beschränken uns auf diese wenigen für alle elektrodynamischen Geräte gültigen Hinweise. Betrachten wir $\frac{L i_0}{s\,R_{\text{magn.}}}$ in einem reellen Fall, dann sehen wir, daß diese Apparaturen praktisch nahezu die gleichen Empfindlichkeiten besitzen wie die elektrodynamischen, mit dem Nachteil jedoch, daß sie bei ansteigender Amplitude nicht mehr linear sind. Nun ist bei gleicher Energie die Amplitude um so größer, je niedriger die Frequenz ist. Aus diesem Grunde sind Telephonhörer und elektromagnetische Lautsprecher zur Wiedergabe von *Musik*, deren Frequenz bis zu 32 und sogar 16 Hz herunterreicht, wenig geeignet, besser dagegen für *Sprachübertragung*, da diese nicht unter 250 Hz liegt.

Magnetostriktionsschwinger

Die *ferromagnetischen* Metalle wie Fe, Ni, Co und ihre Legierungen zeigen direkte und inverse Magnetostriktionseffekte:

1. Wir betrachten einen Nickelstab mit der *Induktion B*. Dann stellen wir fest, daß er sich um eine Größe *Δl verkürzt*, die empirisch durch das folgende Gesetz gegeben ist

$$10^6 \frac{\Delta l}{l} = -\left(\frac{B}{1670}\right)^{2,87}. \tag{30}$$

Schaltet man das die Induktion erzeugende Feld ab, so nimmt der Stab, abgesehen von Hysteresiserscheinungen, seine ursprüngliche Länge wieder an.

2. Übt man auf diesen Nickelstab, nachdem man ihn in ein konstantes Magnetfeld (wobei diese Einschränkung wichtig ist) eingebracht hat, eine Kraft F aus,

$$F = YS\frac{\Delta l}{l}$$

(Y = YOUNGscher Modul, S = Querschnitt), durch die er um Δl verlängert wird, so stellt man fest, daß die Induktion B des Nickels *abnimmt*. Die Abb. 390 zeigt die Art der Beziehung zwischen B und H, die als Funktion der angelegten Kraft F im Nickel auftritt ($F_3 > F_2 > F_1 > 0$). Vergrößert man die angelegte Kraft von 0 auf F_1 in einem konstanten Magnetfeld, so verringert sich die Induktion B von A auf A_1. Um in der Abbildung von der Form der Kurve für $F = 0$ auf die Form für F_1 überzugehen, bedarf es z.B. einer Kraft von etwa 10 kg/mm².

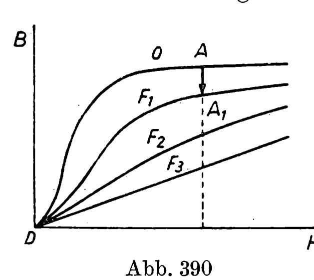


Abb. 390

Dies ist die *inverse Magnetostriktion*. Man sieht, daß zur Bestimmung der Verschiebung des Punktes A in der Abb. 390 die Zugbeanspruchung bei konstantem Feld als Ausgangspunkt genommen werden kann.

Durch diese beiden Magnetostriktionseffekte, den direkten und den inversen, ist es möglich, *Schwinger* zu realisieren, bei deren Betrachtung wir sehen werden, daß diese beiden Effekte nicht unabhängig voneinander sind.

In Abb. 391 ist ein solcher Magnetostriktionsschwinger schematisch dargestellt. Ein in der Praxis aus einzelnen Blechen bestehender Nickelstab der Länge l (da die FOUCAULTschen Ströme möglichst reduziert werden müssen) ist auf der unteren Seite an eine als fest und starr betrachtete Grundplatte und an seinem oberen Ende an eine als sich im ganzen bewegende Masse m gelötet. (Tatsächlich sind sowohl m als auch die Grundplatte Sitz von Wellen, die sich ausbreiten, und die Bewegungen sind komplizierter.) Die Masse m schwingt also gegen die Elastizität des Stabes, die gegeben ist zu

$$F = YS\frac{\Delta l}{l} = \frac{YS}{l}x,$$

wenn wir mit Y den YOUNGschen Modul bezeichnen. Wir sehen also, daß sich der Stab wie eine Feder mit der Härte $K = YS/l$ verhält. Die Bewegungsgleichung für die Masse m wird daher die Form haben

$$m\frac{d^2x}{dt^2} + \left(\frac{YS}{l}\right)x = \text{äußere Kräfte}. \tag{31}$$

Unter diesen äußeren Kräften treten solche auf, die beim Fließen eines Stromes i in der Spule aus Abb. 391, wobei im Ni-Stab eine Induktion B erzeugt wird, den Stab verkürzen.

Wir bezeichnen mit l_1 die Länge des durch die Kraftlinien angezeigten offenen magnetischen Kreises. (Der magnetische Widerstand dieses Kreises kann durch eine Anordnung von Blechen (1) außerhalb des Kreises verringert werden.) Der Strom i ruft ein Feld

$$H = \frac{4\pi n_i}{l_1}$$

und eine Induktion

$$B = \frac{4\pi\mu n_i}{l_1}$$

hervor.

Abb. 391

Wenn die Induktion B eine Verkürzung x, die z.B. durch die Formel (30) gegeben sei, verursacht, dann muß in den äußeren Kräften die Kraft

$$F_1 = \left(\frac{YS}{l}\right)x$$

auftreten. Nun drücken wir x als Funktion von B aus

$$x = -\frac{l}{10^6}\left(\frac{B}{1670}\right)^{2,87};$$

und wenn B um einen Wert B_0 herum schwankt, der eine permanente *Polarisierung* des Nickels darstellt, gilt

$$\delta x = -\frac{2,87}{10^6}\,l\left(\frac{B_0}{1670}\right)^{2,87};$$

$$\frac{\delta B}{B_0} = -\frac{2,87\cdot 10^{-6}\,l}{(1670)^{2,87}}\,B_0^{1,87}\,\frac{4\pi\mu n}{l_1}\,i.$$

Dabei ist i der Strom, der B, von B_0 ausgehend, verändert, d.h., wir haben einen Polarisationsstrom i_0 angenommen, der B_0 hervorruft.

Die entsprechende Kraft beträgt also

$$F_1 = -\left[\frac{2,87\cdot 10^{-6}}{(1670)^{2,87}}\,ES(B_0)^{1,87}\,\frac{4\pi\mu n}{l_1}\right]i = -Ai. \tag{32}$$

Der Ausdruck in der Klammer ist nur ein das Nickel und die Spule charakterisierender Koeffizient. Bezeichnen wir ihn mit A, so können wir also eine erste Gleichung aufstellen, in der $v = \frac{dx}{dt}$ gesetzt ist

$$m\frac{dv}{dt} + fv + \frac{YS}{l}\int v\,dt + Ai = F. \tag{33}$$

Dabei ist fv eine Dämpfungskraft, z.B. gegeben durch einen Strahlungswiderstand, während F eine rein mechanische äußere Kraft (z.B. eine akustische Kraft) darstellt, die angelegt sein könnte.

Wir sehen, daß der Koeffizient A gerade die Rolle von Bl im Falle des elektrodynamischen Lautsprechers spielt.

Es verbleibt noch, die elektrische Gleichung anzugeben. Schaltet man in Reihe mit der Spule eine Kapazität C, einen Widerstand R und eine Wechselstrommaschine mit der elektromotorischen Kraft E, so lautet die elektrische Gleichung *notwendigerweise*

$$E = L\frac{di}{dt} + Ri + \frac{1}{C}\int i\,dt - Av. \tag{34}$$

Tatsächlich läßt uns die inverse Magnetostriktion auf eine zu v proportionale elektromotorische Kraft schließen.

Wir wollen annehmen, daß der Schwinger durch einen konstanten Strom i_0 polarisiert sei. Er arbeitet also unter der Wirkung eines konstanten Feldes $H = \frac{4\pi n i_0}{l}$. Aus Abb. 390 erhalten wir dann einen Koeffizienten

$$\frac{\Delta B}{\Delta F} = \left(\frac{\overline{A \cdot A_1}}{F_1}\right). \tag{35}$$

Nun ist $\Delta F = \frac{Yx}{l}$, wenn sowohl die Kraft F_1 als auch die Kraft F auf die Flächeneinheit des Stabquerschnittes bezogen werden

$$\frac{\partial B}{\partial t} = \frac{\partial \Delta B}{\partial t} = \left(\frac{\overline{AA_1}}{F_1}\right)\frac{Y}{l}\frac{dx}{dt} = \left(\frac{\overline{AA_1}}{F_1}\right)\frac{Y}{l}v. \tag{36}$$

Die Veränderung des Flusses in einer Spule mit dn Windungen und dem Querschnitt S ist gegeben zu

$$\frac{\partial \Phi}{\partial t} = nS\frac{\partial \Delta B}{\partial t} = \left(\frac{\overline{AA_1}}{F_1}\right)\frac{YS}{l}nv. \tag{37}$$

Dies ist die zu v proportionale elektromotorische Kraft der Magnetostriktion.

Nun zeigt das Experiment, daß sich *die mechanische Energie der direkten Magnetostriktion mit dem Wirkungsgrad* 1 *in magnetische Energie der inversen Magnetostriktion umwandelt, ohne daß andere Energieformen auftreten* (wenn man jegliche Hysteresis vernachlässigt). Nimmt man nun an, daß bei diesen Umwandlungen keine anderen Energieformen eine Rolle spielen, so folgt nach der allgemeinen

Theorie, nach der der Ausdruck A in den Gleichungen (33) und (34) dem Wert Bl beim elektrodynamischen Lautsprecher entspricht, die Gleichheit der beiden Koeffizienten

$$\left(\frac{\overline{A A_1}}{F_1}\right) \frac{Y S n}{l} = \frac{2{,}87 \cdot 10^{-6}}{(1670)^{2{,}87}} \frac{Y S n}{l_1} B_0^{1{,}87} 4 \pi \mu . \tag{38}$$

Die nicht spezifischen Konstanten n, S verschwinden ebenso wie Y. Man sieht also, daß man die Erklärung sowohl über die Verschiebungen als auch über die Kräfte finden kann, wenn es sich um einen *idealen* magnetischen Kreis handelt ($l_1 = l$). Dies ist aber erforderlich, wenn man einen Koeffizienten erhalten will, der die inverse Magnetostriktion bei *konstantem Feld* charakterisiert. Es gilt also das folgende Gesetz

$$\left(\frac{\overline{A A_1}}{F_1}\right) = \left(\frac{\partial B}{\partial F}\right)_H = 4 \pi \mu \frac{2{,}87 \cdot 10^{-6}}{(1670)^{2{,}87}} B^{1{,}87} . \tag{39}$$

Dabei bedeutet μ die Permeabilität des Nickels und hat folgende Werte

$$\begin{aligned} B &= 2000 \text{ Gauß} \quad & \mu &= 300 \\ &= 3000 \text{ Gauß} & &= 100 \\ &= 4000 \text{ Gauß} & &= 40 \end{aligned}$$

Der Magnetostriktionsschwinger wird also durch die beiden Gleichungen

$$\begin{aligned} m \frac{dv}{dt} + f v + \left(\frac{E S}{l}\right) \int v\, dt + A i &= F, \\ L \frac{di}{dt} + R i + \frac{1}{C} \int i\, dt - A v &= E \end{aligned} \tag{40}$$

beschrieben, wobei

$$A = \frac{Y S}{l} n \left(\frac{\partial B}{\partial F}\right)_H = \left[4 \pi \mu \frac{2{,}87 \cdot 10^{-6}}{(1670)^{2{,}87}} B^{1{,}87}\right] \frac{Y S}{l} n . \tag{41}$$

Um die Größenordnungen festzulegen, die mit einem Magnetostriktionsschwinger erreicht werden können, wollen wir uns auf die folgende Angabe beschränken: *Bei gleichem Querschnitt, d. h., wenn der Stabquerschnitt gleich dem Querschnitt der Spule ist, die in den besten Lautsprechermagneten taucht, und bei gleichem Scheinwiderstand der Spule ergibt sich bei der Magnetostriktion eine 15mal so hohe Spannung bei der Bewegung wie nach dem elektrodynamischen Prinzip.*

Indessen ist die Härte der Feder $\frac{E S}{l}$ sehr groß, die Resonanz des Schwingers wird daher bei einer sehr hohen Frequenz erfolgen, und der Magnetostriktionsschwinger eignet sich nur zur Verwendung im Bereich des Ultraschalls (20000 bis 40000 Hz).

In Abb. 392 ist schematisch ein Magnetostriktionsschwinger dargestellt, bei dem die mit ihm verbundene Membran in Wasser abstrahlt. Die Membran ist dünn, und ein Kreisnut gestattet ihr Schwingungen ähnlich einem flachen Kolben.

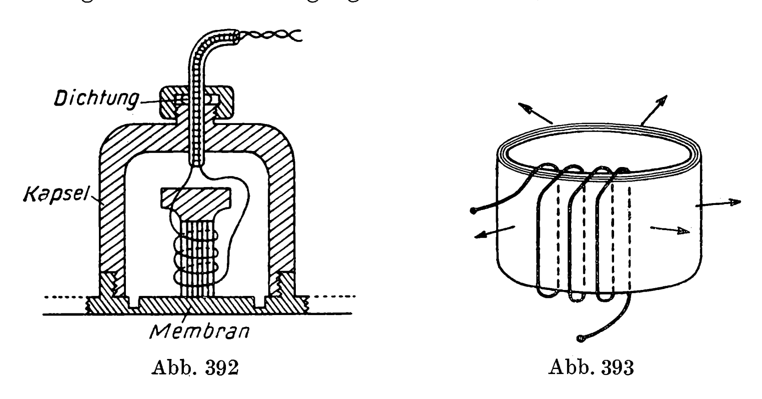


Abb. 392 Abb. 393

Die Abb. 393 zeigt eine Anordnung von Nickelblechen, die zu einem Zylinder gewickelt sind und eine Wicklung zur Erregung radialer Schwingungen besitzen.

Elektrostatischer Wandler

Eine weitere Abart der Wandler sind die elektrostatischen Lautsprecher und Mikrophone sowie die piezoelektrischen Schwinger (Quarze, Seignettesalze und neuerdings verwendete Kristalle wie z. B. Bariumtitanat). Das Prinzip dieser Wandler ist nicht mit dem oben Gesagten völlig identisch und verdient gesonderte Betrachtung.

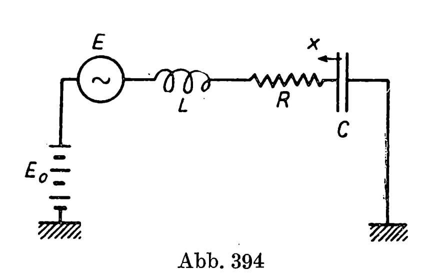


Abb. 394

Es ist zweckmäßig, mit der nebenstehenden elektrostatischen Schaltung zu beginnen.

Die Kapazität $C = \frac{S}{4\pi d}$ wird durch eine elektromotorische Kraft E (eine Hochspannungsbatterie E_0 und eine in Reihe dazu liegende elektromotorische Wechselkraft) über einen großen Widerstand R gespeist (Abb. 394).

Eine ihrer beiden Platten mit der Masse m, die durch eine Feder Kx in ihrer Lage gehalten wird, kann sich in der x-Richtung verschieben. Wir erhalten also die mechanische Gleichung für die Bewegung dieser Platte zu

$$m\frac{d^2x}{dt^2} + f\frac{dx}{dt} + Kx = \text{äußere Kräfte}. \tag{42}$$

Zwischen den beiden Platten eines geladenen Kondensators wirkt aber eine Kraft F

$$F = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{Q^2}{2C}\right) = -\frac{Q^2}{2C^2}\frac{\partial C}{\partial x} \tag{43}$$

(Form und Vorzeichen dieser Gleichung wurden in der Elektrostatik behandelt). Wenn wir nun mit x die Veränderung von d bezeichnen, dann gilt

$$C = \frac{S}{4\pi d} = \frac{S}{4\pi(d+x)}.$$

Man sieht also, daß

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{C}\right) = \frac{4\pi}{S} = \left(\frac{4\pi d}{S}\right)\frac{1}{d}$$

und folglich

$$F = \frac{Q^2}{2Cd}.$$

Zerlegen wir Q in eine konstante Ladung Q_0 und eine kleine, veränderliche Ladung q, d. h. $Q^2 = Q_0^2 + 2Q_0 q$, so wird die veränderliche Kraft *in erster Näherung* den Wert

$$F = \left(\frac{Q_0}{Cd}\right) q$$

besitzen.

Nun ist jedoch $Q_0 = CE_0$; der Koeffizient von q lautet also $\frac{E_0}{d}$, und man erhält

$$F = \left(\frac{E_0}{d}\right) q. \tag{44}$$

Im allgemeinen wählt man x als positiv, wenn durch die Deformation der Spalt d vergrößert wird. Besitzt q das Vorzeichen von Q_0, d. h. also das Vorzeichen von E_0, dann wird die Kraft den Spalt d verringern, d. h. ein negatives x verursachen. Dadurch ist das Vorzeichen festgelegt, und die Bewegungsgleichung lautet

$$m\frac{d^2x}{dt^2} + f\frac{dx}{dt} + Kx = \text{mechanische Kraft} - \left(\frac{E_0}{d}\right) q$$

oder

$$m\frac{d^2x}{dt^2} + f\frac{dx}{dt} + Kx + \left(\frac{E_0}{d}\right) q = F. \tag{45}$$

Nun wollen wir die elektrische Gleichung aufstellen. Wenn q der veränderliche Teil der Kondensatorladung ist und wir zur Verallgemeinerung noch eine Selbstinduktion L in Reihe schalten, dann erhalten wir

$$L\frac{d^2q}{dt^2} + R\frac{dq}{dt} + \frac{Q_0+q}{C} = E_0 + E.$$

Nun hängt jedoch C wegen $C = \frac{S}{4\pi(d+x)}$ von x ab, und wir finden

$$L\frac{d^2q}{dt^2} + R\frac{dq}{dt} + \frac{(Q_0+q)}{C_0}\left(1+\frac{x}{d}\right) = E_0 + E.$$

Kann man q und x als klein gegenüber Q_0 bzw. d annehmen, dann können wir schreiben

$$L\frac{d^2q}{dt^2} + R\frac{dq}{dt} + \frac{q}{C_0} + \left(\frac{Q_0}{C_0}\right)\frac{x}{d} = E(t). \tag{46}$$

Nun ist $\frac{Q_0}{C_0} = E_0$, und wir erhalten für die *beiden gekoppelten Gleichungen* in x und q

$$m\frac{d^2x}{dt^2} + f\frac{dx}{dt} + Kx + \left(\frac{E_0}{d}\right)q = F(t), \tag{47}$$

$$L\frac{d^2q}{dt^2} + R\frac{dq}{dt} + \frac{q}{C} + \left(\frac{E_0}{d}\right)x = E(t). \tag{48}$$

Man sieht also, daß der *elektrostatische Wandler* durch zwei Kopplungsterme der *Verschiebung* (x ist die mechanische Verschiebung, q die der Elektrizität) *mit dem gleichen Koeffizienten* $\frac{E_0}{d}$ *bei gleichem Vorzeichen in beiden Gleichungen dargestellt wird.*

Es ist sehr bemerkenswert, daß dieser Kopplungskoeffizient immer einfach durch das *elektrische Feld* zwischen den Platten ohne einen weiteren geometrischen Faktor gebildet wird.

Diese Bedingung entspricht, wie man sofort sehen kann, der Bedingung der *Energieerhaltung* bei Transformation von *elastischer* (gespannte Feder) in *elektrostatische* Form (geladener Kondensator) mit einem Wirkungsgrad 1. Wir wollen uns auf eine Deformation oder eine langsame Aufladung, die in irgendeiner Weise statisch erfolgt, beschränken und können dabei die Terme in $\frac{d}{dt}$ und in $\frac{d^2}{dt^2}$ vernachlässigen. Den Beweis möge der Leser zur Übung selbst durchführen (siehe auch weiter hinten: Der piezoelektrische Quarz).

Wir wollen auch nicht auf das Funktionieren als Lautsprecher eingehen, da hierbei einige unangenehme Schwierigkeiten auftreten. Beim Funktionieren als Mikrophon ist nicht der Wirkungsgrad von ausschlaggebender Bedeutung; man legt vielmehr noch einen großen Widerstand in Reihe, um sofort mit der an den Klemmen des Widerstandes auftretenden Spannung $R\frac{dq}{dt}$ an das Gitter einer Verstärkerröhre gehen zu können (Abb. 395).

Will man trotz allem die Darstellung durch den KENNELLYschen Kreis benutzen, so ist dies durchaus möglich. Als Variable werden jedoch nicht mehr x und q, sondern $v = j\omega x$ und $i = j\omega q$ gewählt, wobei $\frac{d}{dt} = j\omega$ im Falle einer sinusförmigen Spannung gilt. Für die beiden Gleichungen (47) und (48) erhalten wir dann

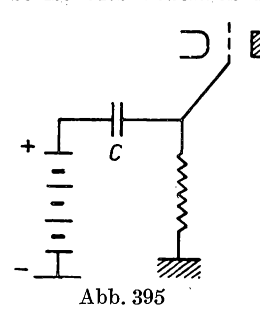


Abb. 395

$$\left(jm\omega + f + \frac{K}{j\omega}\right)v + \left(\frac{E_0}{j\omega d}\right)i = F, \tag{49}$$

$$\left(jL\omega + R + \frac{1}{jC\omega}\right)i + \left(\frac{E_0}{j\omega d}\right)v = E. \tag{50}$$

Wir sehen sofort, daß diese Resultate in bezug auf die Darstellung in i bzw. in v die gleichen sind, als lauteten die beiden Gleichungen

$$\left(jm\omega + f + \frac{K}{j\omega}\right)v + \left(\frac{E_0}{\omega d}\right)i = F, \tag{51}$$

$$\left(jL\omega + R + \frac{1}{jC\omega}\right)i + \left(\frac{E_0}{\omega d}\right)v = E. \tag{52}$$

Daraus ergibt sich der KENNELLYsche Kreis und damit ein Bewegungswiderstand, der im Resonanzfall den Wert

$$R_1 = \frac{1}{f}\left(\frac{E_0}{\omega d}\right)^2 \tag{53}$$

besitzt.

Dagegen wird die Phase von i in bezug auf v nur durch die beiden Gleichungen (49) *und* (50), *nicht jedoch durch* (51) und (52) *korrekt beschrieben.*

Trotz dieser Theorien und geschickter Konstruktionen hat sich die Verwendung des elektrostatischen Lautsprechers bisher nicht durchgesetzt. Das elektrostatische Mikrophon war und ist noch heute sehr verbreitet. Es hat den Nachteil eines hohen „Ausgangsscheinwiderstandes", d.h., die Kapazität C ist klein, und der große Wert $\frac{1}{C\omega}$ führt auf einen großen Widerstand R (mehrere MΩ). Dies verhindert die Verwendung eines abgeschirmten Kabels zur Übertragung der Ausgangsspannung an den Verstärker, da die Kapazität eines solchen Kabels viel zu groß gegenüber R und selbst gegenüber C wäre. Es muß also auf jeden Fall ein *Vorverstärker* benutzt werden, d.h., die in Abb. 395 dargestellte Röhre wird im Mikrophonkopf selbst angebracht. Da es nötig ist, sowohl Anodenspannung als auch Heizspannung zuzuführen, bedeutet dies eine unangenehme Komplikation.

Piezoelektrische Kristallschwinger

In einem schwingenden piezoelektrischen Quarz findet man alle Elemente der elektrostatischen Kopplung. Es wird interessant sein zu sehen, wie die Gesetze der Piezoelektrizität auf eben dieses Resultat führen.

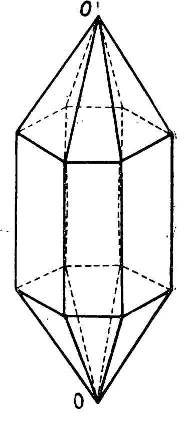


Abb. 396

Der in Abb. 396 dargestellte Quarz kristallisiert in einem in zwei Pyramiden auslaufenden hexagonalen System. Die Achse OO' ist die sogenannte *optische Achse*, die besondere Eigenschaften besitzt (natürliches Drehvermögen für parallel durchtretende Lichtstrahlen). Führt man einen senkrechten Schnitt zur optischen Achse durch, so erhält man bei einem Hexagonalkristall, bei dem der Winkel zwischen den Seitenflächen 120° beträgt, den in Abb. 397 dargestellten Querschnitt. Die Winkelhalbierenden dieser Winkel bestimmen drei um 120° zueinander verschobene Richtungen, die man *elektrische Achsen* nennt. Nun stellen wir uns vor, daß aus diesem Quarzkristall ein dünnes Parallelepiped herausgeschnitten wird,

dessen Kanten folgendermaßen bestimmt seien (siehe Abb. 397): Die Kante l, die Länge, verlaufe parallel zur optischen Achse, die zweite, die Breite, besitze den Wert d, und die Höhe h sei senkrecht zu einer der elektrischen Achsen.

Die *Piezoelektrizität* des Quarzes äußert sich nun in der folgenden Eigenschaft: Legen wir zwischen die beiden Flächen des Parallelepipeds, die senkrecht zur elektrischen Achse verlaufen, eine Kraft von F dyn, so entstehen auf jeder dieser beiden Flächen zwei gleiche Elektrizitätsmengen, jedoch mit entgegengesetzten Vorzeichen, die den Wert

$$q = KF \quad \text{oder} \quad \sigma_{(\text{Ladungsdichte})} = KP_{(\text{Druck})}$$

besitzen. Die Konstante K beträgt $6{,}45 \cdot 10^{-8}$, wenn man q in elektrostatischen Einheiten angibt.

Abb. 397

Dabei ist wichtig, daß die Ladung ihr Vorzeichen ändert, wenn die Richtung von F umgekehrt wird. Ein Druck ruft auf beiden Flächen Ladungen hervor, deren Vorzeichen gegenüber den bei einem Zug auftretenden entgegengesetzt sind.

Man kann außerdem feststellen, daß sich die Eigenschaften der elektrischen Achsen alle 120° wiederholen, d.h., die Achse OO' ist *drei-* und nicht sechszählig. Geht man im Kristall um 60° um OO' herum, so gelangt man von der ersten zur dritten elektrischen Achse, man findet jedoch einen entgegengesetzten Sinn; die Richtung der Piezoelektrizität hat sich umgekehrt. Um auf diese dreizählige Symmetrie hinzuweisen, markiert man bisweilen jede zweite Ecke bei Hexagonalkristallen, wie dies in Abb. 397 getan wurde.

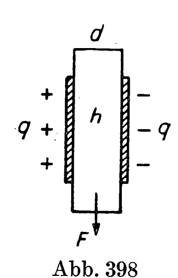


Abb. 398

Ebenso kann man (Abb. 398) einen Zug oder Druck längs der Höhe h des gleichen Parallelepipeds ausüben: Die Ladungen $+q$ und $-q$ erscheinen immer auf den zur elektrischen Achse senkrechten Flächen, ihre Aufladung ist jedoch verschieden. Es erscheint zwar tatsächlich die *gleiche Ladungsdichte* σ *für den gleichen Druck* P, der Druck P erfordert jedoch eine kleinere Kraft, da er auf eine kleinere Fläche dl wirkt:

$$P = \frac{F}{dl},$$

während die Dichte σ eine große Ladung q auf der großen Fläche hl liefert:

$$\sigma = \frac{q}{hl}.$$

Man findet also in diesem Fall

$$q = K\frac{h}{d}F,$$

wobei $\frac{h}{d}$ ein beträchtlicher Verstärkungsfaktor ist.

Alle diese Effekte wurden 1897 von den Geschwistern Curie entdeckt. Daneben existiert ein *inverser piezoelektrischer Effekt*, der von Lippmann aus Gründen der Energieerhaltung vorhergesagt wurde.

Bringt man auf zwei metallische Platten, die auf den zur elektrischen Achse senkrechten Flächen des Kristalls angeordnet sind, die Ladungen $+q$ und $-q$ an, indem man sie wie einen Kondensator auflädt, so stellt man fest, daß sich je nach der Polarität der Kristall in Richtung der elektrischen Achse entweder komprimiert oder dilatiert.

Es konnte (von LANGEVIN 1917) gezeigt werden, daß diese beiden piezoelektrischen Effekte (der direkte und der inverse) die Realisierung von elektromechanischen Schwingern oder Wandlern gestatten.

Stellen wir uns einen einfachen Schwinger vor, bei dem eine Quarzscheibe wie eine mit der Masse m behaftete Feder mit der Härte $K = \frac{YS}{l}$ (wobei Y der YOUNGsche Modul ist) wirkt. Beide Flächen, sowohl die mit der Masse m als auch die mit einer unbeweglichen festen Wand verbundene, dienen als Kondensatorplatten. Der elektrische Kreis kann, wie die Abb. 399 zeigt, vervollständigt werden, und wir können sofort folgende Gleichungen angeben, in denen C die Kapazität des den Quarz als Dielektrikum enthaltenden Kondensators bedeutet:

$$m\frac{d^2x}{dt^2} + f\frac{dx}{dt} + \left(\frac{YS}{l}\right)x + Aq = F, \quad (54)$$

$$L\frac{d^2q}{dt^2} + R\frac{dq}{dt} + \frac{q}{C} + Ax = E. \quad (55)$$

Abb. 399

Daraus erkennen wir sofort als Kopplungsterme die Kraft Aq und die Potentialdifferenz Ax, was wir noch beweisen werden.

Bei statischem, d. h. langsamem Arbeiten mit $\frac{d}{dt} = 0$ und $\frac{d^2}{dt^2} = 0$ drücken wir jetzt den Quarz um die Größe x zusammen, ohne eine äußere elektromotorische Kraft anzulegen. Wir erhalten dann

$$\frac{q}{C} + Ax = 0, \quad (56)$$

während wir wissen, daß $q = KF$, wobei F die die Kompression x hervorrufende elektromotorische Kraft ist:

$$F = \left(\frac{YS}{l}\right)x;$$

also ist

$$q = \left(\frac{KYS}{l}\right)x.$$

Setzen wir

$$q = ACx,$$

so erhalten wir (bis auf das Vorzeichen)

$$A = \frac{1}{C}K\frac{YS}{l}.$$

Nun ist jedoch $C = \frac{\varepsilon S}{4\pi d}$, da es sich um einen ebenen Kondensator handelt. Der Faktor ε stellt die Dielektrizitätskonstante des Quarzes in Richtung der elektrischen Achse dar. Daraus folgt dann

$$A = \frac{4\pi K Y}{\varepsilon}. \tag{57}$$

Es ist sehr bemerkenswert, daß A nur von *spezifischen Konstanten* des Quarzes abhängt, dem YOUNGschen Modul Y, der piezoelektrischen Konstante K und der Dielektrizitätskonstante ε, nicht jedoch von irgendeinem geometrischen Faktor.

Dieses Resultat ist durchaus hinreichend: Die Erhaltung der Energie erfordert, falls diese mit dem Wirkungsgrad 1 von der elektrostatischen in die elastische Form übergeht, daß der Kopplungskoeffizient in Gleichung (54) gleich A sei, und wir können unter der einfachen Annahme, daß keine anderen Energieformen auftreten, das Gesetz der inversen Piezoelektrizität finden.

Lassen wir nun tatsächlich langsam $\left(\frac{d}{dt} = \frac{d^2}{dt^2} = 0\right)$ auf den beiden Platten die Ladungen q ohne Kraftaufwendung auftreten, so erhalten wir aus Gleichung (54)

$$\left(\frac{YS}{l}\right) x + A q = 0.$$

Nun ist jedoch

$$A = \frac{4\pi K Y}{\varepsilon},$$

d.h., es gilt

$$\frac{x}{l} = \frac{4\pi K}{\varepsilon} \frac{q}{S}.$$

Wir sehen also, daß die Ladungsdichte $\sigma = \frac{q}{S}$ eine relative Dilatation oder Kompression

$$\frac{x}{l} = \frac{\Delta l}{l} = \left(\frac{4\pi K}{\varepsilon}\right) \sigma \tag{58}$$

hervorruft.

Das Prinzip der Energieerhaltung kann man auch wie folgt darstellen: Die elektrostatische und elastische Energie W tritt als quadratische Form der beiden Variablen q und x auf, so daß

$$W = \frac{q^2}{2C} + \left(\frac{YS}{l}\right) \frac{x^2}{2} + A q x.$$

Es existiert nur ein gemischter Term $A q x$. Die mechanische Kraft hat die Form

$$F = \frac{\partial W}{\partial x} = \left(\frac{YS}{l}\right) x + A q,$$

die elektrische Kraft ist gegeben zu

$$E = \frac{\partial W}{\partial q} = \frac{q}{C} + A x.$$

In beiden Gleichungen tritt also der gleiche Koeffizient A auf.

In der Praxis haben die piezoelektrischen Quarzschwinger niemals die in Abb. 399 angedeutete Form. Sie bestehen immer aus schwingenden Quarzscheiben, bei denen die Wellenausbreitung entweder im Quarz selbst (Schallgeschwindigkeit 3500 m/sec) oder in den zur Aufladung dienenden Massen erfolgt. Wir wollen auf diese rein mechanischen Komplikationen hier nicht näher eingehen.

Bei vielen Anwendungszwecken schwingt die dünne Quarzscheibe ohne mechanische Belastung. Ihre Schwingungsfrequenz ergibt sich derart, daß ihre Dicke d z.B. gleich $\frac{\lambda}{2}$ beträgt, wenn mit λ die Wellenlänge der sich einstellenden Schwingung bezeichnet wird. Wenn nun c die Schallgeschwindigkeit im Quarz ist, so sieht man, daß $\frac{c}{2d}$ die entsprechende Frequenz ist. Nach diesem Gesetz besitzt ein Quarz von 1 mm Dicke eine Frequenz von

$$\frac{3\,500\,000}{2}\,\text{Hz} = 1{,}75\,\text{MHz}.$$

Diese Frequenz entspricht einer *elektrischen* Wellenlänge von

$$\frac{3 \cdot 10^8}{1{,}75 \cdot 10^6}\,\text{Meter} \approx 170\,\text{Meter}.$$

Daraus ergibt sich folgende Faustregel:
„Ein (so geschnittener) Quarz schwingt mit 170 m pro mm.“

Wir interessieren uns hier jedoch mehr für die Umwandlung von elektrischer in mechanische Energie oder umgekehrt.

Betrachten wir nun (Abb. 400) eine flache Quarzscheibe von z.B. 40 cm Durchmesser, die zwischen zwei dicke Stahlscheiben geklebt wird. Die Stahlscheiben seien so bestimmt, daß die Resonanz des entlang der Achse $x x'$ schwingenden Ensembles z.B. 30000 Hz beträgt. Diese in Wasser abgestrahlte Frequenz (in Wasser ist $c = 1{,}5 \cdot 10^5$ cm/sec) entspricht einer Wellenlänge

$$\lambda = \frac{1{,}5 \cdot 10^5}{3 \cdot 10^4} = 5\,\text{cm}$$

und ist damit klein genug gegenüber dem Scheibendurchmesser von 40 cm, damit die Strahlung gut gerichtet ist. Der mechanische Strahlungswiderstand beträgt

$$f = \varrho c S = 1 \cdot 1{,}5 \cdot 10^5 \cdot \pi (20)^2 \approx 2 \cdot 10^8.$$

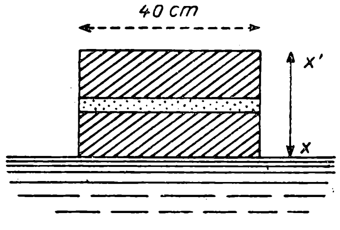


Abb. 400

Nun ist es noch interessant, den *Bewegungswiderstand* R_1 einer solchen Anordnung zu betrachten. In elektrostatischen Einheiten (mit $Y = 0{,}785 \cdot 10^{12}$ und $\varepsilon = 4{,}5$) findet man

$$R_1 = \left(\frac{A}{\omega}\right)^2 \frac{1}{f} = \left(\frac{4\pi K Y}{\varepsilon\omega}\right)^2 \frac{1}{f} = \left(\frac{4\pi \cdot 6{,}45 \cdot 10^{-8} \cdot 0{,}785 \cdot 10^{12}}{4{,}5 \cdot 2\pi \cdot 3 \cdot 10^4}\right)^2 \frac{1}{2 \cdot 10^8} = 3 \cdot 10^{-9}.$$

Rechnet man diesen Wert in Ohm um, so muß er mit $9 \cdot 10^{11}$ multipliziert werden und ergibt 2700 Ω. Dies wäre kein ausgesprochen hoher Scheinwiderstand, und er gestattet, den Schwinger sehr einfach durch eine Wechselstrommaschine oder eine Röhre mit abgestimmten Kreisen zu speisen, in denen der Schwinger mit seinem inneren Scheinwiderstand erscheint, der hauptsächlich durch seine Kapazität zwischen den Platten und außerdem durch die Bewegungsterme gegeben ist.

Scheinbare Modifikation der elastischen Parameter des Quarzes durch seine Piezoelektrizität

Wir wollen nun den YOUNGschen Modul durch ein Experiment bestimmen. Dazu üben wir auf einen Quarz eine Druckkraft F aus, um x zu messen und daraus auf Y rückschließen zu können. Tatsächlich haben wir jedoch [siehe Gleichung (54)]

$$F = \left(\frac{YS}{l}\right) x + Aq.$$

Während der Kompression dx erscheinen die Ladungen q mit dem Wert

$$\frac{q}{C} + Ax = 0$$

oder

$$q = -ACx.$$

Also gilt

$$F = \left(\frac{YS}{l} - A^2 C\right) x,$$

und an Stelle von Y messen wir

$$Y - \frac{A^2 C l}{S}.$$

Ebenso wird die Messung der Dielektrizitätskonstanten des Quarzes durch seine Piezoelektrizität beeinflußt.

Die Ansicht, daß die Ausbreitungsgeschwindigkeit longitudinaler Wellen im Quarz nicht genau $\sqrt{\frac{Y}{\varrho}}$ (ϱ = Dichte) beträgt, wurde bereits geäußert und stellt eine Folgerung des eben Gesagten dar.

Darstellung von Wandlern durch äquivalente elektrische Kreise

Wir betrachten einen Quarz, dessen Scheinwiderstand nur aus seiner Eigenkapazität C ohne eine in Reihe liegende Selbstinduktion oder einen elektrischen Widerstand *besteht*. Der mechanische Scheinwiderstand enthält eine Masse m, die Federhärte $D = \frac{YS}{l}$ und den Strahlungswiderstand f. Der Leser möge nun selbst zeigen, daß der untenstehende Kreis (Abb. 401) in elektrischer Hinsicht einem schwingenden Quarz völlig äquivalent ist, wenn

$$C_2 = C; \quad C_1 = C \frac{\frac{CA^2}{D}}{1 - \frac{CA^2}{D}};$$

$$L_1 = \frac{m}{D} \frac{1}{C} \left(\frac{D}{CA^2}\right),$$

und

$$R_1 C = \frac{f}{D} \frac{D}{CA^2}.$$

Insbesondere gilt

$$\frac{CA^2}{D} = \left(\frac{\varepsilon S}{4\pi l}\right) \frac{\left(\frac{4\pi K Y}{\varepsilon}\right)^2}{\left(\frac{YS}{l}\right)} = 0{,}9 \cdot 10^{-2},$$

d. h., daß die Kapazität C_1 numerisch $\frac{1}{110}$ der von C_2, der Kapazität des Quarzes ist und die Selbstinduktion L_1 einen Wert besitzt, der Resonanz bei der

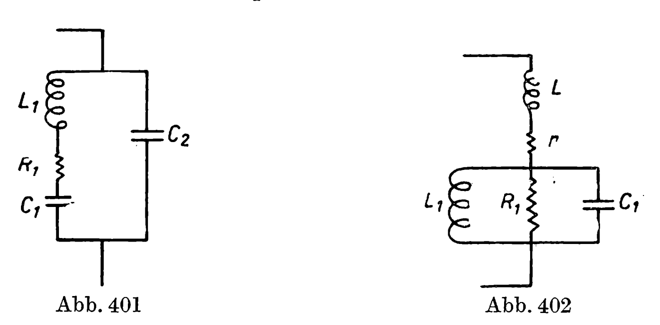


Abb. 401 Abb. 402

Frequenz des Quarzes ergibt. Dieser Faktor $\frac{1}{110}$ hängt nicht von geometrischen Faktoren ab.

Ebenso kann man einen äquivalenten elektrischen Kreis für einen Magnetostriktionsschwinger finden. Die obenstehende Abb. 402 zeigt die entsprechende Lösung.

Ist A der Kopplungskoeffizient ($A\,i$ bzw. $A\,v$ in den Gleichungen), so gilt

$$L = L;\quad r = r;$$

$$L_1 = \frac{A^2}{\left(\frac{Y S}{l}\right)};\quad C_1 = \frac{m}{A^2};\quad R_1 = \frac{A^2}{f},$$

wobei die Bezeichnungen wie oben gewählt sind.

VI. KAPITEL

Stoßanregung elektrischer Kreise, Operatorenrechnung, Übergangsbereiche, Zeitkonstanten

Einführung

In der Praxis hat man es meist mit reinen Gleich- oder Wechselstromproblemen zu tun, d.h., es gilt quasistationäre Lösungen für die Stromverteilungen in einem einer gleichförmigen oder sinusförmig mit der Zeit veränderlichen elektromotorischen Kraft unterliegenden Stromkreis zu finden. Der große Vorteil der imaginären Schreibweise und der Einführung der Scheinwiderstände im Wechselstrombereich besteht gerade darin, daß durch diese imaginäre Schreibweise die permanenten Wechselstrombereiche ebenso durch konstante Koeffizienten $\left(j L \omega, \frac{1}{j C \omega} \ldots\right)$ dargestellt werden können wie die Gleichstrombereiche.

Trotzdem muß man bei allen nur denkbaren Anordnungen auch Übergangsbereiche ins Auge fassen. Betrachten wir z.B. eine Hochspannungsleitung: Wird sie durch

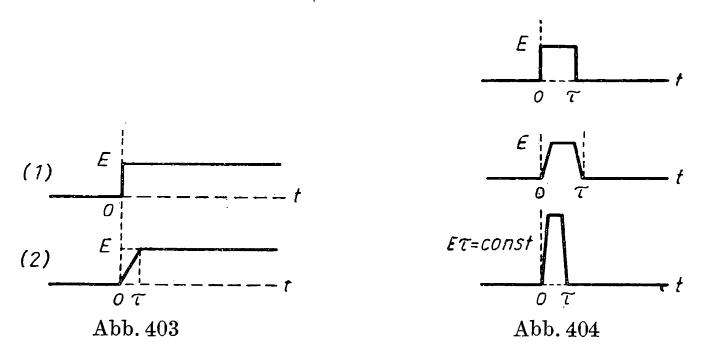


Abb. 403 Abb. 404

eine Wechselstrommaschine gespeist, so wünscht man ihre Reaktion bei sinusförmigem Strom zu kennen; schlägt jedoch ein Blitz in diese Leitung, so muß ihr Verhalten bei einem plötzlichen Stoß ebensogut bekannt sein. Der extreme Fall dieser veränderlichen Bereiche ist gerade der eines plötzlichen Stoßes, eines Strom- oder Spannungsimpulses.

Führt man plötzlich in einem elektrischen Kreis zur Zeit $t = 0$ eine konstante elektromotorische Kraft ein, indem man einen Schalter betätigt, so besteht die mathematische Darstellung dieses Vorganges in der Einführung einer zeitabhängigen elektromotorischen Kraft in einer KIRCHHOFFschen Gleichung, die ein verallgemeinertes OHMsches Gesetz ausdrückt, wie dies in Abb. 403 dargestellt ist, d.h. $E = 0$ für $t < 0$ und $E = \text{const} = E$ für $t > 0$. Zur Zeit $t = 0$ steigt die Funktion von 0 auf E an.

Es ist möglich, daß diese Diskontinuität des Wertes von E für $t = 0$ die Ursache für mathematische Schwierigkeiten bei der Behandlung der folgenden Fragen ist. Wir werden indessen sehen, daß dies bei *korrekt gestellten* physikalischen Problemen nicht der Fall sein wird.

Genaugenommen könnte man immer davon ausgehen, daß die Kurve 1 (Abb. 403) durch einen Grenzübergang aus der Kurve 2 hervorgeht, wenn man das kleine Zeitintervall τ, in dem die Spannung von 0 auf E ansteigt, gegen Null gehen läßt. Wie dem auch sei, wir haben so die *Spannungsfunktion* oder *Einheitssprungfunktion* definiert. Nun betätigen wir den Schalter, durch den wir die Einheitssprungfunktion eingeführt haben, zweimal in entgegengesetzten Richtungen. Wir erhalten dann eine Funktion mit der Amplitude E und der Dauer τ, wie sie in Abb. 404 dargestellt ist und die meist unbequem zu behandeln sein wird. Ist die Zeit τ jedoch sehr klein gegenüber den Zeiten, die zum Aufbauen der Ströme in allen Teilen des Kreises notwendig sind, dann ist es physikalisch klar, daß die Kreise die genaue Dauer des Impulses E nicht erkennen lassen. Wir wollen damit sagen, daß es unmöglich ist, τ durch eine Analyse der Ströme zu rekonstruieren, die durch die während dieser sehr kurzen Zeit τ wirkende elektromotorische Kraft E erzeugt werden, da diese Ströme sehr viel längere Zeit andauern. Betrachten wir nun einen Extremfall: ein 4 Mikrosekunden währender Blitz treffe auf eine Hochspannungsleitung und setze dabei durch die Ausbildung eines Lichtbogens das Öl eines Transformators in Brand. Dieser Brand möge z.B. 3 Stunden andauern, und es dürfte sehr schwierig sein, aus diesen 3 Stunden auf den 4 oder eventuell sogar nur 2 Mikrosekunden währenden Blitz rückzuschließen. Diese Situation führt uns auf die Betrachtung folgenden Falles, bei dem wir für einen Impuls der in Abb. 404 gezeigten Form τ gegen 0 gehen lassen. Wir werden weiter unten sehen, daß es zur Aufrechterhaltung von Effekten gleicher Stärke dann nötig ist, E gegen Unendlich gehen zu lassen, damit der Flächeninhalt zwischen der Kurve $E(t)$ und der Achse t gleich bleibt, d.h. $E\tau = \text{const}$.

Auf diese Weise haben wir die *Impulsfunktion* $E\tau$ definiert. Diese seit HEAVISIDE gut bekannte Funktion wurde von P. DIRAC in der Quantenmechanik wieder eingeführt und oft benutzt und ist dort unter dem Namen „DIRACsche Funktion" oder δ-Funktion bekannt. Es hat sich gezeigt, daß das Verhalten der Kreise bei einer Anregung durch die Impulsfunktion im allgemeinen relativ einfache Ausdrücke ergibt.

Nun kann man jedoch an die Kreise solche elektromotorischen Kräfte plötzlich anlegen, die einen komplizierteren zeitlichen Verlauf aufweisen. In Abb. 405 ist eine Funktion dargestellt, die wie die Spannung an den Klemmen eines sich entladenden Kondensators abfällt. Diese durch

$$y = 0 \quad \text{für} \quad t < 0;$$
$$y = E e^{-\alpha t} \quad \text{für} \quad t \geq 0$$

definierte Funktion wird durch das Symbol

$$y = [E e^{-\alpha t}]$$

dargestellt, wobei die eckigen Klammern bedeuten, daß $y = 0$ für $t < 0$ und $y = E e^{-\alpha t}$ für $t \geq 0$.

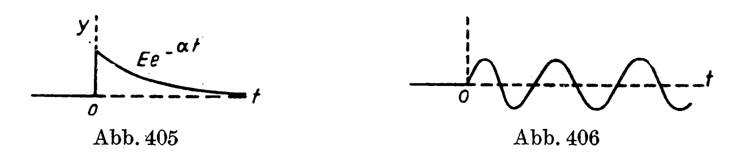


Abb. 405 Abb. 406

Ebenso kann man plötzlich eine elektromotorische Kraft $E \sin \omega t$ anlegen, woraus die in Abb. 406 angegebene Funktion

$$y = [E \sin \omega t]$$

folgt.

Mit dieser Klammernschreibweise kann man die Spannungssprungfunktion auch schreiben als

$$y = [E].$$

Verhalten der Kreise bei Impulsen

Alle Funktionen, die wir betrachten, haben folgende Eigenschaft: Sie beginnen durch einen plötzlichen Impuls zur Zeit $t = 0$ oder, wenn wir den zeitlichen Ursprung entsprechend wählen, zur Zeit t_1.

Um das Verhalten eines Kreises bei einem solchen Impuls festzustellen (wobei wir annehmen, daß der Kreis durch *lineare* Gesetze beschrieben wird und die Ströme den Spannungen proportional sind), existiert eine sehr direkte und zweckmäßige Methode, die besonders einfach anzuwenden ist, wenn man von einem früheren Zustand ausgeht, dem *Ruhezustand.*

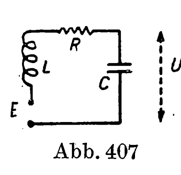


Abb. 407

Wir werden dies an Hand eines Beispiels besser verstehen. In Abb. 407 sind eine Selbstinduktion L, ein Widerstand R und eine Kapazität C in Reihe geschaltet. Durch die elektromotorische Kraft E fließt nun in diesem Kreis ein Strom i, so daß

$$E = L \frac{di}{dt} + Ri + \frac{1}{C} \int i dt. \tag{1}$$

Uns interessiert nun z. B. die Spannung U an den Klemmen von C

$$U = \frac{1}{C} \int i dt.$$

Nach Elimination von i ergibt sich

$$LC \frac{d^2 U}{dt^2} + RC \frac{dU}{dt} + U = E. \tag{2}$$

Entwickelt man E als Funktion der Zeit, so besteht das Problem nun darin, U als Funktion von t zu bestimmen.

Wir betrachten diese Entwicklung nur von $t > 0$ aus. Es ist möglich, daß wir *vorher*, für $t < 0$, einen Strom in $e^{-\alpha t} \sin(\omega t + \varphi)$ z. B. gehabt haben, der auch für $t > 0$ existiert, jedoch wie $e^{-\alpha t}$ gedämpft wird. Zu dieser Stromverteilung *addiert* man nun – da die Gleichung *linear* in U ist – eine neue Verteilung, die durch die in allen Zeitpunkten später als $t = 0$ angelegte elektromotorische Kraft $E(t)$ aufgebaut wird. Es ist klar, daß der elektrische Zustand für $t > 0$ durch diese Überlagerung hervorgerufen wird. Der neue, von $t = 0$ an auftretende Bereich kann berechnet werden, wenn man den Ruhezustand als Ursprung annimmt, d. h.

$$E = 0 \quad \text{für} \quad t < 0,$$

$$U = 0; \quad \frac{dU}{dt} = 0 \quad \text{für} \quad t < 0,$$

und folglich ist auch wegen Gleichung (2) $\dfrac{d^2U}{dt^2} = 0$.

Wir können also immer den Ruhezustand als Ursprung annehmen und solche Formeln als unzweckmäßig ansehen, die für kompliziertere Anfangsbedingungen gelten, z. B. für die Annahme $U = U_0$; $\dfrac{dU}{dt} = \left(\dfrac{dU}{dt}\right)_0$ für $t = 0$ mit einem die Gleichung (2) befriedigenden Wert für $\dfrac{d^2U}{dt^2}$.

Ist dies vorausgesetzt, so wird es zum Aufsuchen der Lösung U aus Gleichung (2) entsprechend dem anfänglichen Ruhezustand immer möglich sein,

- eine allgemeine Lösung (a) der homogenen Gleichung (2) mit $E = 0$ und
- eine partikuläre Lösung (b) der inhomogenen Gleichung mit $E(t)$ zu suchen sowie
- die allgemeine Lösung $a + b$ mit für a unbestimmten Koeffizienten anzugeben und
- diese Koeffizienten so zu bestimmen, daß die Grenzbedingungen erfüllt sind.

Sehr *viel einfacher* ist in diesem Fall die Anwendung der sogenannten *Operatorenrechnung*, die direkt möglich ist, wenn $[E(t)]$ eine einfache Form besitzt und für ein beliebiges $[E(t)]$ verallgemeinert werden muß.

Wir betrachten Gleichung (2). Multiplizieren wir beide Seiten mit $e^{-pt}\,dt$, wobei p ein beliebiger *positiver* Parameter ist, und integrieren dann von $t = 0$ bis $t = \infty$, dann erhalten wir

$$LC \int_0^\infty \frac{d^2U}{dt^2} e^{-pt}\,dt + RC \int_0^\infty \frac{dU}{dt} e^{-pt}\,dt + \int_0^\infty U e^{-pt}\,dt = \int_0^\infty E(t) e^{-pt}\,dt. \qquad (3)$$

Diese Gleichung können wir *partiell integrieren:*

$$\int_0^\infty \frac{dU}{dt} e^{-pt}\,dt = \left| e^{-pt} U \right|_0^\infty + p \int_0^\infty U e^{-pt}\,dt.$$

Nun ist jedoch $e^{-pt}U = 0$ für $t = 0$, da für $t = 0$ gerade $U = 0$ (anfänglicher Ruhezustand), und wegen des Faktors e^{-pt} auch für $t = \infty$. Daraus folgt die einfache Relation

$$\int_0^\infty \frac{dU}{dt} e^{-pt} dt = p \int_0^\infty U e^{-pt} dt. \tag{4}$$

Weiterhin ergibt sich

$$\int_0^\infty \frac{d^2U}{dt^2} e^{-pt} dt = p^2 \int_0^\infty U e^{-pt} dt, \tag{5}$$

so daß wir Gleichung (3) auch in der Form

$$[LCp^2 + RCp + 1] \int_0^\infty U e^{-pt} dt = \int_0^\infty E(t) e^{-pt} dt \tag{6}$$

schreiben können.

Zur Anwendung dieser Methode ist es notwendig, daß das Integral auf der rechten Seite, das eine bekannte Funktion von p ist, in einfachen Termen ausgedrückt werden kann. Dies ist aber gerade für alle weiter oben betrachteten Erregungen der Fall.

Man kann zeigen, daß

$$\int_0^\infty [E]\, e^{-pt} dt = \frac{E}{p}, \tag{7}$$

$$\int_0^\infty [E e^{-\alpha t}]\, e^{-pt} dt = \frac{E}{p + \alpha}, \tag{8}$$

$$\int_0^\infty [E \sin \omega t]\, e^{-pt} dt = E \frac{\omega}{p^2 + \omega^2}. \tag{9}$$

Diese Integrale sind leicht zu berechnen. Wir sehen also einen Zusammenhang zwischen einer Funktion $E(t)$ und ihrer Transformierten $E(p)$, der durch

$$\int_0^\infty E(t) e^{-pt} dt = F(p) \tag{10}$$

gegeben ist.

Also ist $\frac{\omega}{p^2 + \omega^2}$ die Transformierte von $\sin \omega t$ usw.

Diese Transformation wird LAPLACE-Transformation genannt. Wir wollen hier ausdrücklich darauf hinweisen, daß wir sie nur für *reelle Variable* und für Funktionen $E(t)$ für $t > 0$ definiert haben. Es ist jedoch möglich, LAPLACE-Transfor-

mationen von $t = -\infty$ bis $t = +\infty$, für die komplexe Ebene, für Funktionen mit zwei Veränderlichen usw. einzuführen. Wir wollen den Leser nur darauf hinweisen, daß wir uns absichtlich auf die Einführung der LAPLACE-Transformation in der für diesen Zweck üblichen Form beschränkt haben.

Jetzt wollen wir noch die *Impulstransformierte* betrachten.

Im Integral $\int\limits_0^\infty [[E]]_\tau e^{-pt}\,dt$ gibt die doppelte Klammer an, daß $[E]$ nur von $t = 0$ bis $t = \tau$ den Wert E besitzt, dann jedoch für $t > \tau$ verschwindet. Der Parameter p ist beliebig, aber bestimmt. Es wird immer so kleine Zeiten geben, daß $e^{-p\tau}$ gerade gleich 1 ist mit $p\tau \ll 1$.

Ist die Zeit τ klein genug, um in dieses Gebiet zu fallen, dann können wir folgende Vereinfachungen einführen:

$$\int\limits_0^\infty [[E]]_\tau e^{-pt}\,dt = \int\limits_0^\tau E e^{-pt}\,dt = \int\limits_0^\tau E \cdot 1 \cdot dt = E\tau = F(p). \tag{11}$$

Das Integral $F(p)$ stellt einfach die *Fläche* der Kurve in Abb. 404 dar und *hängt selbst nicht mehr von p ab.* Durch diese außerordentliche Vereinfachung ist die Betrachtung der Impulsfunktion möglich.

Ebenso wichtig ist es, die entsprechenden physikalischen Grenzen zu betrachten, wenn die Anwendung dieser Impulsfunktion die Tatsachen gut wiedergeben soll.

An Stelle einer unendlichen Spannung E während der unendlich kleinen Zeit τ wird man an einen elektrischen Kreis während einer kleinen Zeit τ eine große Spannung E legen. Dabei ist es notwendig, daß diese Zeit τ sehr klein gegenüber den Zeiten ist, die zum Aufbauen von Strömen und Spannungen im Kreis benötigt werden. Erzeugt man z. B. durch den hypothetischen „Impuls" in $^1/_{10}$ sec Ströme, die von anderen Strömen überlagert sind, die 1 bzw. 10 sec zum Aufbau benötigen, so lautet die Bedingung, daß der physikalische Impuls viel kürzer als $^1/_{10}$ sec sein muß. Ein anderes Beispiel: Wir betrachten noch einmal den 10μsec währenden Blitz, der einen Transformator in einer 1000 km langen Leitung zerstört. Das Signal „Blitz" erreicht den Transformator nach $^1/_{300}$ sec (300000 km/sec). Fließen durch diesen Blitz 500000 A während 10μsec, so stellt er einen Ladungsimpuls von $500000 \cdot 10 \cdot 10^{-6} = 5$ Coulomb dar, was übrigens noch wenig ist. Für den zerstörten Transformator ist es völlig unwesentlich, ob diese 5 Coulomb in 1 oder in 10μsec fließen, die Phänomene wären jedoch ganz andere, würde sich diese Zeit auf einige msec belaufen.

Allgemein kann man sagen, daß sich unser Problem auf die Lösung einer *Integralgleichung* zurückführen läßt:

$$(LCp^2 + RCp + 1)\int\limits_0^\infty U(t)\, e^{-pt}\,dt = F(p), \tag{12}$$

wobei $U(t)$ die unbekannte Funktion ist. Diese Integralgleichung ist der anfänglichen Differentialgleichung des Problems äquivalent, sofern die Grenzbedingungen als Ursprung den Ruhezustand festlegen. Kann man Gleichung (12) lösen, so erhält man $U(t)$ direkt als Partikularlösung des Problems, ohne noch eine allgemeine Lösung hinterher partikularisieren zu müssen.

Die Beispiele für die Spannungen $E(t)$, die die Lösungen (7), (8), (9), (11) liefern, sind alle integrierbar und lassen interessante physikalische Schlußfolgerungen zu.

1. *Verhalten eines Resonanzkreises bei einem plötzlichen Impuls.* Gleichung (12) lautet also nun

$$(LCp^2 + RCp + 1)\int_0^\infty U e^{-pt}\, dt = \int_0^\infty [[E]]_\tau e^{-pt}\, dt = E\tau. \tag{13}$$

Dies kann man umschreiben in

$$\int_0^\infty U e^{-pt}\, dt = \frac{E\tau}{LC(p-p_1)(p-p_2)}, \tag{14}$$

wobei p_1 und p_2 die beiden Wurzeln der algebraischen Gleichung

$$LCp^2 + RCp + 1 = 0$$

sind.

Es ist nun angebracht, den rechten Ausdruck aus Gleichung (14) *in einfache Funktionen zu zerlegen* und zu schreiben

$$\int_0^\infty U e^{-pt}\, dt = \frac{E\tau}{LC} \cdot \frac{1}{(p_1 - p_2)} \left[\frac{1}{(p-p_1)} - \frac{1}{(p-p_2)}\right]. \tag{15}$$

Wir wollen nun folgende partielle Integralgleichung betrachten:

$$\int_0^\infty y(t)\, e^{-pt} dt = \frac{1}{p - p_1}.$$

Ihre Lösung ist offensichtlich und lautet

$$y = e^{-p_1 t}.$$

Tatsächlich gilt

$$\int_0^\infty e^{(p_1 - p)t}\, dt = \frac{1}{p - p_1}.$$

Folglich lautet die Lösung von Gleichung (15)

$$U = \left(\frac{E\tau}{LC}\right) \frac{1}{p_1 - p_2} \left[e^{p_1 t} - e^{p_2 t}\right], \tag{16}$$

und wir brauchen diese Lösung nur noch in einer gebräuchlicheren Form auszudrücken.

Wir haben dann tatsächlich

$$\left.\begin{matrix} p_1 \\ p_2 \end{matrix}\right\} = -\frac{R}{2L} \pm j\sqrt{\frac{1}{LC} - \frac{R^2}{4L^2}} = -\frac{R}{2L} \pm j\omega.$$

Dabei ist ω die Eigenfrequenz des Kreises. Im allgemeinen wird der Kreis wenig gedämpft sein, und es gilt

$$\omega^2 = \frac{1}{LC} - \frac{R^2}{4L^2} = \frac{1}{LC}\left(1 - \frac{R^2 C}{4L}\right) = \frac{1}{LC}\left(1 - \frac{R^2}{4L^2\omega^2}\right).$$

Dies bedeutet, daß wir für einen Kreis mit der Güte $\frac{L\omega}{R} = 100$, einem üblichen Wert in der Rundfunktechnik z.B., erhalten

$$\omega^2 = \frac{1}{LC} \approx \frac{1}{40000}.$$

Auf jeden Fall, und ohne die Approximation $\omega^2 = \frac{1}{LC}$ anzuwenden, werden wir mit $p_1 - p_2 = 2j\omega$ finden:

$$U = \frac{E\tau}{2jLC\omega} e^{-\frac{Rt}{2L}} (e^{j\omega t} - e^{-j\omega t}) = \frac{E\tau}{LC\omega} e^{-\frac{Rt}{2L}} \sin\omega t. \tag{17}$$

Wir sehen also, daß – wie es auch nötig ist – die imaginären Glieder aus der Lösung eliminiert sind und diese nur aus reellen Termen besteht.

Es bleibt jedoch noch abzuschätzen, welchen Begrenzungen τ unterliegt, damit die Lösung noch physikalisch sinnvoll ist:

$\frac{\tau}{LC\omega}$ liegt einfach in der Nähe von $\omega\tau$,

$e^{-\frac{Rt}{2L}}$ geht für $t = 0$ von 1 aus und fordert zum Stromaufbau eine lange Zeit in der Größenordnung von $2\frac{L}{R} = 2\frac{L\omega}{R\omega} = \frac{2L\omega t}{2\pi R} \approx 30\ T$, wobei T die ω entsprechende *Periode* ist, wenn die Kreisgüte $\frac{L\omega}{R}$ in der Größenordnung von 100 liegt.

Der Wert $\sin\omega t$ verschwindet in einer Zeit $\frac{T}{4}$, kehrt dann um usw. Der Impuls muß also kurz sein gegenüber der Aufbauzeit der Ströme, z.B. $\tau \ll \frac{T}{4}$

$$\frac{4\tau}{T} \ll 1 \quad \text{oder noch} \quad \omega\tau \ll 1.$$

Unsere Lösung ist also gültig, vorausgesetzt, daß die Wirkungszeit τ des Impulses einen solchen Wert hat, daß $\omega\tau \ll 1$.

Etwas weiter hinten werden wir auf einen paradoxen Charakter der Lösung (17) zurückkommen.

2. *Verhalten eines Resonanzkreises beim plötzlichen Einschalten einer anschließend konstant bleibenden elektromotorischen Kraft.* Wir bauen eine Schaltung auf, wie sie in Abb. 408 dargestellt ist, und schließen zur Zeit $t = 0$ plötzlich den Schalter, der E in Reihe legt. Von diesem Augenblick an lädt man den Kondensator C über die Selbstinduktion L und den Widerstand R.

Für dieses Problem lautet die Gleichung (12)

$$(LCp^2 + RCp + 1) \int_0^\infty U(t) e^{-pt} dt = \int_0^\infty E e^{-pt} dt = \frac{E}{p}. \tag{18}$$

Nun werden folgende Transformationen durchgeführt:

$$\begin{aligned}\int_0^\infty U(t) e^{-pt} dt &= \frac{E}{LCp(p-p_1)(p-p_2)}\\ &= \frac{E}{LC(p_1-p_2)}\left[\frac{1}{p(p-p_1)} - \frac{1}{p(p-p_2)}\right]\\ &= \frac{E}{LC(p_1-p_2)}\left[\frac{1}{p_1(p-p_1)} - \frac{1}{p_2(p-p_2)} - \left(\frac{1}{p_1} - \frac{1}{p_2}\right)\frac{1}{p}\right].\end{aligned} \tag{19}$$

Das Problem ist also gelöst, da $\frac{1}{p-p_1}$ in U den Wert $e^{p_1 t}$, $\frac{1}{p-p_2}$ den Wert $e^{p_2 t}$ und $\frac{1}{p}$ gerade 1 in U ergeben $\left(\text{tatsächlich gilt} \int_0^\infty 1 e^{-pt} dt = \frac{1}{p}\right)$.

Nachdem man gezeigt hat, daß $p_1 - p_2 = 2j\omega$ und daß man in $e^{p_1 t}$, $e^{p_2 t}$ als Faktor $e^{-\frac{Rt}{2L}}$ setzen kann, so erhält man nach einigen Transformationen, die den Zweck haben, die imaginären Größen zu beseitigen, die Lösung

$$U = E\left[1 - e^{-\frac{Rt}{2L}}\left(\frac{R}{2L\omega}\sin\omega t + \cos\omega t.\right)\right]. \tag{20}$$

Diese Lösung ist aus mehr als einem Grund interessant:

Zuerst stellt sie die Überlagerung eines stationären endlichen Bereiches $U = E$, wo der Kondensator auf die Batterienspannung geladen ist, und eines Übergangsbereichs, in dem der Kreis mit seiner Eigenfrequenz ω und einer mit $e^{-\frac{Rt}{2L}}$ abnehmenden Amplitude schwingt, dar.

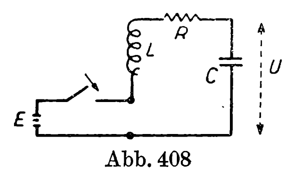


Abb. 408

Amplitude und Phase dieses Übergangsbereichs sind durch die Notwendigkeit vollständig bestimmt, die Grenzbedingungen zu befriedigen, welche nach der Gleichung folgendermaßen lauten:

$$U = 0, \quad \frac{dU}{dt} = 0 \quad \text{für} \quad t = 0.$$

Aus Gleichung (20) sieht man, daß effektiv $U = 0$ für $t = 0$. Nun berechnen wir jedoch $\frac{dU}{dt}$ und erhalten

$$\frac{dU}{dt} = E\left(\frac{\omega^2 + \frac{R^2}{2\,L^2}}{\omega}\right) e^{-\frac{Rt}{2L}} \sin\omega t = \frac{E}{LC\omega} e^{-\frac{Rt}{2L}} \sin\omega t, \tag{21}$$

einen Ausdruck, der Null ist für $t = 0$.

Diese Bedingungen werden wir nun durch rein physikalische Überlegungen wiederfinden:

Im Zeitpunkt $t = 0$ ist die Ladung des Kondensators C Null, d.h. also auch die Spannung an seinen Klemmen, und bei Anlegung eines nicht unendlich kleinen Stromes i würde U nur linear von Null anwachsen. Nun ist jedoch der Ladungsstrom selbst unendlich klein, da die Selbstinduktion L jedem Versuch, i zu verändern, eine Spannung $L\frac{di}{dt}$ entgegensetzt. Der Anfangsbereich ist also durch die Bedingung gegeben, daß $L\frac{di}{dt} = LC\frac{d^2U}{dt^2}$ gerade gleich E. Die Spannung U verläuft also als Funktion der Zeit nach einem parabolischen Gesetz von der Form

$$\frac{d^2U}{dt^2} = \frac{E}{LC} \quad \text{oder} \quad U = \frac{E}{2LC}t^2.$$

Dies ist ein Resultat, daß wir auch durch eine Reihenentwicklung aus Gleichung (20) wiederfinden. Mit

$$e^{-\frac{Rt}{2L}} = 1 - \frac{Rt}{2L} + \frac{R^2t^2}{8L^2}\cdots,$$

$$\sin\omega t = \omega t - \cdots,$$

$$\cos\omega t = 1 - \frac{\omega^2t^2}{2}\cdots$$

finden wir das bereits durch Gleichung (20) beschriebene Resultat

$$U = E\left(1 - 1 + \frac{R^2t^2}{8L^2} + \frac{\omega^2t^2}{2}\right) = E\,\frac{\omega^2 + \frac{R^2}{4\,L^2}}{2}\,t = \frac{E}{2LC}t^2. \tag{22}$$

Schließlich können wir noch sehr interessante Schlußfolgerungen aus dem Ausdruck $\frac{dU}{dt}$ ziehen. In Gleichung (21) ist

$$\frac{dU}{dt} = \frac{E}{LC\omega} e^{-\frac{Rt}{2L}} \sin\omega t,$$

so daß $\tau \frac{dU}{dt}$ dem Wert

$$\frac{E\tau}{LC\omega} e^{-\frac{Rt}{2L}} \sin \omega t \tag{17}$$

identisch ist, der in Gleichung (17) die Lösung beim Einschalten eines plötzlichen Impulses im gleichen Resonanzkreis war.

Diese Situation erklärt sich folgendermaßen:

Ist $U(t)$ die Lösung, die bei einem Problem mit linearen Kreisen der angelegten elektromotorischen Kraft $E(t)$ entspricht, dann muß $\frac{dU}{dt}$ die Lösung des Problems sein, wenn $\frac{dE}{dt}$ die angelegte elektromotorische Kraft darstellt. Aus Homogenitätsgründen lautet die Lösung bei der elektromotorischen Kraft $\tau \frac{dE}{dt}$ auch $\tau \frac{dU}{dt}$. Nun finden wir nach Rechnung, daß die Lösung bei einem plötzlichen Impuls die Form $\tau \frac{dU}{dt}$ hat, wenn die Lösung für die Einheitssprungfunktion E durch U gegeben ist. Es bleibt nun noch zu zeigen, daß die *Ableitung der Sprungfunktion der plötzliche Impuls* bis auf den Faktor *E ist.* Wenn wir noch einmal die Abb. 403 betrachten, so ist also

$$\frac{dE}{dt} = 0 \quad \text{für} \quad t < 0; \quad \frac{dE}{dt} = 0 \quad \text{für} \quad t > \tau;$$

$$\frac{dE}{dt} = \frac{E}{\tau} \quad \text{für} \quad 0 \leqq t \leqq \tau;$$

folglich hat $\tau \frac{dE}{dt}$ den Wert E während des Intervalls $t = 0$ bis $t = \tau$. Dies erklärt, daß die Lösung U des Problems der abgeleiteten und mit τ multiplizierten Sprungfunktion E identisch ist mit der Lösung U des die Zeit τ andauernden Impulses E.

(Es bleibt zu bemerken, daß unsere beiden Lösungen (17) und (20) trotz allem nur für sehr kleine τ und $\omega\tau \ll 1$ gelten.)

Weiterhin erhalten wir jedoch das folgende Resultat.

Die Ableitung von $E(t)$ in der Differentialgleichung läuft auf die Multiplikation der Transformierten $E(p)$ mit p hinaus. Insbesondere gilt

$$\int_0^\infty [E]\, e^{-pt}\, dt = \frac{E}{p}$$

und

$$\int_0^\infty [[E]]_\tau\, e^{-pt}\, dt = E\tau.$$

$\frac{1}{\tau}\,[[E]]_\tau$ ist also gleich $\frac{dE}{dt}$, wie wir es bereits weiter oben gesehen haben.

Dieses Theorem ist natürlich nichts Neues, da wir es schon aus Gleichung (4) für eine beliebige Funktion $U(t)$ erhielten.

Nun kann man Methoden einführen, die die Berechnungen erleichtern: Ist eine Gleichung der Form $(ap^n + bp^{n-1} + \cdots + c) \cdot \int_0^\infty U e^{-pt} dt = F(p)$ sehr schwierig zu lösen, so kann man ebensogut eine beliebige der folgenden Form lösen:

$$(ap^n + bp^{n-1} + \cdots + c)\int_0^\infty y e^{-pt} dt = pF(p) \quad \text{oder} \quad p^2 F(p)$$
$$\text{oder} \quad \frac{1}{p} F(p) \quad \text{oder} \quad \frac{1}{p^2} F(p) \tag{23}$$

und als Lösung des anfänglichen Problems entsprechend

$$U(t) = \int y\,dt \quad \text{oder} \quad \int dt \int y\,dt \quad \text{oder} \quad \frac{dy}{dt} \quad \text{oder} \quad \frac{d^2y}{dt^2} \quad \text{usw.} \tag{24}$$

ansetzen.

Selbstverständlich verändert man durch diesen Kunstgriff den Grad der Diskontinuität im Ursprung der Funktionen U und E, bzw. der verschiedenen Ableitungen von U und der Interpretation der erhaltenen Resultate muß eine gewisse Aufmerksamkeit gewidmet werden.

Kehren wir nun zum Verhalten eines Resonanzkreises bei einem plötzlichen Impuls zurück. Dieser Verlauf wird durch Gleichung (17) beschrieben und ist als Funktion der Zeit durch die Kurve in Abb. 409 dargestellt.

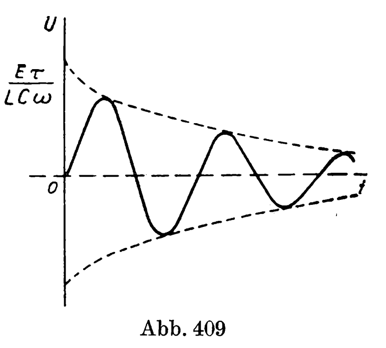


Abb. 409

Wir sehen daraus, daß U zuerst für t nahe 0 linear mit der Zeit ansteigt. Nun scheinen die Argumente, die wir bei dem nächstfolgenden Problem (Verhalten bei der Sprungfunktion E) erwähnten und nach denen U von $t = 0$ an mit t^2 verlaufen muß, *a fortiori* für diesen Fall gültig zu sein. Wir haben hier also ein *Paradoxon*, das wir bereits weiter oben erwähnten. Dieses Paradoxon verschwindet jedoch, wenn man beachtet, daß E, *physikalisch* gesehen, endlich bleibt. Außerdem muß dabei τ gegen Null gehen, damit die Methode korrekt ist, was bedeutet, daß $\frac{dU}{dt}$ in Abb. 409 in jedem praktischen Fall in dem gleichen Maß wie τ gegen Null geht. In diesem Augenblick wird die Tangente selbst am Anfang für $t = 0$ horizontal, und sie ist nur geneigt, weil man tatsächlich eine im Grenzfall *unendliche* Spannung E anlegt.

Andere Beispiele. Einige Resultate

Mit den beiden angeführten Beispielen hatten wir Gelegenheit, über diese speziellen Fälle ein Exposé der allgemeinen Theorie der sogenannten Operatorenrechnung zu entwickeln. Diese Rechnungsart wurde zuerst von O. HEAVISIDE eingeführt, allerdings in einer so mysteriösen Weise, daß es Jahre gedauert hat, bis

der Sinn seiner Resultate und die Art, in der er sie erhielt, bei den sehr viel komplizierteren Problemen der Ausbreitung auf Kabeln wiedergefunden wurde.

Auf jeden Fall konnte man bei diesen Beispielen die *Sicherheit* dieser Methode abschätzen, die jede mehr oder weniger schwierige Diskussion über die Grenzbedingungen vermeidet und die gerade die mit den zu betrachtenden Diskontinuitäten noch zu vereinbarende Kühnheit besitzt.

Wir wollen jetzt einige physikalisch interessante Resultate angeben, ohne dabei jedoch alle Rechnungen durchzuführen, die dem Leser zur Übung überlassen bleiben.

1. *Verhalten eines Resonanzkreises bei plötzlich angelegtem sinusförmigem Signal.* Wir wollen annehmen, daß das Signal von der Form

$$E(t) = [E \sin \omega t]$$

sei, d.h., nach den Gleichungen (6) und (9) mit der Phase Null im Ursprung gilt

$$(LCp^2 + RCp + 1) \int_0^\infty U e^{-pt}\, dt = \frac{F\omega}{p^2 + \omega^2} \tag{25}$$

oder

$$\int_0^\infty U e^{-pt}\, dt = \frac{E\omega}{LC} \frac{1}{(p - p_1)(p - p_2)} \frac{1}{(p - j\omega)(p + j\omega)}. \tag{26}$$

Wir lassen jetzt die Näherung $\omega^2 = \frac{1}{LC}$ bei den Faktoren gelten, wo dies ohne Gefahr möglich ist, nehmen auch an, daß diese Kreisfrequenz gerade der Resonanzfrequenz des Kreises entspricht. Mit $p_1 - p_2 = 2j\omega$ gilt dann

$$\int_0^\infty U e^{-pt}\, dt = \frac{E\omega}{2j} \left(\frac{1}{p - p_1} - \frac{1}{p - p_2}\right) \frac{\omega}{2j\omega} \left(\frac{1}{p - j\omega} - \frac{1}{p + j\omega}\right) \tag{27}$$

und

$$\int_0^\infty U e^{-pt}\, dt = -\frac{E\omega}{4} \left[\frac{1}{j\omega - p_1} \left(\frac{1}{p - j\omega} - \frac{1}{p - p_1}\right) + 3 \text{ ähnliche Terme}\right]. \tag{28}$$

Es ist interessant, solche Faktoren wie $\frac{1}{j\omega - p_1}$ mit dem Wert $\frac{2L}{R}$ auftreten zu sehen, und man stellt fest, daß die verschiedenen Terme von U als Faktor $\frac{L\omega}{R}$ aufweisen. Die Lösung lautet schließlich

$$U = -E \frac{L\omega}{R} \left(1 - e^{-\frac{Rt}{2L}}\right) \cos \omega t. \tag{29}$$

In dieser Lösung tritt ein *stationärer Wert* $U = -E \frac{L\omega}{R} \cos \omega t$ auf, den man leicht und direkt mit Hilfe der üblichen Berechnung der Scheinwiderstände ge-

funden hätte und der auch hier direkt von Termen in $\frac{1}{p \pm j\omega}$ in Gleichung (28) herrührt. Ebenso findet man jedoch auch den Übergangsbereich, der zur Befriedigung der Anfangsbedingungen in Gleichung (29) notwendig ist.

(Wir wollen noch bemerken, daß Gleichung (29) für $t = 0$ ein Signal ergibt, das nicht in t^2 beginnt; der kleine Term in t, der noch auftritt, rührt von dem anfangs akzeptierten Unterschied zwischen $\omega^2 = \frac{1}{LC}$ und $\omega^2 = \frac{1}{LC} - \frac{R^2}{4L^2}$ her.)

2. *Schutz eines Kreises gegen langsame und schnelle Störungen.* Ein hochfrequenter Kreis ist in erster Linie zur Wiedergabe eines Signals $E \sin \omega t$ bestimmt. Handelt es sich um einen einfachen Resonanzkreis, so wissen wir, daß er an den Klemmen seines Kondensators eine Spannung U liefert, die für das Signal, wie wir noch sehen werden, im Verhältnis $\frac{L\omega}{R}$ *verstärkt* ist.

Trifft nun eine plötzliche, aber dann langsam abfallende Störung auf einen solchen Kreis, so kann man annehmen, daß sie dort die elektromotorische Kraft $[E]$ hervorruft. Das Verhalten des Kreises wird dann durch Gleichung (20) bestimmt, und man stellt fest, daß darin ein schwingender Anteil mit der gleichen Kreisfrequenz ω enthalten ist, wie sie das eben betrachtete Signal der ungefähren Dauer von

$$\frac{2L}{R}\sec = \frac{2L\omega}{R} \cdot \frac{T}{2\pi} = \left(\frac{1}{\pi}\,\frac{L\omega}{R}\right) T$$

besaß, aber mit der Amplitude von höchstens E (T ist dabei die Periode des Signals).

Mit anderen Worten, der durch einen abgestimmten Kreis beim Empfang eines Signals gegenüber einer langsamen Störung dargebotene Schutz wird durch das Verhältnis

$$\frac{L\omega}{R} \cdot \frac{E}{E} = \frac{L\omega}{R}$$

gegeben, d.h. gerade durch die Güte des Kreises.

Betrachten wir nun noch eine Störung, die genügend plötzlich erfolgt, um durch einen Impuls $[E\tau]$ mit $\omega\tau \ll 1$ angenähert werden zu können, so ist der Schutz des Signals gegenüber dieser Störung durch den Ausdruck

$$\frac{L\omega}{R}\,\frac{1}{\omega\tau} \quad \text{mit} \quad \omega\tau \ll 1$$

bestimmt.

Man versteht nun die Rolle der Resonanzkreise in den Rundfunkempfängern besser: Nicht nur, daß die *Trennschärfe* gesteigert wird, d.h. die Unterdrückung von Signalen auf anderen als der Empfangsfrequenz, sondern sie heben auch das Signal, das sich im Takt $\frac{\omega}{2\pi}$ pro Sekunde wiederholt, stärker hervor, indem es mit $\frac{L\omega}{R}$ (Größenordnung 100) multipliziert wird.

3. *Störschutz durch mehrere Kreise.* Man kann auf eine so allgemeine Frage keine vollständige Antwort geben; wir wollen jedoch einige interessante Spezialfälle behandeln:

Wir betrachten zuerst zwei identische Stromkreise L, R, C, die durch eine Schirmgitterröhre oder eine Pentode (Abb. 410) gekoppelt sind.

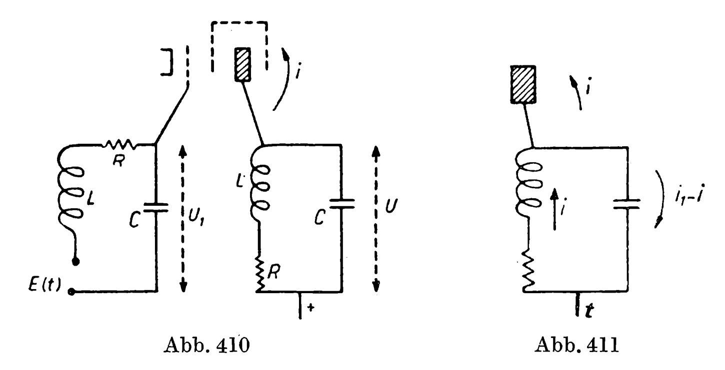


Abb. 410 Abb. 411

Uns interessiert nun die Spannung U an den Klemmen des Kondensators im Ausgangskreis.

Die an das Gitter gelegte Spannung U_1 hängt nach folgender Gleichung vom Signal $E(t)$ ab:

$$LC\frac{d^2U_1}{dt^2} + RC\frac{dU_1}{dt} + U_1 = E(t).$$

Diese am Gitter der Schirmgitterröhre mit der Steilheit $\frac{K}{R_i}$ liegende Spannung U_1 ruft einen Anodenstrom i mit dem Wert $i = \frac{K}{R_i} U_1$ hervor. Im abgestimmten Anodenkreis der Röhre gilt offensichtlich (Abb. 411)

$$L\frac{di_1}{dt} + Ri_1 = \frac{1}{C}\int (i - i_1)\,dt \tag{30}$$

und

$$LC\frac{d^2i_1}{dt^2} + RC\frac{di_1}{dt} + i_1 = i. \tag{31}$$

Die Spannung U an den Klemmen des Kondensators beträgt dann $\frac{1}{C}\int (i_1 - i)\,dt$ oder ebenso $L\frac{di_1}{dt} + Ri_1$. Dies kann nun gleich $L\frac{di_1}{dt}$ gesetzt werden, wenn die Kreisgüte $\frac{L\omega}{R}$ hoch ist.

Man kann nun die Schreibweise vereinfachen, indem aus der symbolischen Gleichheit von d/dt in den Differentialgleichungen und p in den auf der LAPLACE*-Transformation beruhenden Integralgleichungen Nutzen gezogen wird.*

Setzen wir nun in den Differentialgleichungen $\frac{d}{dt} = p$; $\frac{d^2}{dt^2} = p^2$, so lautet die Gleichung (31)

$$(LCp^2 + RCp + 1)\, i_1 = i, \tag{32}$$

woraus ebenso wie aus

$$LC\frac{d^2 i_1}{dt^2} + RC\frac{d i_1}{dt} + i_1 = i$$

folgt

$$(LCp^2 + RCp + 1)\int\limits_0^\infty i_1 e^{-pt}\, dt = \int\limits_0^\infty i e^{-pt}\, dt.$$

Wir finden

$$U = Lpi_1 = \frac{Lpi}{LCp^2 + RCp + 1} = \frac{\frac{K}{R_i}\cdot LpU_1}{LCp^2 + RCp + 1}, \tag{33}$$

und wegen Gleichung (30)

$$U_1 = \frac{E}{LCp^2 + RCp + 1} \tag{34}$$

und

$$U = \frac{K}{R_i}\,\frac{LpE}{(LCp^2 + RCp + 1)^2}. \tag{35}$$

Daraus sehen wir, daß das effektive Signal $U(t)$ am Ausgang mit der elektromotorischen Kraft $E(t)$ durch die folgende Gleichung beschrieben wird:

$$\int\limits_0^\infty U(t)\, e^{-pt}\, dt = \frac{K}{R_i}\,\frac{Lp\int\limits_0^\infty E e^{-pt}\, dt}{(LCp^2 + RCp + 1)^2}. \tag{36}$$

Das einfachste Problem erhalten wir nun durch Anwendung der Sprungfunktion E, die

$$\int\limits_0^\infty E e^{-pt}\, dt = \frac{E}{p}$$

ergibt, und die zu lösende Gleichung lautet

$$\int\limits_0^\infty U e^{-pt}\, dt = \frac{K}{R_i}\,\frac{LE}{(LC)^2\,(p - p_1)^2\,(p - p_2)^2} =$$

$$= \frac{K}{R_i}\,\frac{LE}{(LC)^2\,(p_1 - p_2)^2}\left[\frac{1}{(p - p_1)^2} + \frac{1}{(p - p_2)^2} - \frac{2}{(p_1 - p_2)}\left(\frac{1}{p - p_1} - \frac{1}{p - p_2}\right)\right]. \tag{37}$$

Man kann sofort zeigen, daß die Lösung von

$$\int_0^\infty y e^{-pt}\, dt = \frac{1}{(p - p_1)^2} \tag{38}$$

gerade

$$y = \frac{t^{n-1}}{(n-1)!}\, e^{p_1 t} \tag{39}$$

lautet.

Zu der expliziten Lösung von Gleichung (37) kann man nun – mit einigen zulässigen Approximationen – gelangen:

$$U = E \frac{K}{2 R_i} L\omega (\omega t \cos \omega t - \sin \omega t)\, e^{-\frac{Rt}{2L}}. \tag{40}$$

Dies wäre also die durch eine (verglichen mit der Sprungfunktion E) langsame Störung verursachte Ausgangsspannung.

Dieses Ergebnis ist mit dem Signal U' zu vergleichen, das wir für ein *eintretendes* Signal $E \sin \omega t$ mit der gleichen Amplitude E erhalten hätten, nämlich (nach einer einfachen Rechnung)

$$U' = E \frac{K}{R_i} L\omega \left(\frac{L\omega}{R}\right)^2 \sin \omega t. \tag{41}$$

Das Verhältnis Signal : Störung ist also durch

$$\frac{U'}{U} = \frac{2\left(\frac{L\omega}{R}\right)^2 \sin \omega t}{(\omega t \cos \omega t - \sin \omega t)\, e^{-\frac{Rt}{2L}}} \tag{42}$$

gegeben.

Wichtig ist es noch, diese Größe für den Zeitpunkt der Maximalamplitude der Störung zu betrachten. Wir sehen, daß die Amplitude der Störung im wesentlichen durch

$$\omega t e^{-\frac{Rt}{2L}}$$

bestimmt wird und für $t = \frac{2L}{R}$ durch ein Maximum $\frac{2}{e} \frac{L\omega}{R}$ verläuft. In diesem Augenblick, d.h. bei der Verwendung von *zwei* Kreisen mit einer durch die Zeitkonstante *eines* Kreises gegebenen zeitlichen Verschiebung, geht das Verhältnis $U' : U$ durch ein *Minimum*, das etwa durch

$$\frac{U'}{U} = e \frac{L\omega}{R} \tag{43}$$

bestimmt ist.

Man weiß nun jedoch, daß *ein* abgestimmter Kreis bereits einen Schutz $\frac{L\omega}{R}$ bietet. Der *zweite* Kreis, obwohl er identisch ist, *vergrößert diesen Schutz gegen die Störungen nur um den Faktor* $e = 2{,}718 \ldots$.

Physikalisch ist dies durchaus nicht paradox. Es erklärt sich durch die Tatsache, daß der erste Kreis die plötzliche Störung in ein *nahezu periodisches* Signal $e^{-\frac{Rt}{2L}} \sin(\omega t + \varphi)$ umformt, das in den zweiten Kreis übergeht und dort einen Verstärkungsfaktor von etwa $\frac{L\omega}{R}$ findet.

Verallgemeinert man dies nun für 3, 4, ... Kreise, so sieht man sofort, daß der Schutzfaktor immer langsamer ansteigt. Der dritte Kreis besitzt noch den Faktor von etwa 1,1; der vierte etwa 1,05 usw.

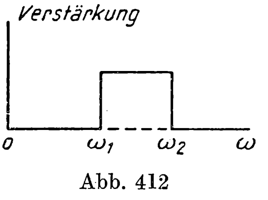


Abb. 412

Indessen vergrößern diese abgestimmten Kreise in einem Empfänger die Trennschärfe. Aus diesen Betrachtungen muß trotzdem geschlossen werden, daß es selbst bei sehr guter Trennschärfe immer ein bestimmtes Störniveau gibt, das nicht mehr reduziert werden kann und auf jeden Fall auftritt. Wir können uns wie folgt davon überzeugen, daß dies so sein muß.

Wir betrachten (Abb. 412) die Verstärkung als Funktion der Frequenz bei einem *idealen* Empfänger, der nur in dem Bereich von ω_1 bis ω_2 verstärkt.

Die Störungen seien in der allgemeinen Darstellung durch ihr *Frequenzspektrum* oder das äquivalente FOURIER-Integral

$$\int_{\omega=0}^{\infty} A(\omega) \sin[\omega t + \varphi(\omega)]\, d\omega \tag{44}$$

gegeben.

Der Empfänger wird nun alle Frequenzen zwischen $\omega = \omega_1$ und $\omega = \omega_2$ aufnehmen und verstärken, so daß ein nicht mehr zu reduzierender Störpegel

$$\int_{\omega_1}^{\omega_2} A(\omega) \sin[\omega t + \varphi(\omega)]\, d\omega \tag{45}$$

auftritt.

4. *Störschutz durch gekoppelte Kreise.* Nun kann man Elemente von Resonanzkreisen auch anders als durch Röhren koppeln und trotzdem Nutzen aus der vergrößerten Trennschärfe ziehen, die durch gleichzeitige Anwesenheit von mehreren Kreisen verursacht wird. Der Leser möge sich (Abb. 413) die Situation bei zwei durch eine große Kapazität C_1 gekoppelten L-C-Kreisen überlegen ($C_1 \ll C$). Legt man an den linken Kreis eine elektromotorische Kraft E, so wird dieser Kreis mehr oder weniger in Resonanz geraten, und es fließt auf jeden Fall durch C_1 ein gewisser Strom, wodurch eine neue elektromotorische Kraft auftritt, die ihrerseits den rechten Stromkreis angreift.

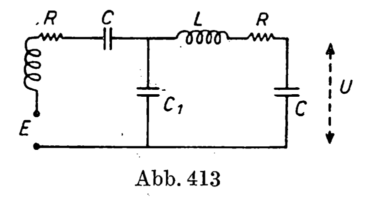


Abb. 413

Nach der Durchführung aller Rechnungen findet man, daß das Signal U, wenn $E(t)$ die Form eines kurzen Impulses $(E\tau)$ aufweist, den Wert

$$U = \frac{2\tau}{LC_1} e^{-\frac{Rt}{2L}} \left[\frac{\sin \omega_1 t}{\omega_1} - \frac{\sin \omega_2 t}{\omega_2}\right] \tag{46}$$

besitzt, wobei ω_1 und ω_2 die beiden Eigenfrequenzen der gekoppelten Kreise sind:

$$\begin{aligned} \omega_1 &= \sqrt{\frac{1}{LC} + \frac{1}{LC_1} - \frac{R^2}{4L^2}}, \\ \omega_2 &= \sqrt{\frac{1}{LC} - \frac{1}{LC_1} - \frac{R^2}{4L^2}}. \end{aligned} \tag{47}$$

5. *Erweiterung von Operatorenrechnungsmethoden für beliebige Funktionen $E(t)$.* Wir betrachten eine beliebige Funktion $E(t)$ und wollen annehmen, daß das plötzliche Signal E zur Zeit τ (und nicht zur Zeit 0) während der sehr kurzen Zeit $d\tau$ (und nicht mehr τ, wie weiter oben) an einen bestimmten Kreis gelegt werde. Mit $U(t)$ bezeichnen wir das Verhalten dieses Kreises bei zur Zeit $t = 0$ angelegtem Impuls. Legen wir das Signal jedoch erst im Augenblick τ an, so erhalten wir $U(t - \tau)$. Dieser Ausdruck selbst besitzt nun den Faktor $E d\tau$. Es gilt also

$$U(t - \tau) = Z(t - \tau)\, E d\tau.$$

Mit anderen Worten: $Z(t)$ gibt das Verhalten des Kreises beim Einheitsimpuls an und ist eine Funktion, die durch die Lösung des entsprechenden Problems als bekannt angenommen wird.

Wirkt die Spannung $E(t)$ dauernd auf den Kreis, so kann man sie als eine Folge von Impulsen $E(t)\, dt$ ansehen, von denen jeder ein Ausgangssignal

$$U(t - \tau) = Z(t - \tau)\, E(\tau)\, d\tau$$

hervorruft.

Daraus ergibt sich für das Gesamtsignal in der Zeit t

$$U(t) = \Sigma U(t - \tau) = \int\limits_{\tau = -\infty}^{t} Z(t - \tau)\, E(\tau)\, d\tau. \tag{48}$$

Im Prinzip erweist es sich also als möglich, das Verhalten eines beliebigen Kreises bei einer beliebig während der Zeit variierenden Anregung zu kennen, wenn es gelingt, die Eigenschaft des Kreises bei einem plötzlichen Impuls zu finden. Die Lösung des Problems ergibt das Integral in Gleichung (48), das eine *Analyse der Elementarimpulse* darstellt, die im Grunde das Pendant oder das Äquivalent zum FOURIER-*Integral* bei der Frequenzanalyse ist.

Gleichung (48) hat die einfachste mögliche Form. Ein anderer, von J. R. CARSON angegebener Ausdruck beschreibt das Verhalten bei beliebigem Signal durch ein Integral beim Anlegen einer Einheitsfunktion E von unendlich kleiner Höhe.

Betrachtet man die beiden Abb. 414 und 415, so stellt man fest, daß es sich hier nur um zwei verschiedene Zerlegungsarten für das Signal $E(t)$ handelt.

6. *Übergangsbereiche und Zeitkonstanten.* Bei nochmaliger Betrachtung der weiter oben erhaltenen Resultate sehen wir, daß sich bei Vergrößerung der Anzahl der Kreiselemente auch die zeitliche Entwicklung von Übergangsbereichen sehr kompliziert.

Der Begriff der *Zeitkonstanten* eines Stromkreises ist nur bei einem Resonanzkreis L, C, R einfach, in dem Ströme und Spannungen sich in bezug auf ihre Ampli-

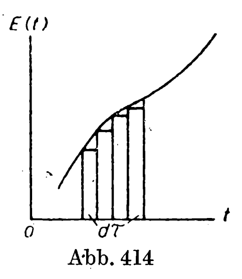


Abb. 414

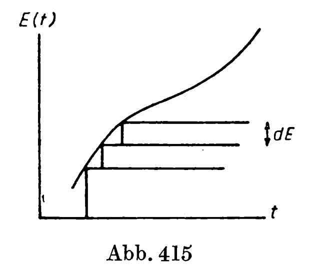


Abb. 415

tude wie $e^{-\frac{Rt}{2L}}$ verhalten, bis ihre Ursache verschwindet. Der Begriff der Zeitkonstanten $\Theta = \frac{2L}{R}$ schließt so die Vorstellung eines exponentiellen Abfalls der Amplituden mit der Zeit ein, so daß die Amplitude nach der Zeit Θ auf den e-ten Teil ihres Wertes ($e = 2{,}718\ldots$) abgefallen ist.

Enthält ein Kreis mehrere magnetische Energieträger (Selbstinduktionen), die ihre Energie mit mehreren Reservoirs elektrischer Energie (Kapazitäten) austauschen können, so sind die aufeinanderfolgenden Austauschvorgänge nicht unbedingt in einfachem zeitlichem Ablauf zu erwarten. Man kann recht willkürlich eine Einstellzeit der Ströme und dann eine Abklingzeit bestimmen, nachdem die Amplitude durch ein Maximum verlaufen ist.

Wir haben im Fall der beiden identisch abgestimmten Kreise (und überhaupt bei identischer Abstimmung), die durch eine Schirmgitterröhre (d.h. ohne Rückwirkung zwischen den Kreisen) gekoppelt waren, gesehen, daß sich ein Signal in $te^{-\frac{t}{\Theta}}$ einstellt, welches die Einstellzeit Θ und die Zeit enthält, die zur Abnahme des Signals auf $\frac{1}{e}$ des Wertes erforderlich ist (etwa $2\,\Theta$). Anders ausgedrückt:

zur Zeit $t = \Theta$ hat das Signal einen Maximalwert e^{-1};

zur Zeit $t = 2\,\Theta$ beträgt es $2e^{-2} = \frac{2}{e}\,e^{-1}$;

zur Zeit $t = 3\,\Theta$ beträgt es $3e^{-3} = \frac{3}{e^2}\,e^{-1}$.

Der Wert $\frac{3}{e^2}$ liegt nahe bei $\frac{1}{e}$, und wenn man von der Zeitkonstante eines solchen Systems sprechen kann, so muß man annehmen, daß sie etwa $2\,\Theta$ beträgt, aber daß sie sich nur nach einer anfänglichen Verzögerung Θ einstellt.

Betrachten wir einen geschlossenen Kreis aus zwei wie in der Abb. 413 gekoppelten Kreisen, so müssen wir den Fall einer starken Kopplung unterscheiden, bei dem die Eigenfrequenzen ω_1 und ω_2 sehr verschieden voneinander sind und die beiden entsprechenden Ströme sich ohne Wechselwirkung anders als *schnelle* Überlagerungen verhalten. Die beträchtliche Zeitkonstante beträgt $2\frac{L}{R}$ und ist viel größer als die Periode dieser Überlagerungen. Liegt jedoch eine schwache Kopplung vor und sind ω_1 und ω_2 nahe beieinander, so gelangt man zu dem weiter oben für zwei durch eine Röhre gekoppelte identische Kreise beschriebenen gleichen Bereich (Θ, 2Θ, 3Θ). Dieser Bereich wird sich einstellen, sobald die Periode der Überlagerung $\frac{2\pi}{\omega_1 - \omega_2}$ vergleichbar oder größer als die Zeit $\frac{2L}{R}$ wird.

7. *Ausdehnung der Operatorenrechnung bei Ausbreitungsvorgängen.* Auf einer Leitung oder einer Antenne werden Ströme und Spannungen durch Gleichungen mit partiellen Ableitungen beschrieben. Das Signal, das diese Ströme und Spannungen hervorruft, kann lokalisiert (eine Wechselstrommaschine am Ende einer Leitung) oder über die Leitung verteilt sein (Induktion durch das veränderliche elektromagnetische Feld eines Senders). In jedem Fall kann die zeitabhängige LAPLACE-Transformation auf diese Gleichungen mit partiellen Ableitungen angewandt werden. Man erhält dann interessante Resultate, die jedoch nicht einfach sind und von denen viele Beispiele in der Veröffentlichung von HEAVISIDE enthalten sind.

AUSBREITUNG. STRAHLUNG

I. KAPITEL

Ausbreitung auf Drähten. Kabel. Antennen

Ausbreitungsgleichungen

Wir betrachten einen leitenden Draht (Abb. 416), der nicht unbedingt geradlinig ausgespannt ist, dessen Krümmungsradius jedoch groß ist im Vergleich zum Durchmesser. Das Experiment zeigt, daß seine Kapazität und seine Selbstinduktion der Drahtlänge proportional sind. Wir können also eine Kapazität und eine Selbstinduktion pro Längeneinheit definieren, die wir mit C und L bezeichnen wollen.

Nun betrachten wir eine sehr kleine Länge dx des Leiters und nennen U und $U + dU$ die Spannungen in den Querschnitten x und $x + dx$. Vernachlässigen wir jetzt den OHMschen Widerstand, dann hat die Potentialdifferenz an den Klemmen den Wert

$$V_A - V_B = (L\,dx)\,\frac{di}{dt}.$$

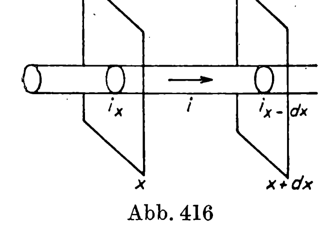


Abb. 416

Nun gilt aber

$$V_A - V_B = U - (U + dU) = -dU.$$

Daraus folgt

$$-dU = L\,dx\,\frac{di}{dt}$$

oder

$$-\frac{\partial U}{\partial x} = L\,\frac{\partial i}{\partial t}. \tag{1}$$

(Die Veränderungen von U längs x werden zu einem gegebenen Zeitpunkt t betrachtet. Daraus ergibt sich die partielle Ableitung $\frac{\partial U}{\partial x}$ für $t =$ const. Die zeitlichen Veränderungen von i dagegen erfolgen für $x =$ const. Daraus ergibt sich $\frac{\partial i}{\partial t}$.)

Andererseits trägt das Leiterelement dx die Ladung δq. Diese Ladung ist mit dem Potential des Elements durch die Fundamentalgleichung der Elektrostatik

$$\delta q = (C\,dx)\,U$$

verbunden, wobei Cdx die Kapazität dieses Leiterelements ist.

Wir wollen jetzt δq berechnen: Die Veränderungen von δq ergeben sich aus der Differenz der bei x eintretenden Stromstärke, die in der Zeit dt die Ladung

$$d\,q_x = i_x\,d\,t$$

zuführt, und der bei $x + dx$ austretenden Stromstärke, die die Ladung abführt:

$$(dq)_{x+dx} = i_{x+dx}\,d\,t\,.$$

Folglich erhalten wir für die Veränderung $d\,\delta q$ von δq in der Zeit dt den Ausdruck

$$d\,\delta\,q = d\,q_x - d\,q_{x+dx} = (i_x - i_{x+dx})\,d\,t = -\frac{\partial i}{\partial x}\,d\,x\,d\,t.$$

Andererseits gilt

$$\frac{d\,\delta\,q}{d\,t} = (C\,d\,x)\,\frac{d\,U}{d\,t}\,,$$

und wir erhalten durch Gleichsetzen der beiden Werte für $\frac{d\,\delta\,q}{d\,t}$

$$-\frac{\partial i}{\partial x} = C\,\frac{\partial U}{\partial t}\,. \tag{2}$$

Wir fanden also zwei Gleichungen (1) und (2), die die Veränderungen von i und U längs des Leiters und in Abhängigkeit von der Zeit verbinden. Eliminieren wir aus einer der beiden Gleichungen (1) oder (2) eine der Unbekannten, so erhalten wir für die andere eine *Ausbreitungsgleichung.*

Leiten wir (1) nach x und (2) nach t ab, so erhalten wir

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} = -L\,\frac{\partial^2 i}{\partial x\,\partial t}\,,$$

$$-\frac{\partial^2 i}{\partial x\,\partial t} = C\,\frac{\partial^2 U}{\partial t^2}\,.$$

Daraus ergibt sich

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} = LC\,\frac{\partial^2 U}{\partial t^2}\,. \tag{3}$$

Mit $c_1 = \frac{1}{\sqrt{L\,C}}$ kann man (3) in der Form

$$\frac{\partial^2 U}{\partial t^2} = c_1^2\,\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} \tag{4}$$

darstellen.

Man kann leicht zeigen, wenn man U in gleicher Weise eliminiert, daß i dieselbe Gleichung der zweiten partiellen Ableitung befriedigt:

$$\frac{\partial^2 i}{\partial t^2} = c_1^2\,\frac{\partial^2 i}{\partial x^2}\,. \tag{5}$$

Allgemeine Lösung

Man sieht sofort die allgemeine Lösung der Gleichung (5): $i = f\left(t - \frac{x}{c_1}\right)$ genügt für jede beliebige Funktion f dieser Gleichung, genauso wie jede beliebige Funktion $\varphi\left(t + \frac{x}{c_1}\right)$. Da die allgemeine Lösung einer Gleichung mit partiellen Ableitungen zweiter Art nur von zwei willkürlichen Funktionen abhängt, sehen wir, daß wir die allgemeine Lösung von (5) in der Form

$$i = f\left(t - \frac{x}{c_1}\right) + \varphi\left(t + \frac{x}{c_1}\right) \tag{6}$$

darstellen können.

Nun stellt $f\left(t - \frac{x}{c_1}\right)$ eine Stromwelle dar, die sich ohne Deformation längs des Drahtes mit der Geschwindigkeit c_1 in Richtung positiver x ausbreitet. Zur Zeit $t = 0$ ist das Profil der Welle längs der Achse durch den Ausdruck $f\left(-\frac{x}{c_1}\right)$ gegeben. Zur Zeit τ findet man den gleichen Strom im Punkt $x + \xi$. Es ist also

$$i = f\left(-\frac{x}{c_1}\right) = f\left(\tau - \frac{x + \xi}{c_1}\right).$$

Daraus ergibt sich

$$\tau - \frac{\xi}{c_1} = 0$$

und

$$c_1 = \frac{\xi}{\tau}.$$

Der Strom i hat also in der Zeit τ die Strecke ξ mit der Geschwindigkeit c_1 zurückgelegt.

Entsprechend stellt $\varphi\left(t + \frac{x}{c_1}\right)$ eine Stromwelle dar, die sich in Richtung negativer x ohne Deformation mit der Geschwindigkeit c_1 ausbreitet.

Der Ausdruck

$$c_1 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$$

stellt also die *Ausbreitungsgeschwindigkeit* (man sagt auch *Wellengeschwindigkeit*) dar und ist mit L und C eindeutig zu berechnen. Diese Geschwindigkeit ist unabhängig von der Wellenform und besonders von ihrer *Frequenz*. Es tritt also keine „Dispersion" auf.

Gleichung (6) hat eine Bedeutung, auf die wir noch eingehen wollen: Welches auch die Erzeugungsart des Stromes auf einem Leiter sei, wenn er keine Verluste besitzt, findet man immer nur zwei Wellen, die sich in entgegengesetzten Drahtrichtungen ohne Deformation ausbreiten. Eine kompliziertere Theorie ergibt jedoch

bei Berücksichtigung der auftretenden Verluste (OHMscher Widerstand des Leiters, dielektrische Verluste in der Luft oder im Isolator) einfach wieder zwei Wellen, die sich gegeneinander ausbreiten, sich gegenseitig dämpfen und unter Umständen sogar auslöschen (siehe Abb. 417, in der die Ausbreitung einer von einem

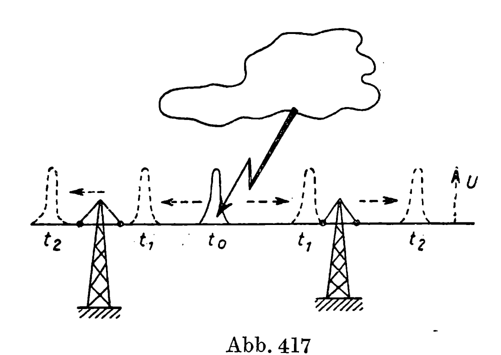


Abb. 417
Ausbreitung einer durch einen Blitzeinschlag auf eine Starkstromleitung hervorgerufenen Welle.

Blitzeinschlag herrührenden Überspannung auf einer elektrischen Leitung dargestellt ist).

Betrachten wir die beiden Stromwellen f und φ in Gl. (6), die z. B. so gewählt sind, daß sie die Anfangsbedingungen befriedigen, so kann man U nicht einfach beschreiben, indem man zwei neue willkürliche Funktionen als Lösung von (4) einführt, da U und i durch die Gleichungen (1) und (2) verbunden sind.

Ist i in Form von Gl. (6) gegeben, so können wir ohne Mühe zeigen, daß wir aus Gl. (2)

$$\frac{\partial U}{\partial t} = -\frac{1}{C}\frac{\partial i}{\partial x} = +\frac{1}{c_1 C}\left[\frac{df}{d\left(t-\frac{x}{c_1}\right)} - \frac{d\varphi}{d\left(t+\frac{x}{c_1}\right)}\right]$$

erhalten. Integrieren wir nun und beachten, daß

$$\frac{1}{c_1 C} = \sqrt{\frac{L}{C}}$$

ist, so erhalten wir

$$U = \sqrt{\frac{L}{C}}\left\{f\left(t-\frac{x}{c_1}\right) - \varphi\left(t+\frac{x}{c_1}\right)\right\} \tag{7}$$

bis auf eine additive Funktion von x, die Null sein muß, wenn auch die Gleichung (1) befriedigt sein soll.

Wir haben also gefunden, daß das System (1), (2) die allgemeine Lösung Gl. (6), (7) besitzt:

Gleichungen		Lösungen
$-\frac{\partial U}{\partial x} = L\frac{\partial i}{\partial t}$, $\quad -\frac{\partial i}{\partial x} = C\frac{\partial U}{\partial t}$	$\rightarrow$	$i = f\left(t - \frac{x}{c_1}\right) + \varphi\left(t + \frac{x}{c_1}\right)$, $\quad U = \varrho\left\{f\left(t - \frac{x}{c_1}\right) - \varphi\left(t + \frac{x}{c_1}\right)\right\}$

Dabei sind $\varrho = \sqrt{\frac{L}{C}}$ der charakteristische Scheinwiderstand der Leitung und $c_1 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$ die Ausbreitungsgeschwindigkeit.

Berechnung von ϱ und c_1

Notwendigerweise müssen ϱ die Dimension eines Widerstandes und c_1 die einer Geschwindigkeit aufweisen. Um ϱ und c_1 zu berechnen, genügt es, die Berechnung von L und C *in einem System kohärenter Einheiten* durchzuführen. Wir wollen hier einen einfachen Fall behandeln.

Wir betrachten ein konzentrisches oder koaxiales Kabel, das aus einem inneren zylinderförmigen Leiter mit dem Radius R_1 und einem äußeren konzentrischen Leiter mit dem Radius R_2 besteht. Um die Rechnung zu vereinfachen, nehmen wir an, daß die Dicke beider Leiter klein sei gegenüber ihren Radien (Abb. 418).

Der Zwischenraum zwischen beiden Zylindern sei von einem Material mit der Dielektrizitätskonstanten ε und der Permeabilität μ ausgefüllt, welches einen vollkommenen Isolator bilden muß. In der Praxis muß diese Permeabilität μ in der Nähe der des Vakuums liegen. Ferromagnetika sind wegen ihrer Verluste daher ausgeschlossen.

Abb. 418

Betrachten wir also eine bestimmte Länge dieses Kabels, das ein System von zwei Leitern im Zustande totaler Influenz (siehe Kapitel Elektrostatik) mit den Ladungen $+Q$ und $-Q$ zu jedem Zeitpunkt auf den beiden Leitern bildet. Man erhält also *eine* Ausbreitung von zwei *entgegengesetzt gerichteten* Strömen auf jedem Leiter, dem man Kapazität und Selbstinduktion der Anordnung zuschreibt.

Bei einem Zylinderkondensator ist die Kapazität pro Längeneinheit bekanntlich gegeben zu

$$C = \frac{\varepsilon}{2\ln\frac{R_2}{R_1}} \quad \text{in elektrostatischen Einheiten.} \qquad (8)$$

Jetzt wollen wir die Selbstinduktion L berechnen: Der Strom $-i$ des äußeren Leiters erzeugt im Inneren kein magnetisches Feld (wir hatten ein entsprechen-

des Theorem im IV. Kapitel festgestellt). Der Strom $+i$ des inneren Leiters ruft ebenfalls kein Feld für $r < R_1$ hervor. Für $r > R_2$ heben sich die Felder der beiden Ströme $+i$ und $-i$ auf. Im Gebiet $R_1 < r < R_2$ erhalten wir ein nur von dem inneren Leiter herrührendes Feld mit dem Wert

$$H = \frac{2\,i}{r}$$

in elektromagnetischen Einheiten oder

$$H_{\text{Gauß}} = \frac{2\,i}{c \cdot r}$$

in elektrostatischen Einheiten. Dabei bedeutet c das Verhältnis der Stromstärkeneinheit in elektromagnetischen zu der in elektrostatischen Einheiten und hat den Wert $3 \cdot 10^{10}$.

Pro Längeneinheit des konzentrischen Kabels erhält man also eine magnetische Energie von

$$\int\limits_{r=R_1}^{r=R_2} \frac{\mu\, H^2}{8\,\pi}\, 2\,\pi\, r\, d\, r,$$

wobei $2\,\pi\, r\, dr$ das konzentrische Volumenelement zwischen den beiden Zylindern mit der Höhe 1 ist.

Diese Energie ist nach Definition $\frac{1}{2}\, L i^2$, da sie von dem im Stromkreis fließenden Strom i herrührt. Es ist also

$$\frac{1}{2}\, L i^2 = \int\limits_{r=R_1}^{r=R_2} \frac{\mu}{8\,\pi}\, \frac{4\, i^2}{c^2\, r^2}\, 2\,\pi\, r\, d\, r = \frac{\mu\, i^2}{c^2} \ln \frac{R_2}{R_1}$$

und folglich

$$L_{\text{el. stat. Einh.}} = \frac{2\,\mu_{\text{el. magn.}}}{c^2} \ln \frac{R_2}{R_1}\,. \tag{9}$$

Aus den Formeln (8) und (9) erhält man bei Einsetzen von μ in elektromagnetischen und ε in elektrostatischen Einheiten:

Erstens:

$$c_1 = \frac{1}{\sqrt{L\, C}} = \frac{c}{\sqrt{\varepsilon\, \mu}}\,. \tag{10}$$

Dieser Wert ist von R_1 und R_2 unabhängig und damit, ganz allgemein, von der Struktur des Kabels. Weiterhin verändern selbst Ungleichmäßigkeiten der Radien R_1 und R_2 die Ausbreitungsgeschwindigkeit nicht. Diese hängt nur von den Eigenschaften des Dielektrikums ab und ist zahlenmäßig gleich dem Verhältnis c der Einheiten, geteilt durch die Quadratwurzel aus ε, eingesetzt in elektrostatischen Einheiten (also in der Größenordnung von 1 liegend), und durch die Quadratwurzel aus der magnetischen Permeabilität μ, eingesetzt in elektromagnetischen Einheiten (also bei einem Dielektrikum nahe 1 liegend).

Sind ε und μ nur wenig von 1 verschieden (Vakuum, Gase usw.), dann gilt $c_1 = c = 3 \cdot 10^{10}$, und die Ausbreitungsgeschwindigkeit längs des Kabels ist gleich dem Wert c, der zahlenmäßig gleich der Lichtgeschwindigkeit im Vakuum ist.

Im allgemeinen Fall ($\mu = 1$, ε in der Größenordnung einiger Einheiten) hat c_1 den Wert

$$\frac{c}{\sqrt{\varepsilon}},$$

und man kann zeigen, daß diese Geschwindigkeit gleich der Ausbreitungsgeschwindigkeit des Lichtes in diesem Dielektrikum ist.

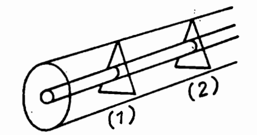


Abb. 419

Um diesen Fall handelt es sich bei den industriellen Koaxialkabeln, die in der Telephonie mehr und mehr zur Übertragung mit Trägerströmen hoher Frequenz benutzt werden. Die beiden Leiter werden voneinander durch isolierende Distanzstücke (1) und (2) in entsprechenden Abständen isoliert (Abb. 419).

Zweitens:

$$\varrho = \sqrt{\frac{L}{\varepsilon}} = \frac{1}{c}\sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}}\, 2\ln\frac{R_2}{R_1} \quad \text{in elektrostatischen Einheiten}$$

$$= c\sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}}\, 2\ln\frac{R_2}{R_1} \quad \text{in elektromagnetischen Einheiten} \tag{11}$$

$$= 60\sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}}\, \ln\frac{R_2}{R_1} \quad \text{in Ohm.}$$

Das Verhältnis $\frac{R_2}{R_1}$ liegt in der Größenordnung einiger Einheiten, und man sieht, daß der charakteristische Scheinwiderstand ϱ in der Größenordnung von 100 Ω liegt. Allgemein erhält man für eine Leitung, deren Kapazität pro cm gerade C cm sei:

$$\varrho = \frac{30\sqrt{\varepsilon}}{C} \text{ [in Ohm].} \tag{12}$$

Feeder (Speisekabel)

Eine Besonderheit koaxialer Kabel ist es, daß sich die beiden Leiter im Zustand totaler Influenz befinden und die im Inneren aufgebauten magnetischen und elektrischen Felder Null sind.[1]) Obgleich diese Ergebnisse nur für statische Felder eindeutig gelten, nehmen wir an, daß sie auch für die ausgestrahlte Energie gelten mögen. Wenn wir also an Stelle eines koaxialen Kabels ein solches aus zwei Leitern, die in der Art eines sehr langen Kondensators angeordnet sind, betrachten, so tragen diese Elektroden in jedem Punkt entgegengesetzte Ladungen, und es fließen entgegengesetzt gerichtete Ströme. Die äußere Abstrahlung eines Leiters

[1]) Dabei müssen wir allerdings ein leitendes Material ohne Verluste voraussetzen.

wird durch die des anderen aufgehoben. Das Kabel transportiert die Energie von einem Ende zum anderen mit einem sehr günstigen Wirkungsgrad. Ein solches Kabel nennt man *Feeder*. Es besitzt einen charakteristischen Scheinwiderstand ϱ, der durch Gl. (12) als Funktion seiner Kapazität C pro cm gegeben ist. Solche Feeder werden normalerweise bei der Energieübertragung hochfrequenter Ströme zu Sendetürmen verwendet.

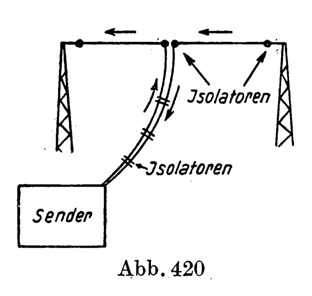


Abb. 420

In Abb. 420 zeigen die einander entgegengesetzt gerichteten Pfeile auf dem Feeder die Stromrichtungen *in einem bestimmten Augenblick* an. Man sieht, daß die Ströme in beiden *Antennen*hälften die gleiche Richtung besitzen, und es ist verständlich, daß sich ihre beiden Abstrahlungen in einiger Entfernung addieren, anstatt sich aufzuheben. Eine Antenne also ist eine Anordnung, bei der man eine Leistungsabstrahlung erhält.

Bestimmung der Funktionen f und φ. Stationäre Wellen. Fortschreitende Wellen

Jede Stromleitung führt zu einem Endpunkt, an dem eine bestimmte Relation zwischen der Spannung (oder der Potentialdifferenz gegenüber der Erde) und dem Strom gilt. Diese Beziehung ist im allgemeinen linear und homogen. Mit anderen Worten, für $x = l$ ist die Leitung über einen gegebenen Scheinwiderstand geschlossen, und es gilt

$$U = Zi$$

$\left(Z = R \text{ für einen Widerstand, } Z = L\frac{d}{dt} \text{ für eine Selbstinduktion usw.}\right)$. Wenn man U und i aus den Formeln (6) und (7) einsetzt, erhält man für die Funktionen f und φ die Beziehung

$$\varrho\left[f\left(t-\frac{l}{c_1}\right)-\varphi\left(t+\frac{l}{c_1}\right)\right]=Z\left[f\left(t-\frac{l}{c_1}\right)+\varphi\left(t+\frac{l}{c_1}\right)\right]$$

oder

$$\varphi\left(t+\frac{l}{c_1}\right)(Z+\varrho)=(\varrho-Z)\,f\left(t-\frac{l}{c_1}\right). \tag{13}$$

Diese Formel liefert uns die Funktion φ, wenn f bekannt ist. Die *rücklaufende* Welle φ erscheint also als Ergebnis der *Reflexion* der direkten Welle f an dem Scheinwiderstand Z. Man erhält also

$$\varphi\left(t+\frac{x}{c_1}\right)=\varphi\left(t+\frac{l}{c_1}-\frac{l-x}{c_1}\right)=\frac{\varrho-Z}{\varrho+Z}f\left(t-\frac{l}{c_1}-\frac{l-x}{c_1}\right)=\frac{\varrho-Z}{\varrho+Z}f\left(t-\frac{2l-x}{c_1}\right).$$

Mit dieser Formel kann man die Gleichungen (6) und (7) als Funktion des Scheinwiderstandes Z darstellen:

$$i = f\left(t - \frac{x}{c_1}\right) + \frac{\varrho - Z}{\varrho + Z} f\left(t - \frac{2l - x}{c_1}\right),$$

$$U = \varrho\left[f\left(t - \frac{x}{c_1}\right) - \frac{\varrho - Z}{\varrho + Z} f\left(t - \frac{2l - x}{c_1}\right)\right].$$

Bildet man jetzt den Quotienten $\frac{U}{i}$, so erhält man den Scheinwiderstand als Funktion von x. Außerdem hängt $\frac{U}{i}$ noch von der Funktion f ab, d.h. von der Zeit. Nimmt man jedoch an, daß der Strom sinusförmig ist, so eliminiert sich dieser Zeitfaktor. Setzen wir also

$$f(t) = i_0 e^{j\omega t},$$

dann erhalten wir

$$\frac{U}{i} = \varrho\left\{\frac{e^{-j\omega\frac{x}{c_1}} - \frac{\varrho - Z}{\varrho + Z} e^{-j\omega\frac{2l - x}{c_1}}}{e^{-j\omega\frac{x}{c_1}} + \frac{\varrho - Z}{\varrho + Z} e^{-j\omega\frac{2l - x}{c_1}}}\right\}.$$

Multiplizieren wir nun Zähler und Nenner mit $e^{j\omega\frac{l}{c_1}}$, so ergibt sich

$$Z(x) = \varrho\,\frac{\varrho\left[e^{j\omega\frac{l-x}{c_1}} - e^{-j\omega\frac{l-x}{c_1}}\right] + Z\left[e^{j\omega\frac{l-x}{c_1}} + e^{-j\omega\frac{l-x}{c_1}}\right]}{\varrho\left[e^{j\omega\frac{l-x}{c_1}} + e^{-j\omega\frac{l-x}{c_1}}\right] + Z\left[e^{j\omega\frac{l-x}{c_1}} - e^{-j\omega\frac{l-x}{c_1}}\right]}$$

oder

$$Z(x) = \varrho\,\frac{\frac{Z}{\varrho} + j\,\mathrm{tg}\,\omega\frac{l - x}{c_1}}{1 + j\frac{Z}{\varrho}\,\mathrm{tg}\,\omega\frac{l - x}{c_1}}. \tag{14}$$

Diese Gleichung ist relativ einfach und liefert uns den Scheinwiderstand Z als Funktion von x, wenn die Länge l über diesen geschlossen ist.

Ein wichtiger Spezialfall ist der Fall $x = 0$. Für ihn gilt

$$Z_0 = \varrho\,\frac{\frac{Z}{\varrho} + j\,\mathrm{tg}\,\frac{\omega l}{c_1}}{1 + j\frac{Z}{\varrho}\,\mathrm{tg}\,\frac{\omega l}{c_1}}.$$

Die Kenntnis von Z_0 gestattet uns also, die Leitung vollständig wie einen einfachen Stromkreis zu behandeln und besonders den Strom i_0 am Eingang zu berechnen, wenn man dort die elektromotorische Kraft U_0 eines Generators anlegt.

Folgende wichtige Spezialfälle sind besonders zu beachten:

1. *Z ist ein reiner Blindwiderstand:* $Z = jX$. Entsprechend Gl. (14) erhält man

$$Z(x) = \varrho \frac{j\frac{X}{\varrho} + j \operatorname{tg} \omega \frac{l-x}{c_1}}{1 - \frac{X}{\varrho} \operatorname{tg} \omega \frac{l-x}{c_1}}.$$

Nach der Additionsregel für arc tg kann man diesen Ausdruck in der Form

$$Z(x) = j\varrho \operatorname{tg}\left(\omega \frac{l-x}{c_1} + \operatorname{arc\,tg} \frac{X}{\varrho}\right)$$

darstellen und sieht, daß dies einer um l_1 (positiv oder negativ) verlängerten Leitung l entspricht, die kurzgeschlossen ist:

$$\frac{\omega l_1}{c_1} = \operatorname{arc\,tg} \frac{X}{\varrho}.$$

Ist Z eine Selbstinduktion, $X = L\omega$, so erscheint die Leitung um eine Länge $l_1 < \frac{\pi}{2} \frac{c_1}{\omega} = \frac{\lambda}{4}$ verlängert, wobei λ die Wellenlänge der Schwingungen auf der Leitung ist $\left(\lambda = \frac{2\pi c_1}{\omega}\right)$.

Ist Z eine Kapazität, $X = -\frac{1}{C\omega}$, so erscheint die Leitung um eine Länge $l_1 < \lambda/4$ verkürzt.

Für den Spezialfall $Z = \infty$ (nicht geschlossene Leitung) erhält man

$$Z_0 = \frac{\varrho}{j \operatorname{tg} \frac{\omega l}{c_1}}.$$

Ist dagegen $Z = 0$ (die Leitung ist kurzgeschlossen), findet man entsprechend

$$Z_0 = \varrho j \operatorname{tg} \frac{\omega l}{c_1}.$$

In allen diesen Fällen stellt man fest, daß der Scheinwiderstand $Z(x)$ ein reiner Blindwiderstand ist, d.h., in der Leitung wird keine Energie verbraucht. Gl. (13) zeigt übrigens, daß die Amplitude der rücklaufenden Welle φ den gleichen Wert wie die Amplitude der Welle f besitzt, wobei $\frac{\varrho - Z}{\varrho + Z}$ von der Größe 1 ist. Die gegebenen Formeln beschreiben also *stehende Wellen* auf der Leitung, auf der an jeder Stelle die Spannung gegenüber der Stromstärke um $\frac{\pi}{2}$ phasenverschoben ist. An Punkten, für die $Z(x) = 0$, findet man auf der Leitung einen Spannungsknoten

(i beliebig, $U = 0$, d.h. $U/i = 0$), und entsprechend besitzt die Stromstärke einen Bauch. An Punkten, für die $Z(x) = \infty$, hat umgekehrt die Spannung einen Bauch und die Stromstärke einen Knoten.

Wir betrachten jetzt den einfachen Spezialfall einer an ihrem Ende offenen Leitung: $Z = \infty$ und finden, wie wir bereits gesehen haben,

$$Z_0 = \frac{\varrho}{j \operatorname{tg} \frac{\omega l}{c_1}}.$$

Ist die Leitung auch an der Stelle $x = 0$ offen, so tritt für alle die Frequenzen Resonanz ein, für die der Scheinwiderstand dieser Bedingung entspricht, d.h., er muß unendlich sein, und es gilt

$$\operatorname{tg} \frac{\omega l}{c_1} = 0$$

oder

$$\frac{2\pi l}{\lambda} = k\pi$$

mit $\lambda = \frac{2l}{k}$, wobei k eine ganze Zahl 1, 2, 3, ⋯ darstellt.

Spannung Strom
$l = \frac{\lambda}{2}$
Strom
$l = \lambda$
Strom
$l = \frac{3\lambda}{2}$

Abb. 421

Der eben betrachtete Fall ist der einer *frei im Raum befindlichen Antenne*, die in ihrer Grundschwingung $l = \frac{\lambda}{2}$ oder einer ihrer Harmonischen $l = \frac{k\lambda}{2}$ schwingt (Abb. 421). Eine freie Antenne, die in ihrer Grundschwingung schwingt, nennt man einen *abgestimmten Dipol.*

Betrachten wir dagegen eine Leitung, die an der Stelle $x = 0$ über einen Scheinwiderstand $Z = 0$ geschlossen ist (die Leitung ist geerdet), so tritt eine Resonanz für alle die Frequenzen auf, für die Z_0 verschwindet. Mit $c_1 = c$ in Luft ist für diesen Fall

$$\frac{\varrho}{j \operatorname{tg} \frac{\omega l}{c}} = 0,$$

$$\operatorname{tg} \frac{\omega l}{c} = \infty$$

oder

$$\frac{2\pi l}{\lambda} = \frac{\pi}{2} + k\pi.$$

Die Grundschwingung ergibt sich also für $l = \lambda/4$, und die harmonischen Schwingungen sind die ungeraden Vielfachen der Grundschwingung

$$k = 0, 1, 2 \cdots \to l = \frac{\lambda}{4}; \frac{3\lambda}{4}; \frac{5\lambda}{4} \cdots$$

(Abb. 422).

Wir werden auf die Antennen bei der Betrachtung der Eigenschaften der Strahlung zurückkommen.

2. *Z ist ein reiner Widerstand*: $Z = R$. Entsprechend Gl. (14) gilt für diesen Fall

$$Z(x) = \varrho \frac{\frac{R}{\varrho} + j \operatorname{tg} \omega \frac{l-x}{c_1}}{1 + j \frac{Z}{\varrho} \operatorname{tg} \omega \frac{l-x}{c_1}}.$$

Der Scheinwiderstand Z hängt also von x ab und besitzt einen Real- und einen Imaginärteil. Er wird niemals unendlich oder Null. Wir wenden jetzt unsere Aufmerksamkeit einem wichtigen Spezialfall zu: Es sei $R = \varrho$. Die Leitung ist für $x = l$ über ihren charakteristischen Scheinwiderstand geschlossen. Die Gl. (14) zeigt, daß für jeden Punkt

$$Z(x) = \varrho$$

gilt. *Der Quotient aus Spannung und Stromstärke ist also immer gleich.* Weiterhin ist dieser Quotient *reell*, die beiden Größen sind in Phase. Tatsächlich ist also in diesem Fall $\varphi = 0$, und *es gibt keine rücklaufende oder reflektierte Welle*, da φ proportional zu $Z - \varrho$ ist. Es existiert nur die Funktion f, und *man spricht von einer auf der Leitung fortschreitenden Welle.*

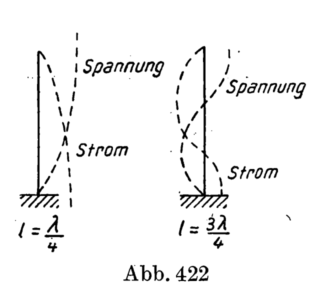


Abb. 422

Man kann ohne Schwierigkeiten zeigen, daß im allgemeinen Fall auf einer Leitung eine Überlagerung der fortschreitenden Welle mit einem System stehender Wellen vorhanden ist.

Es empfiehlt sich, die Antennenzuleitung so anzupassen, daß kein stationärer Bereich existiert, damit man sicher ist, daß die gesamte Energie von einem Ende zum anderen transportiert wird. *Man schließt also jedes Feeder zweckmäßig über seinen charakteristischen Scheinwiderstand.* Bei einer Antenne, z. B. einem abgestimmten Dipol, bringt man die Antennenzuleitung in der Mitte der Antenne an. Jede Antennenhälfte $\lambda/4$ ist an ihrem äußeren Ende über einen unendlichen Scheinwiderstand und in der Mitte über den Scheinwiderstand Null geschlossen (siehe Gl. (14) und folgende). Dies bedeutet einfach, daß die Antenne in Resonanz ist. Die Energieabstrahlung der Antenne führt auf einen *Strahlungswiderstand* r, den wir später berechnen werden. Da er additiv zu Z_0 hinzugefügt Null ergeben soll, muß die Antennenzuleitung r angepaßt werden, d. h., r muß gleich ϱ sein.

So wird man z. B. sehen, daß der von einer Strahlung herrührende Widerstand eines abgestimmten Dipols 73 Ohm beträgt. Mit Hilfe der Gl. (12) kann man dadurch die geometrischen Dimensionen der Antennenzuleitung berechnen. Die Anpassung der Stromquelle an r und ϱ kann übrigens immer mit Hilfe eines Transformators durchgeführt werden.

Auf diese Art wird in der Antenne ein Zustand stehender Wellen aufrechterhalten, die durch ihre eigene Strahlung gedämpft werden. Die pro Sekunde abgegebene Energie wird durch die Energie der auf der Zuleitung fortschreitenden Wellen nachgeliefert.

Ausbreitungsgeschwindigkeit auf einem beliebigen zylindrischen Feeder

Die Ausbreitungsgeschwindigkeit ist unabhängig von den Umrissen der Leiter, von ihrem Abstand und bei Vernachlässigung von Verlusten gleich der Lichtgeschwindigkeit im Dielektrikum. Man kann zeigen, daß in jedem Fall LC gleich $\varepsilon\mu/c^2$ ist. Wir betrachten jetzt eine senkrecht zu den Zuleitungen liegende Ebene. Dabei seien F_1 und F_2 die Querschnitte der beiden Leiter, die von dem gleichen Gesamtstrom, jedoch in entgegengesetzter Richtung, durchflossen werden. Betrachten wir nun die Äquipotentiallinien $E_1, E_2, \ldots$ zwischen $F_1, F_2, \ldots$, so finden wir von F_1 nach F_2 die gleichen Ladungen Q mit wechselndem Vorzeichen und die gleichen Ströme $\pm i$ auf den entsprechenden Elementen; E_1 und E_2 bilden ein elementares Feeder in Form ebener Bänder, für welches man zeigen kann, daß

$$L_1 = \frac{\varepsilon\mu}{c^2 C_1},$$

indem man direkt L_1 und C_1 berechnet.

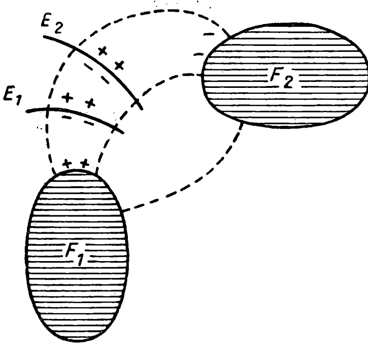


Abb. 423

Die *gesamte Selbstinduktion* zwischen F_1 und F_2 wird also

$$L = L_1 + L_2 + L_3 + \cdots + L_n$$

betragen, da die Energie

$$\frac{1}{2}\,Li^2 = \sum L_i\,\frac{i^2}{2}$$

beträgt.

Die *Gesamtkapazität* ergibt sich aus dem gleichen Grunde zu

$$\frac{1}{C} = \sum \frac{1}{C_i}.$$

Es ergibt sich also tatsächlich

$$LC = \frac{\varepsilon\mu}{c^2}.$$

Im Grenzfall stimmt die Berechnung mit der einer Antenne überein.

II. KAPITEL

Ausbreitung im freien Raum und in dielektrischen Medien

Historisch ist der Beweis der Existenz elektromagnetischer Wellen, die sich in dielektrischen Medien mit Lichtgeschwindigkeit ausbreiten, von Maxwell geführt worden, der dies als notwendige theoretische Folgerung der Fundamentalgleichungen der Elektrodynamik fand. Wir wollen uns noch einmal die bereits aufgestellten Gleichungen ins Gedächtnis zurückrufen.

Die MAXWELL-AMPÈREsche Beziehung lautete

$$\operatorname{rot} \mathfrak{H} = 4\pi \mathfrak{i}$$

in elektromagnetischen Einheiten ($\mathfrak{H}$ ist dabei das Magnetfeld und $\mathfrak{i}$ die Stromdichte im Punkt, in dem $\mathfrak{H}$ herrscht).

Die MAXWELL-FARADAYsche Gleichung hat die Form

$$\operatorname{rot} \mathfrak{E} = -\frac{\partial \mathfrak{B}}{\partial t},$$

wobei $\mathfrak{E}$ das elektrische Feld ist und $\mathfrak{B}$ die magnetische Induktion.

Ferner muß gelten

$$\mathfrak{B} = \mu \mathfrak{H},$$

mit der magnetischen Permeabilität μ, die im Vakuum den Wert 1 hat, wenn $\mathfrak{B}$ und $\mathfrak{H}$ in elektromagnetischen Einheiten gemessen werden.

Die Definition der *Gesamt*stromdichte ist schließlich unter Berücksichtigung des Verschiebungsstroms gegeben zu

$$\mathfrak{i} = \frac{\varepsilon}{4\pi} \frac{\partial \mathfrak{E}}{\partial t} + \sigma \mathfrak{E}.$$

Dabei sind σ die Leitfähigkeit und ε die Dielektrizitätskonstante. Will man erreichen, daß im Vakuum $\varepsilon = 1$ gilt, muß man in dieser Gleichung elektrostatische Einheiten benutzen.

Nichtleitendes Material ohne magnetische Verluste

In einem solchen Fall kann man $\sigma = 0$ annehmen und die Gleichung $\mathfrak{B} = \mu \mathfrak{H}$ in der Annahme benutzen, daß es sich um ein dia- oder paramagnetisches Material handelt, welches nicht die komplizierten Phänomene des Ferromagnetismus zeigt. Wir werden also im wesentlichen nur *Dielektrika* behandeln.

Wahl der Einheiten

Um eine bestimmte Größe mit Hilfe dieser Gleichungen zu berechnen, ist es notwendig, daß diese in allen Gleichungen in gleichen Einheiten enthalten ist. *Wir wollen jetzt vereinbaren, die elektrischen Größen E und i in elektrostatischen Einheiten und die magnetischen Größen B und H in elektromagnetischen Einheiten auszudrücken.* Diese Vereinbarung hat den Vorteil, daß wir für das Vakuum die einfachen Werte $\varepsilon = 1$ und $\mu = 1$ erhalten. Wie gewöhnlich bezeichnen wir das Verhältnis der elektrischen Ladung in elektromagnetischen zu dem in CGS-Einheiten mit c. Für die Stromdichte i muß dann entsprechend gesetzt werden:

$$i_{\text{elektromagn.}} = \frac{i_{\text{elektrostat.}}}{c}.$$

Andererseits ist $E i$ eine Leistung[1]), die in beiden Systemen in erg/sec gemessen wird. Die Einheiten des elektrischen Feldes stehen also im Verhältnis $1/c$ zueinander, und die Gleichungen erhalten, wenn wir B eliminieren, die Form

$$\text{rot}\,\mathfrak{H} = \frac{4\pi}{c}\,\mathfrak{i}, \qquad \text{rot}\,\mathfrak{E} = -\frac{\mu}{c}\frac{\partial\mathfrak{H}}{\partial t},$$

$$\mathfrak{i} = \frac{\varepsilon}{4\pi}\frac{\partial\mathfrak{E}}{\partial t}.$$

Ausbreitungsgleichung

Eliminieren wir i mit Hilfe der letzten Gleichung aus der ersten, so erhalten wir ein symmetrisches Gleichungssystem

$$\begin{aligned}\text{rot}\,\mathfrak{H} &= \frac{\varepsilon}{c}\frac{\partial\mathfrak{E}}{\partial t},\\ \text{rot}\,\mathfrak{E} &= -\frac{\mu}{c}\frac{\partial\mathfrak{H}}{\partial t}.\end{aligned} \tag{1}$$

Diese beiden gekoppelten Gleichungen verknüpfen die räumlichen Veränderungen von $\mathfrak{H}$ mit den zeitlichen Veränderungen von $\mathfrak{E}$ und umgekehrt. Man kann aus der zweiten Gleichung $\mathfrak{H}$ sehr leicht eliminieren, wenn man die Rotation dieser letzten Gleichung bildet:

$$\text{rot}\,\text{rot}\,\mathfrak{E} = -\frac{\mu}{c}\,\text{rot}\,\frac{\partial\mathfrak{H}}{\partial t} = -\frac{\mu}{c}\frac{\partial}{\partial t}\,\text{rot}\,\mathfrak{H} = -\frac{\varepsilon\mu}{c^2}\frac{\partial^2\mathfrak{E}}{\partial t^2}.$$

Nun ist aber

$$\text{rot}\,\text{rot}\,\mathfrak{E} = \text{grad}\,\text{div}\,\mathfrak{E} - \Delta\mathfrak{E},$$

wie man sehr leicht durch direkte Berechnung der Komponenten (in kartesischen Koordinaten) der Glieder dieser Gleichung zeigen kann (siehe übrigens auch das dem Vektorpotential gewidmete Kapitel).

Weiterhin gilt

$$\text{div}\,\mathfrak{E} = -4\pi\varrho$$

nach der POISSONschen Gleichung, wobei ϱ die Ladungsdichte darstellt. Diese ist im freien Raum Null, und wir können

$$\Delta\mathfrak{E} = \frac{\varepsilon\mu}{c^2}\frac{\partial^2\mathfrak{E}}{\partial t^2} \tag{2}$$

schreiben. Diese Gleichung zeigt, daß jede Komponente E_x, E_y, E_z des elektrischen Feldes der Gleichung

$$\Delta E_x = \frac{\partial^2 E_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 E_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 E_x}{\partial z^2} = \frac{\varepsilon\mu}{c^2}\frac{\partial^2 E_x}{\partial t^2} \tag{3}$$

genügt.

---

[1]) Geteilt durch eine Länge (da E in diesem Fall ein Feld ist).

Eliminiert man aus (1) jetzt nicht $\mathfrak{H}$, sondern $\mathfrak{E}$, so kann man ohne Schwierigkeiten zeigen, daß auch $\mathfrak{H}$ selbst der Gleichung (3) genügt.

Die Gleichung drückt also die Ausbreitung von elektrischen und magnetischen Feldern im freien dielektrischen Raum mit der Geschwindigkeit $c_1 = \frac{c}{\sqrt{\varepsilon\mu}}$ *aus.* Zur Berechnung genügt es in diesem Fall, sich auf ein weder von y noch von z abhängiges Feld zu beschränken. Die Gleichung (2) hat dann die einfache Form

$$\frac{\partial^2 \mathfrak{E}}{\partial x^2} = \frac{\varepsilon\mu}{c^2}\frac{\partial^2 \mathfrak{E}}{\partial t^2}$$

und ist identisch mit der für die Ausbreitung auf einem Draht gewonnenen. Diese besaß die Lösungen $f\left(t \pm \frac{x}{c_1}\right)$, wobei f eine beliebige Funktion war, mit einer Ausbreitungsgeschwindigkeit

$$c_1 = \frac{c}{\sqrt{\varepsilon\mu}}.$$

Ebene Wellen

Eine solche Welle wird *ebene Welle* genannt. Wir wollen im folgenden ihre Eigenschaften untersuchen. Aus Bequemlichkeitsgründen behandeln wir nun eine Welle, die sich entlang Oy ausbreitet. Das elektrische Feld E besitzt drei Komponenten. Wir nehmen an (dies ist die Voraussetzung für eine ebene Welle), daß das Feld einem sich in einem bestimmten Augenblick in einer zu xOz parallelen Ebene bewegenden Beobachter gleichförmig erscheint. Dies erfordert nur eine entsprechende Wahl der Achsen. Wir können Ox und Oz außerdem so wählen, daß $E_x = 0$ ist. Ist E_z zu jedem Zeitpunkt eine Konstante in bezug auf Oz, dann gilt

$$\frac{\partial E_z}{\partial z} = 0,$$

und die bekannte Gleichung für ein ladungsfreies Medium

$$\operatorname{div} \mathfrak{E} = 0$$

reduziert sich auf

$$\frac{\partial E_y}{\partial y} = 0.$$

Man sieht also, daß das sich ausbreitende und folglich verändernde Feld keine Komponenten in Oy-Richtung besitzt, wenn man sich längs Oy bewegt.

Die Gleichungen

$$\Delta E_x = \frac{1}{c_1^2}\frac{\partial^2 E_x}{\partial t^2} \quad \text{und} \quad \Delta E_y = \frac{1}{c_1^2}\frac{\partial^2 E_y}{\partial t^2}$$

werden also Null ($E_x = 0$, $E_y =$ const). Es bleibt somit nur die Gleichung

$$\Delta E_z = \frac{1}{c_1^2} \frac{\partial^2 E_z}{\partial t^2} \tag{4}$$

zu betrachten. Da $\frac{\partial^2 E_z}{\partial x^2}$ und $\frac{\partial^2 E_z}{\partial z^2}$ nach der Hypothese über die ebene Welle gleich Null sind, verbleibt nur

$$\frac{\partial^2 E_z}{\partial y^2} = \frac{1}{c_1^2} \frac{\partial^2 E_z}{\partial t^2}.$$

Die Ausbreitung erfolgt entlang Oy, und die Ausbreitungsrichtung ist notwendig senkrecht zum Feld. *Das elektrische Feld der Welle nennt man transversal.*

Wir betrachten jetzt die gleichzeitig geltenden Bedingungen für das *magnetische Feld.* Erinnern wir uns der MAXWELLschen Gleichungen:

$$\frac{\partial \mathfrak{H}}{\partial t} = -\frac{c}{\mu} \operatorname{rot} \mathfrak{E},$$

so läßt sich daraus $\mathfrak{H}$ berechnen, und wir bilden die einzelnen Komponenten der Rotation von $\mathfrak{E}$:

$$\operatorname{rot}_x \mathfrak{E} = \frac{\partial E_z}{\partial y} - \frac{\partial E_y}{\partial z} = \frac{\partial E_z}{\partial y}; \quad \operatorname{rot}_y \mathfrak{E} = \operatorname{rot}_z \mathfrak{E} = 0.$$

Es hat $\mathfrak{H}$ also nur eine Komponente $H = H_x$, *das magnetische Feld der Welle ist auch transversal.* Man erhält also

$$\frac{\partial H_x}{\partial t} = -\frac{c}{\mu} \frac{\partial E_z}{\partial y}.$$

Nun betrachten wir die allgemeine Lösung von (4)

$$E_z = f\left(t - \frac{y}{c_1}\right) + \varphi\left(t + \frac{y}{c_1}\right)$$

und schließen daraus

$$H_x = \frac{c}{\mu c_1} f\left(t - \frac{y}{c_1}\right) - \frac{c}{\mu c_1} \varphi\left(t + \frac{y}{c_1}\right).$$

Ist also das elektrische Feld einer Welle in Oz-Richtung polarisiert, so besitzt die Welle ein Magnetfeld in Ox-Richtung, wenn sie sich in Richtung positiver y ($\varphi \equiv 0$) ausbreitet. Die Größe H hat dann den Wert

$$\frac{c}{\mu c_1} E_z \quad \text{d.h.} \quad \sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}}\, E.$$

Dabei werden E in elektrostatischen CGS-Einheiten (wie auch ε) und H in elektromagnetischen Einheiten (entsprechend auch μ) angegeben.

Breitet sich die gleiche Welle mit dem gleichen elektrischen Feld entlang negativer y ($f \equiv 0$) aus, dann besitzt ihr magnetisches Feld die Ox-Richtung, sein Sinn ist jedoch umgekehrt zu dem eben betrachteten Fall.

Wir können diese beiden Fälle zusammenfassen und sagen: *Der Vektor* $\mathfrak{E} \times \mathfrak{H}$ *verläuft in der Ausbreitungsrichtung.*

Poyntingscher Vektor

Ein elektromagnetisches Feld breite sich aus. Im gesamten Raum findet man dann für die Energie pro cm³

$$\frac{\varepsilon E^2}{8\pi} + \frac{\mu H^2}{8\pi}.$$

Dies ist die Summe der elektrostatischen und der magnetischen Energie und wird in elektrostatischen und elektromagnetischen Einheiten ausgedrückt. Entsprechend dem gefundenen Wert für H erhält man jedoch auch

$$\mu H^2 = \varepsilon E^2,$$

wenn sich die Welle nur in einer Richtung ausbreitet, wie wir es jetzt betrachten wollen. Die Gesamtenergie beträgt also $\frac{\varepsilon E^2}{4\pi}$ und ist zur Hälfte elektrostatischer und zur Hälfte magnetischer Natur.

Der *Energiefluß* P pro cm², d.h., die Energie, die bei der Ausbreitung mit der Geschwindigkeit c_1 pro sec durch eine Fläche von 1 cm² senkrecht zur Ausbreitungsrichtung hindurchtritt, hat dann den mit c_1 multiplizierten Wert der Energiedichte. Den gewonnenen Ausdruck für den Energiefluß formen wir nun um in

$$P_1 = \frac{c_1}{4\pi}\,\varepsilon E^2 = \frac{c}{4\pi}\sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}}\,E^2 = \frac{c}{4\pi}\,EH.$$

Nun schreiben wir diesem Fluß einen vektoriellen Charakter zu, der durch einen Vektor in der Ausbreitungsrichtung charakterisiert wird. Da der Vektor $\mathfrak{E} \times \mathfrak{H}$ die gleiche Richtung besitzt, genügt es, zu schreiben

$$\mathfrak{P} = \frac{c}{4\pi}\,\mathfrak{E} \times \mathfrak{H}. \tag{5}$$

Der auf diese Art eingeführte Vektor $\mathfrak{P}$ wird *Poyntingscher Vektor* genannt. Man kann zeigen, daß der Ausdruck (5) allgemein gilt, obwohl wir ihn nur für eine ebene Welle abgeleitet haben. Wir weisen darauf hin, daß die in dieser Gleichung auftretende Geschwindigkeit die Ausbreitungsgeschwindigkeit im *Vakuum* ist.

Fortschreitende Wellen

Um eine fortschreitende Welle handelt es sich, wenn nur eine der beiden Funktionen f oder φ existiert. Diesen Fall haben wir implizite bereits betrachtet. Er ist durch die Existenz von zwei zueinander senkrechten Vektoren $\mathfrak{E}$ und $\mathfrak{H}$ in der

ebenen Welle, die auch die gleiche Zeitabhängigkeit besitzen, charakterisiert. Verändert sich $\mathfrak{E}$ sinusförmig mit der Zeit, so verändert sich $\mathfrak{H}$ mit der gleichen Phase wie $\mathfrak{E}$ und umgekehrt (Abb. 424).

Dies ist der Ausbreitung einer Schallwelle analog, für die die Beziehungen

$$P = \varrho c u$$

für Ausbreitung gegen positive y und

$$P = -\varrho c u$$

für eine Ausbreitung gegen negative y gelten. Dabei sind P der Druck, ϱ die spezifische Masse, c die Schallgeschwindigkeit und u die Geschwindigkeit des Mediums. Der Druck und die Geschwindigkeit der Luft sind dabei in Phase.

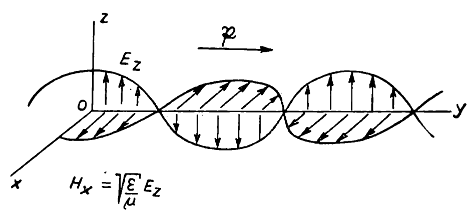


Abb. 424

Die Abb. 424 stellt die Ausbreitung einer gegen positive y fortschreitenden Welle dar. Die Verteilungen der Felder $\mathfrak{E}$ und $\mathfrak{H}$ sind für einen gegebenen Zeitpunkt angegeben, $\mathfrak{E}$ bleibt parallel zu Oz und $\mathfrak{H}$ parallel zu Ox.

Stehende Wellen

Wir nehmen nun an, daß in einem bestimmten Abstand l vom Nullpunkt, parallel zu xOz, also senkrecht zur Ausbreitungsrichtung, eine ideal leitende, metallische Fläche angeordnet ist. Wir nehmen ferner an, daß sich eine sinusförmige Welle mit der Kreisfrequenz ω in Richtung positiver y ausbreitet. Das elektrische Feld dieser Welle ist in Richtung Oz polarisiert:

$$E_z = E_0 \sin \omega \left(t - \frac{y}{c_1}\right);$$

c_1 ist dabei die Ausbreitungsgeschwindigkeit.

In der ideal leitenden Ebene ($y = l$) ist das Feld $\mathfrak{E}$ notwendig Null. Wir wissen bereits (siehe Kapitel: Elektrostatik), daß es wegen der Kontinuität auch hinter dem Leiter im Dielektrikum Null ist (tatsächlich muß es senkrecht zum Leiter austreten, und es gibt keine Komponente in $O\,y$-Richtung).

Diesen Bedingungen genügt man mathematisch, indem man annimmt, daß der einfallenden, sich gegen positive y ausbreitenden, eine sogenannte reflektierte Welle, die sich gegen negative y ausbreitet, überlagert wird. Für $y = l$ ist ihr Feld gleich und entgegengesetzt gerichtet zu

$$E_z = E_0 \sin \omega \left(t - \frac{l}{c_1}\right).$$

Wir sehen, daß der Ausdruck für das elektrische Feld in dieser neuen Welle

$$E_z' = -E_0 \sin\omega\left(t - \frac{2l - y}{c_1}\right)$$

oder

$$E_z' = E_0 \sin\left[\omega\left(t - \frac{2l - y}{c_1}\right) + \pi\right]. \tag{6}$$

lautet.

Tatsächlich entspricht die Veränderung in $t + \frac{y}{c_1}$ gerade der Ausbreitung der rückläufigen Welle, und die Bedingung

$$E_z + E_z' \equiv 0$$

für $y = l$ ist zu jedem Zeitpunkt befriedigt.

Gleichung (6) *ist der Audruck für die mit einer Phasenveränderung von π verbundene Reflexion des elektrischen Feldes an dem ebenen Leiter.*

Untersucht man die Verteilung des gesamten elektrischen Feldes im Raum (unter Berücksichtigung der reflektierten Welle), so findet man

$$E = E_z + E_z' = E_0\left[\sin\omega\left(t - \frac{y}{c_1}\right) - \sin\omega\left(t - \frac{2l - y}{c_1}\right)\right]$$

$$= 2E_0 \cos\omega\left(t - \frac{l}{c_1}\right)\sin\omega\left(\frac{l - y}{c_1}\right). \tag{7}$$

Gleichung (7) *beschreibt ein System stehender Wellen.* Das elektrische Feld $\mathfrak{E}$ schwingt unabhängig von der Abszisse y immer in Phase. Seine Amplitude verändert sich sinusförmig mit der Entfernung, und das elektrische Feld hat Knoten für $\sin\omega\left(\frac{l - y}{c_1}\right) = 0$, d.h. auf der Reflexionsebene $y = l$ und in den dazu parallelen Ebenen, die um $n\,\frac{\lambda}{2}$ von dieser entfernt liegen (n ist dabei eine ganze Zahl, und λ bedeutet die Wellenlänge im Dielektrikum). Die Spannungsbäuche befinden sich an den Zwischenstellungen, für die

$$l - y = (2k + 1)\ \lambda/4 \text{ mit } k = 0, 1, 2, \ldots$$

gilt. *Entsprechende Bedingungen ergeben sich für das magnetische Feld.*

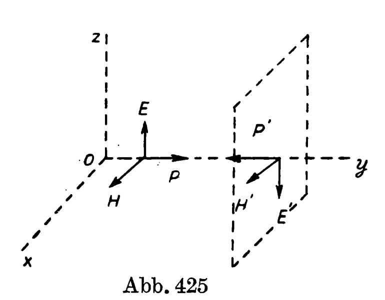


Abb. 425

Wir konstruieren nun in der Ebene $y = l$ für einen gegebenen Zeitpunkt die Vektoren $\mathfrak{E}$ und $\mathfrak{H}$ der einfallenden sowie $\mathfrak{E}'$ und $\mathfrak{H}'$ der rücklaufenden Welle und anschließend die POYNTINGschen Vektoren $\mathfrak{P}$ und $\mathfrak{P}'$. Dabei verläuft $\mathfrak{E}'$ entgegengesetzt zu $\mathfrak{E}$ und $\mathfrak{P}$ entgegengesetzt zu $\mathfrak{P}'$. Daraus ergibt sich, daß $\mathfrak{H}$ parallel und gleichgerichtet zu $\mathfrak{H}'$ verlaufen muß. Für $y = l$ gilt also $\mathfrak{H}' = \mathfrak{H}$ (siehe Abb. 425).

Andererseits ist H numerisch bestimmt durch

$$H = \sqrt{\varepsilon}\, E_0 \sin\omega\left(t - \frac{y}{c_1}\right),$$

und für H' findet man (bei einer Ausbreitung gegen negative y)

$$H' = \sqrt{\varepsilon}\, E_0 \sin\omega\left(t - \frac{2l - y}{c_1}\right).$$

(Also ist die Bedingung $H' = H$ für $y = l$ erfüllt.)

Das gesamte Magnetfeld in der stehenden Welle hat also den Wert

$$H + H' = \sqrt{\varepsilon}\, E_0 \left[\sin\omega\left(t - \frac{y}{c_1}\right) + \sin\omega\left(t - \frac{2l - y}{c_1}\right)\right]$$

$$= 2\sqrt{\varepsilon}\, E_0 \sin\omega\left(t - \frac{l}{c_1}\right)\cos\omega\left(\frac{l - y}{c_1}\right).$$

Diese Formel zeigt die Existenz stehender magnetischer Wellen, die jedoch gegenüber denen des elektrischen Feldes phasenverschoben sind. Die Lagen der Knoten des magnetischen Feldes $\cos\omega\left(\frac{l - y}{c_1}\right) = 0$ stimmen mit den Bäuchen des elektrischen Feldes überein und umgekehrt. Während sich außerdem das elektrische Feld wie $\cos\omega\left(t - \frac{l}{c_1}\right)$ verändert, variiert das magnetische Feld wie $\sin\omega\left(t - \frac{l}{c_1}\right)$. Es ist also gegenüber ersterem um $\frac{\pi}{2}$ phasenverschoben. Der Mittelwert des POYNTINGschen Vektors

$$\mathfrak{P} = \frac{c}{4\pi}\,\mathfrak{E} \times \mathfrak{H}$$

ist Null. Es handelt sich also bei dem betrachteten Fall um eine Energieschwingung, aber ohne Energieabstrahlung.

Strahlungsdruck einer elektromagnetischen Welle

Wir wollen nun (Abb. 426) eine ebene elektromagnetische Welle betrachten, die *senkrecht* auf einen *reflektierenden* Kolben falle. (Dieses Beispiel wählen wir, da es in den klassischen Arbeiten von WIEN und BOLTZMANN behandelt wurde.) Das magnetische Feld habe die Richtung Oy. Dann hat die Stromdichte i die Richtung Oz und, in elektromagnetischen Einheiten ausgedrückt, den Wert

$$\operatorname{rot}\mathfrak{H} = 4\pi\,\mathfrak{i}.$$

Wir bemerken, daß i endlich ist, obwohl E Null ist. Dies ist im Grenzfall möglich, da die Leitfähigkeit σ unendlich ist.

Der Strom pro *Längeneinheit* y in der Dicke dx des Metalls wird durch $\mathfrak{i}\,dx$ gegeben. Das Magnetfeld $\mathfrak{H}$ übt auf ihn pro *Längeneinheit* entlang Oz eine Kraft (in Richtung Ox, von x gegen O) aus, die auf eine Flächeneinheit der Ebene xOz bezogen wird, d.h. einen Druck mit dem Wert

$$\mathfrak{H} \times \mathfrak{i}\,dx,$$

d.h.

$$\frac{1}{4\pi}\,\mathfrak{H}\,\frac{\partial H_z}{\partial x}$$

$$\left(\text{da } \mathfrak{i} = \frac{1}{4\pi} \operatorname{rot} \mathfrak{H} \text{ und } \operatorname{rot} \mathfrak{H} \text{ auf } \frac{\partial H_z}{\partial x} \text{ reduziert ist}\right).$$

Abb. 426

Durch Integration über alle dx erhalten wir den Gesamtdruck zu $\frac{H_z}{8\pi}$. In diesem Fall ist das Magnetfeld $\mathfrak{H}$ *verdoppelt*, während das elektrische Feld durch die Reflexion *aufgehoben wird.*

Wir wollen nun mit $\mathfrak{H}_1$ und $\mathfrak{E}_1$ die Felder in einer fortschreitenden Welle bezeichnen. Der *Strahlungsdruck* $\frac{4H_1^2}{8\pi}$ hat dann den Mittelwert $\frac{2H_{1\,\max}^2}{8\pi}$, d.h.

$$\frac{E^2 + H^2}{8\pi},$$

und stellt die *Energiedichte* dar.

Verläuft die Strahlung in allen Richtungen und nicht mehr senkrecht zur Ebene, dann wirkt nur eine Komponente $H \cos\Theta$. Wir finden also als Resultat $H^2 \cos^2\Theta$ und, wenn wir den Mittelwert über alle Richtungen bilden, $H^2/3$. Der Strahlungsdruck beträgt also $^1/_3$ der Energiedichte.

Anwendung: Boltzmannsche Darstellung des Stefanschen Gesetzes

Wir wollen mit U die Energiedichte der schwarzen Strahlung bezeichnen. Für das Volumen V erhalten wir dann eine innere Energie UV. Der Strahlungsdruck sei p. Wenden wir nun den II. Hauptsatz der Thermodynamik an, so gilt

$$\frac{dQ}{T} = \frac{d(UV)}{T} + \frac{p\,dV}{T}.$$

Da jedoch

$$p = \frac{U}{3}$$

ist, folgt

$$\frac{dQ}{T} = \frac{V\,dU}{T} + \frac{4}{3}\,\frac{U\,dV}{T}.$$

Dies ist ein totales Differential, und wir können

$$\frac{\partial}{\partial V}\left(\frac{V}{T}\right) = \frac{\partial}{\partial U}\left(\frac{4}{3}\,\frac{U}{T}\right)$$

schreiben. Daraus folgt

$$4 \frac{dT}{T} = \frac{dU}{U},$$

und wir erhalten das STEFANsche Gesetz $U = \sigma T^4$.

HERTZsche Versuche

Gegen 1890 hat H. HERTZ die experimentelle Bestätigung der theoretischen Überlegungen von MAXWELL gefunden und damit einen entscheidenden Beitrag zur Lösung dieses Problems geliefert. Die Weiterentwicklung der experimentellen Technik gestattete die Anwendung von Sendern für kontinuierliche Wellen, die jedoch keine Veränderung der HERTZschen Ergebnisse erbrachten.

HERTZscher Oszillator. HERTZscher Resonator

Die Voraussetzung für die HERTZschen Versuche waren die Aussendung und der Empfang von elektromagnetischen Wellen. Dies geschah mit Hilfe eines Oszillators (Abb. 427) und eines Resonators. Ein relativ großer Kondensator C wurde durch eine Gleichstromquelle, die auf der Abbildung weiter links liegen würde, aufgeladen. Der Kondensator war mit einer Funkenstrecke e geshuntet. Bei genügend hoher Spannung an den Klemmen von C tritt dann in e eine Funkenentladung auf. Die Selbstinduktion der geeignet angeordneten Zuleitungsdrähte des Kreises C, e genügt, um in diesem Kreis einen Strom oszillieren zu lassen. Dieser Strom strahlt seinerseits eine geringe Energie in den Raum ab, da die Abstrahlung der Drahtstücke sich paarweise aufhebt. Die Abstrahlung nach außen kann nun vergrößert werden, indem man an den Klemmen von e kleine Antennen anbringt. Diesen Antennen gibt man zweckmäßig die Form von Kugeln, wie dies in Abb. 427 durch die beiden Kugeln K und K_1 dargestellt ist. Wir erhalten also eine Wellenausbreitung, deren elektrisches Feld in einem gegebenen Zeitpunkt durch die Pfeile an den gestrichelten Kurven bestimmt ist. *Diese Anordnung bezeichnet man als HERTZschen Oszillator.* Er kann in verschiedenen Varianten zusammengebaut werden. Dieser Oszillator erzeugt *gedämpfte Wellenzüge*, deren Frequenz der Resonanz der Antennenkugeln K und K_1 entspricht und deren Abklingzeit der des Funkens in e, durch den der Kondensator mehr oder weniger entladen wird, gleich ist.

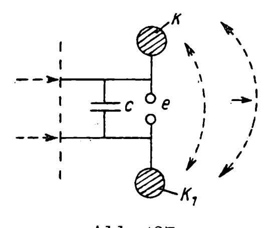
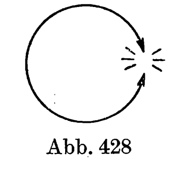
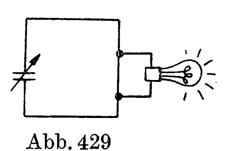


Abb. 427

Der *HERTZsche Resonator* (Abb. 428) stellt ein gewisses Analogon zum Oszillator dar. Er besteht ebenfalls aus einem Stromkreis mit einer Selbstinduktion und einer Kapazität, der in Resonanz gebracht wird und einen gewissen Kraftfluß einschließt. Die elektromotorische Kraft $e = -\frac{d\Phi}{dt}$ erzeugt einen Induktionsstrom, der bei genauer Resonanzabstimmung sehr groß sein kann. Wie weist man nun die Existenz dieser elektromoto-


Abb. 428

rischen Kraft e oder dieses Stromes nach? Bei den ursprünglichen HERTZschen Versuchen besaß der Resonator eine Funkenstrecke aus zwei eng zusammenliegenden Spitzen. Die Potentialdifferenz zwischen diesen Spitzen reichte aus, um einen Funken zu erzeugen und damit das Fließen des Induktionsstromes zu gestatten. Das Auftreten eines solchen Funkens zeigte die Existenz der Schwingungen an.


Abb. 429

In den neueren Experimenten benutzt man einen aus Selbstinduktion und Kapazität bestehenden Stromkreis (Abb. 429), der geeignet ist, einen großen Kraftfluß aufzunehmen (zu diesem Zweck besteht der Kreis aus einer einfachen Kupferschleife). Die Kapazität ist veränderlich (wie bei einem Radiogerät), um den Kreis abgleichen zu können. Im Resonanzfall fließt ein starker Strom, und besonders an den Klemmen der Selbstinduktion oder der Kapazität (wie wir von den Betrachtungen der Schwingkreise wissen) tritt eine Spannung $jl\omega i$ oder $\frac{1}{jC\omega}i$ auf, die beträchtlich höher ist als die Erregerspannung $e = -\frac{d\Phi}{dt}$. Letztere bedingt (nur bei Resonanz) einen Strom nach der Gleichung

$$e = Ri,$$

in der R klein und i groß ist.

Verwenden wir nun einen Teil dieser Spannung zum Betrieb einer kleinen parallel geschalteten Glühlampe, so wird diese aufleuchten und damit die Existenz der den Induktionsstrom erzeugenden elektromagnetischen Wellen nachweisen.

Es wäre ein Fehler, die Glühlampe direkt in Reihe mit dem Kreis zu schalten. Sie würde den Widerstand R sehr stark erhöhen (bis auf R_1) und den fließenden

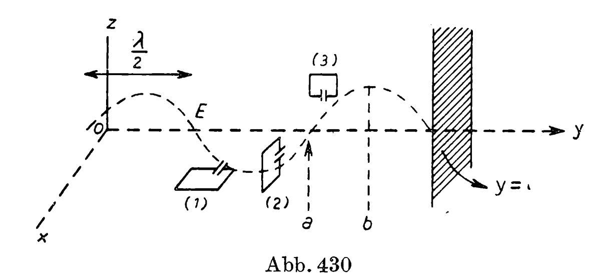


Abb. 430

Strom beträchtlich vermindern (auf i_1), so daß $e = R_1 i_1$ gelten würde. Die Leistung, die die Lampe zum Aufleuchten brächte, nämlich $R_1 i_1^2 = \frac{e^2}{R_1}$, wäre sehr gering. Dadurch ginge ein großer Teil des durch die Resonanz gewonnenen Vorteils wieder verloren.

Die HERTZschen Experimente verfolgten den Zweck, die Existenz des elektromagnetischen Feldes im freien Raum und seine Ausbreitung durch die Erzeugung *stehender Wellen* nachzuweisen. In der Hypothese, in der diese stehenden Wellen als durch Reflexion an einer gut leitenden senkrechten Wand entstanden angenommen wurden, haben wir Erscheinungen beschrieben, die mit dem Resonator beobachtbar sind (Abb. 430).

Der ebene Reflektor befinde sich an der Stelle $y = l$. Die gestrichelte Kurve E gibt die Amplitude des elektrischen Feldes an, die sich mit $\sin \omega t$ zeitlich ändert. Wir wollen ebene Wellen, gleichförmig in der Ebene xOz, betrachten. Wir behandeln zuerst einen in der Ebene xOy liegenden Resonator (Stellung 1): Das elektrische Feld $\mathfrak{E}$ steht senkrecht zu allen Resonatorelementen, und die xOy-Ebene ist eine Äquipotentialebene. Es kann also keine elektromotorische Kraft $e = \int \mathfrak{E} d\mathfrak{s}$ auftreten. Wir stellen weiterhin fest, daß der Fluß des Magnetfeldes durch den Stromkreis (1) Null und das Magnetfeld entlang Ox gerichtet ist. Es existieren also keine Ströme, die durch elektromotorische Induktionskräfte hervorgerufen sein könnten. Liegt der Resonator parallel zur xOz-Ebene (Stellung 2), so tritt kein Induktionsfluß auf. Das elektrische Feld verläuft längs der beiden senkrechten Drahtabschnitte des Resonators in gleicher Richtung. Es erzeugt gleich große entgegengesetzte elektromotorische Kräfte, d.h., es fließt kein Strom.

Wir betrachten nun einen Resonator in der Stellung (3), d.h., in der yOz-Ebene liegend. Das elektrische Feld ist in diesem Fall in beiden Drahtabschnitten I und II ungleich. Daraus folgt die Existenz einer resultierenden elektromotorischen Kraft

$$\int \mathfrak{E} d\mathfrak{s}, \tag{8}$$

die über die Länge des Resonators zu integrieren ist.

Nun steht aber das magnetische Feld senkrecht zur yOz-Ebene. Es tritt ein Kraftfluß durch den Resonator auf, und es existiert eine elektromotorische Kraft der Form

$$e = -\frac{\partial}{\partial t}\iint \mu \mathfrak{H} d\mathfrak{F}. \tag{9}$$

Es ist zu beachten, daß alle bisher betrachteten Effekte der Felder $\mathfrak{H}$ und $\mathfrak{E}$ sehr ähnlich waren. Wir wollen nun zeigen, daß die elektromotorischen Kräfte (8) und (9) in Wirklichkeit identisch sind und tatsächlich nur eine elektromotorische Induktionskraft existiert. Dies kann man gut mit Hilfe der Annahme einer einzigen elektromotorischen Induktionsspannung (nach Faraday) erklären. Um die elektromotorische Kraft zu erhalten, integriert man längs eines Leiters.

Legen wir z.B. den Schwerpunkt des Resonators in den Punkt (a). Auf den beiden vertikalen Drahtabschnitten des Resonators findet man dann zwei Felder $\mathfrak{E}$ mit einander entgegengesetzten Richtungen. Es läßt sich leicht zeigen, daß die elektromotorische Kraft für diesen Fall ein Maximum besitzt. Da sich in (a) ein Knoten des elektrischen Feldes befindet, existiert bei stehenden Wellen dort ein Bauch des magnetischen Feldes. Die Gleichung (9) des Magnetfeldes zeigt also ein Maximum. Nun bringen wir den Resonator in (b), d.h. in einem Spannungsbauch, an: Der elektrische Effekt ist in diesem Fall Null, da die elektrischen Felder auf den Drahtabschnitten I und II gleich sind. Da sich $\mathfrak{H}$ in einem Knoten eines Magnetfeldes nur um Null verändert, ist auch der magnetische Effekt Null. Die allgemeine Identität beider Effekte folgt übrigens auch aus dem Faradayschen Gesetz

$$\int \mathfrak{E} d\mathfrak{s} = \iint \operatorname{rot} \mathfrak{E} d\mathfrak{F} = -\frac{\partial}{\partial t}\iint \mu \mathfrak{H} d\mathfrak{F}.$$

Die elektromotorische Induktionsspannung kann in der MAXWELLschen Theorie auf zwei verschiedene Arten dargestellt werden: Entweder durch das Integral über die zum Leiter parallele Komponente des elektrischen Feldes, ausgehend von der Kontinuität des Feldes $\mathfrak{E}$ beim Übergang in das Dielektrikum, oder durch den Induktionsfluß. Es ist jedoch nicht nötig, beide Berechnungen durchzuführen.

Experimente mit der LECHER-Leitung

Eine aus zwei parallelen Drähten bestehende Leitung nennt man *LECHER-Leitung.* Bei der Ausbreitung der Wellen auf solchen Drähten stellt man, wie wir bereits gesehen haben, fest, daß die Ströme auf beiden Drähten entgegengesetzt gerichtet sind. Schließt man die beiden Drähte kurz, so erhält man ein System stehender Wellen, das in jedem Punkt dem im freien Raum durch Reflexion an einem ebenen Leiter entstandenen analog ist (Abb. 430). In einem solchen Fall ordnet man den Resonator in der Stellung (3) an und bewegt ihn längs des Drahtes. Man kann ohne Schwierigkeiten so die Knoten und Bäuche des induzierten Stromes, die übrigens Bäuchen und Knoten des magnetischen Feldes, d. h. des auf der Leitung fließenden Stromes entsprechen, feststellen. Wir müssen noch erwähnen, daß die Anordnung des Resonators in einer in bezug auf die beiden Drähte symmetrischen Stellung vermieden werden muß, da in diesem Fall der Effekt wegen der entgegengesetzt fließenden Ströme nicht auftritt.

Will man auf der LECHER-Leitung ein einwandfreies System stehender Wellen erreichen, dann muß die rücklaufende Welle eine annähernd gleiche Intensität wie die hinlaufende Welle aufweisen. Die Strahlungsverluste müssen also sehr klein sein. Dies erreicht man durch eine *starke Annäherung* der beiden die Leitung bildenden Drähte. In diesem Fall heben sich die einzelnen Strahlungen der beiden Drähte durch Interferenz nahezu auf. Die Induktionseffekte werden verringert, und die stehenden Wellen bilden sich einwandfreier heraus, d. h., sie besitzen scharfe Knoten.

Übereinstimmung der Ausbreitungsgeschwindigkeit mit der Lichtgeschwindigkeit. Beziehung $\varepsilon = n^2$

Für das Vakuum gilt $\varepsilon = \mu = 1$. Die MAXWELLsche Theorie ergibt die Ausbreitungsgeschwindigkeit $c_1 = c$. Der numerische Wert von c beträgt $3 \cdot 10^{10}$ cm, d. h. 300000 km pro sec. Dies ist die Ausbreitungsgeschwindigkeit des Lichtes im Vakuum. Man betrachtet also seit MAXWELL das Licht als ein in der Ausbreitung eines elektromagnetischen Wechselfeldes bestehendes Phänomen. Seine Frequenz ist dabei als Quotient der Geschwindigkeit c_1 durch die Wellenlänge λ (die z. B. aus Interferenzversuchen bekannt ist) gegeben.

Nun ist jedoch in einem Medium mit dem Brechungsindex n die Lichtgeschwindigkeit zu c/n gegeben. Setzt man für ein solches Medium $\mu = 1$, so erhält man nach der MAXWELLschen Theorie für die Geschwindigkeit den Ausdruck $\frac{c}{\sqrt{\varepsilon}}$. Bei Gleichsetzung ergibt sich, daß nach der MAXWELLschen Theorie die Dielektrizitätskonstante ε gleich dem Quadrat des Brechungsindexes n ist.

Mißt man nun ε für eine beliebige Frequenz, z. B. für die Frequenz Null (statische Dielektrizitätskonstante), und n^2 für Licht mit einer beliebigen Frequenz, so

findet man im allgemeinen die Beziehung $\varepsilon = n^2$ sehr schlecht bestätigt. Wir wollen hier nur den Fall des Wassers mit $\varepsilon = 80$ und $n = 1{,}33$ anführen. Führt man dagegen beide Messungen mit der gleichen Frequenz durch, so findet man eine ausreichende Übereinstimmung.

Die MAXWELLsche Theorie wird also sehr gut bestätigt: Es genügt einfach die Berücksichtigung einer möglichen Veränderung von ε und n mit der Frequenz. Dieses Phänomen ist vollständig zu erklären. Es handelt sich um die sogenannte *Dispersion* der Dielektrizitätskonstanten oder des Brechungsindexes. Ohne weiter auf die Theorie einzugehen, können wir das im Kapitel: Elektrostatik über die Dielektrizitätskonstante eines Körpers mit permanentem elektrischem Moment der Moleküle Ausgesagte wiederholen. Die Orientierung dieser Moleküle in einem statischen elektrischen Feld ist zu einem großen Teil für die Existenz der Dielektrizitätskonstanten verantwortlich. Durch die Trägheit der Moleküle wird bei einem mit hoher Frequenz schwingenden Feld verhindert, daß die Moleküle den Wechseln des Feldes folgen können. Wir finden daher bei einem Körper ohne permanentes Moment eine sehr viel kleinere Dielektrizitätskonstante. Andererseits gibt es Fälle, bei denen der Brechungsindex n im Bereich des Lichtes mit der Frequenz anwächst. Diese Betrachtungen gehören jedoch in das Gebiet der Optik.

Die Messung des Brechungsindexes im HERTZschen Bereich wird mit den klassischen Verfahren der Optik durchgeführt. So bringt man z. B. ein großes Paraffinprisma in den Strahlengang einer elektromagnetischen Welle. Dann kann man die Minimalablenkung feststellen und daraus den Brechungsindex des Paraffins berechnen.

III. KAPITEL

Hohlleiter

Allgemeines. Phasengeschwindigkeit. Gruppengeschwindigkeit

Wir wollen uns nun der Betrachtung sich in metallischen Röhren ausbreitender elektromagnetischer Wellen zuwenden und mit Hilfe ihrer bekannten Eigenschaften Erzeugung und Nachweis hinsichtlich der vielseitigen Anwendungen erörtern.

Nach dem Studium dieses Kapitels werden wir sehen, daß diese Ausbreitung in metallischen Röhren nur für Wellen mit einer Wellenlänge von einigen Zentimetern interessant ist, d. h. für Frequenzen in der Größenordnung von 1000 MHz. Obgleich die Theorie allgemein gilt, werden wir die Anwendungen nur für das Gebiet der sogenannten „Ultrahochfrequenzen" betrachten.

Die bei dieser Ausbreitung auftretenden Phänomene können besser an Hand spezieller Beispiele erklärt werden als durch eine sehr abstrakt erscheinende Theorie, die nach unserer Meinung nach dem Verständnis des physikalischen Gehaltes dieser Fragen viel leichter zu verstehen ist.

Wir betrachten also nun eine Röhre mit rechteckigem Querschnitt $ABCD$, deren Achse mit der x-Richtung zusammenfällt (Abb. 431), und untersuchen, ob sich in Richtung positiver x eine Welle ausbreiten kann, deren elektrisches Feld entlang Oz gerichtet ist. Eine solche Welle im freien Raum, und nicht in einem solchen

Leiter, würde als „eben“ bezeichnet werden, d. h., E_z wäre ein in der Ebene $ABCD$ liegendes gleichförmiges elektrisches Feld, und ein ebenfalls gleichförmiges Magnetfeld in der gleichen Ebene wäre gegen negative y gerichtet. Die Felder E_z und H_y würden sich dann in der Ox-Richtung mit der Lichtgeschwindigkeit c ausbreiten.

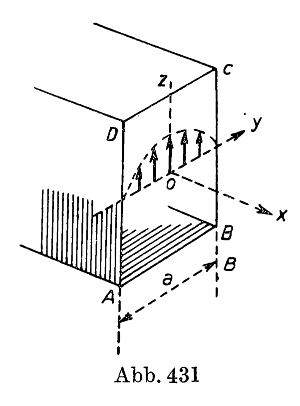


Abb. 431

Der POYNTINGsche Vektor oder der Energiefluß pro Quadratzentimeter, der, im Gaußschen Maßsystem gemessen, den Wert

$$\frac{c}{4\pi}\,\mathfrak{E}\times\mathfrak{H}$$

besitzt, hätte die Richtung Ox. In dem in Abb. 431 dargestellten und eben betrachteten Leiter ist dies unmöglich, *da das magnetische und das elektrische Feld den Grenzbedingungen genügen müssen:* Das elektrische Feld muß senkrecht zum Leiter verlaufen oder verschwinden. In dem Querschnitt $ABCD$ kann aber das Feld E_z, obwohl es senkrecht auf AB und CD verläuft, nicht gleichförmig sein, da es auf den Kanten AD und BC verschwinden muß.

Wir wollen jetzt auf der Abszisse y eine Verteilung von E_z annehmen, die dieser Bedingung genügt, z. B.

$$E_z = E_0 \cos\frac{\pi y}{a}, \tag{1}$$

wobei a die Breite AB des Leiters darstellt.

Es sei E_0 das elektrische Feld in der Leiterachse, das wegen der Ausbreitung von der Zeit abhängt.

Untersuchen wir dies nun. Man weiß, daß das Feld E_z in jedem Fall die direkt von den MAXWELLschen Gleichungen abgeleitete Ausbreitungsgleichung

$$\frac{\partial^2 E_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 E_z}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 E_z}{\partial z^2} = \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 E_z}{\partial t^2} \tag{2}$$

befriedigt. Nun ist aber

$$\frac{\partial^2 E_z}{\partial z^2} = 0,$$

und nach (1) gilt

$$\frac{\partial^2 E_z}{\partial y^2} = -\frac{\pi^2}{a^2}E_z.$$

Weiter nehmen wir an, daß die Ausbreitung sinusförmig mit der Kreisfrequenz ω verlaufe. Dann können wir schreiben

$$\frac{\partial^2 E_z}{\partial t^2} = -\,\omega^2 E_z,$$

und Gl. (2) ergibt sich in der Form

$$\frac{\partial^2 E_z}{\partial x^2} = \left(-\frac{\omega^2}{c^2} + \frac{\pi^2}{a^2}\right)E_z. \tag{3}$$

Dies ist eine Ausbreitungsgleichung für E_z (mit gegebener Kreisfrequenz ω) längs Ox, *jedoch mit einer von c verschiedenen Ausbreitungsgeschwindigkeit* c'. Berechnen wir tatsächlich c', in dem wir (3) als Ausbreitungsgleichung betrachten, so gilt

$$\frac{\partial^2 E_z}{\partial x^2} = \frac{1}{c'^2}\frac{\partial^2 E_z}{\partial t^2} = -\frac{\omega^2}{c'^2} E_z.$$

Man sieht also, daß

$$\frac{\omega^2}{c'^2} = \frac{\omega^2}{c^2} - \frac{\pi^2}{a^2} = \frac{\omega^2}{c^2}\left[1 - \frac{\pi^2 c^2}{a^2 \omega^2}\right]$$

gilt, und c' ergibt sich zu

$$c' = \frac{c}{\sqrt{1 - \frac{\pi^2 c^2}{a^2 \omega^2}}}. \tag{4}$$

Nun ist jedoch $\omega = \frac{2\pi c}{\lambda}$, wobei λ die Wellenlänge bei einer Ausbreitung im *freien Raume* ist, und man kann auch

$$c' = \frac{c}{\sqrt{1 - \frac{\lambda^2}{4a^2}}} \tag{5}$$

schreiben.

Die Ausbreitungsgeschwindigkeit ist also *größer* als die Lichtgeschwindigkeit. Es handelt sich jedoch um eine *Phasengeschwindigkeit:* Wir wissen aus allgemeinen Resultaten, z.B. aus dem Phänomen der *Dispersion*, d.h. der Veränderung von c' als Funktion von ω, daß die Geschwindigkeit der Energieübertragung oder die „Gruppengeschwindigkeit" $\frac{c^2}{c'}$, die eine kleine Wellengruppe benachbarter Frequenzen betrifft, kleiner ist als die Lichtgeschwindigkeit. Das Relativitätsprinzip ist also gewahrt.[1])

[1]) Ein Signal, das einen Anfang und ein Ende besitzt, kann keine reine Sinuswelle sein. Wir beschreiben es durch

$$\Sigma A_i \sin\left[\omega_i \cdot t - 2\frac{\pi x}{\lambda_i} + \varphi_i\right].$$

Die Phase in $x + \Delta x$ und $t + \Delta t$ der Komponente ω_i ist gleich der in x und t, vergrößert um $\omega_i\, \Delta t - \frac{2\pi}{\lambda_i}\Delta x$. Will man, daß diese Phasenveränderung auch für Wellen benachbarter Frequenzen gilt, muß

$$\delta\,\omega_i \Delta t - \delta\left(\frac{2\pi}{\lambda_i}\right)\Delta x = 0$$

sein. Daraus folgt eine neue Geschwindigkeit, die sogenannte *Gruppengeschwindigkeit*

$$\frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{\delta(\omega_i)}{\delta\left(\frac{2\pi}{\lambda_i}\right)}.$$

Sie ist die Geschwindigkeit, mit der sich ein Signal, die Energie ... usw. ausbreiten. Durch Einsetzen findet man den Wert dieser Gruppengeschwindigkeit zu $\frac{c^2}{c'}$.

Die Gesetze dieser Ausbreitung sind für die Leser sehr überraschend, die sich bisher nur auf ein kurzes Studium der ebenen Wellen beschränkt haben und die fälschlich annahmen, daß die Ausbreitungsgeschwindigkeit für alle nur möglichen Wellenarten die gleiche ist. Tatsächlich sieht man beim Betrachten von Abb. 431 sofort, daß mit zunehmender Ausbreitung in Ox-Richtung auch eine beträchtliche Transversalausbreitung (zu Ox) in beiden Richtungen auftritt. Wir erhalten also die gleichen stehenden Wellen, als wäre der betrachtete Leiter in Resonanz für $\frac{\lambda}{2}$. Die Ausbreitung dieses Resonanzzustandes gegen positive x erfolgt also mit der Geschwindigkeit c'.

Um den Leser mit dieser Situation besser vertraut zu machen, kann man Probleme betrachten, bei denen auch Ausbreitungsgeschwindigkeiten auftreten, die von denen im freien Raum verschieden sind. Als Beispiel wählen wir ein Wasser-

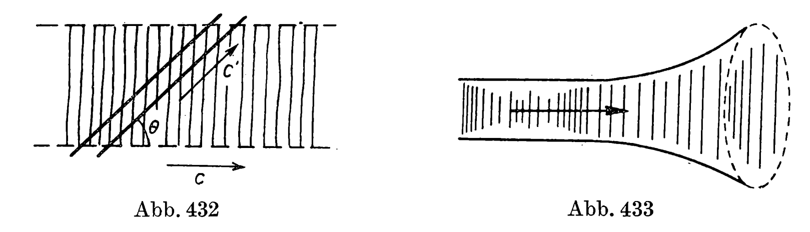


Abb. 432 Abb. 433

bassin, in dem sich ein in Richtung Θ verlaufender Spalt befindet (Abb. 432). Im Bassin breiten sich Wellen mit der Geschwindigkeit c aus. Es ist klar, daß sich entlang der Spaltrichtung Θ die Wellenerscheinung mit der Geschwindigkeit $c' = \frac{c}{\cos\Theta}$ ausbreiten wird.

Als weiteres Beispiel betrachten wir die Ausbreitung von Schallwellen in einem Exponentialtrichter, d.h. in einem Trichter, dessen Querschnitt exponentiell mit der Abszisse anwächst. In diesem Fall erhalten wir für die Geschwindigkeit c' eine Formel, die genau die gleiche Form wie Gl. (4) besitzt. Diese Schallausbreitung wird speziell in Lehrbüchern der Schwingungslehre behandelt.

Kehren wir zu einem rechteckigen Rohr zurück, so sehen wir, daß für Wellen des von uns gewählten Typs eine *Grenzfrequenz* existiert, deren Kreisfrequenz ω durch den Ausdruck

$$\frac{\pi^2 c^2}{a^2 \omega^2} = 1$$

gegeben ist, der $c' = \infty$ ergibt.

Für niedrigere Frequenzen ist keine „Ausbreitung“ im Rohr möglich, während für höhere Frequenzen, deren Wellenlänge im freien Raum $\lambda = 2a$ ist, eine Ausbreitung auftritt. Wir werden also das gesamte Ensemble der Werte E_z eines rechteckigen Querschnitts betrachten müssen, das sich durch alle Querschnitte mit der Geschwindigkeit c' ausbreitet. Der röhrenförmige Leiter spielt also die Rolle eines *Hochpasses*.

Die Existenz einer solchen Grenzfrequenz und die Tatsache, daß nur Hohlleiter kleiner Dimensionen hergestellt werden können, beschränken das Interesse an

Hohlleitungen von vornherein auf das Gebiet der Zentimeterwellen. Gewisse Ausbreitungen von Meterwellen in *Tunnels* und von Radiowellen zwischen der Erde und der HEAVISIDE-Schicht werden durch die Eigenschaften der Hohlleitungen erklärt.

Wir wollen noch kurz die unterhalb der Grenzfrequenz liegenden Frequenzen behandeln. Für alle diese Frequenzen gilt die Ausbreitungsgleichung (3) mit der gleichen Lösung

$$E_z = e^{\pm \beta x},$$

wenn wir

$$\beta = \sqrt{\frac{\pi^2}{a^2} - \frac{\omega^2}{c^2}}$$

annehmen und in E_z den Zeitfaktor $e^{i\omega t}$ vernachlässigen.

Wenn wir β als reell annehmen, zeigt sich, daß die Felder im gesamten Leiter *in Phase* sind. Betrachten wir nur einen endlichen Teil des Leiters, so spielt dieser eine der Scheinwiderstandsanpassung ohne Ausbreitung analoge Rolle. Die Felder der einen Seite stehen, ohne phasenverschoben zu sein, in einem bestimmten Verhältnis zu denen der anderen Seite. Würden wir in einem metallischen Tunnel einen Langwellensender mit einer kleinen Antenne zur Ausstrahlung und einen gleichen Empfänger mit einer Antenne unterbringen, so entspräche dies dem eben betrachteten Fall.

Zerlegung in ebene Wellen

Wir wollen nun in einer mehr physikalischen Art die Betrachtung der Grenzfrequenz selbst und der damit zusammenhängenden Phänomene vornehmen. Die Abb. 434 zeigt einen horizontalen Schnitt durch zwei Wände, auf denen das elektrische Feld E_z Null ist. Nun möge sich eine *in Ox-Richtung ebene* elektromagnetische Welle von AA' nach BB' entlang Oy ausbreiten. Sie entspricht einem Phänomen stehender Wellen mit einer Verteilung des elektrischen Feldes der Form

$$E_z = E_0 \cos \frac{2\pi y}{\lambda}.$$

Abb. 434

Da nun für diese Frequenz $\frac{\lambda}{2} = a$ ist, können wir zwei „Knoten" des elektrischen Feldes auf den Wänden AA' und auf BB' erhalten. Wir haben also eine Verteilung des Feldes E_z, wie sie auf der linken Seite der Abb. 433 dargestellt ist. Diese Verteilung ist nun in Richtung Ox gleichförmig, d.h., zu jedem Zeitpunkt finden wir für alle Abszissen die gleichen Felder. Dies entspricht aber einer unendlichen Ausbreitungsgeschwindigkeit entlang Ox und ist in guter Übereinstimmung mit den vorher gefundenen Resultaten. Im Falle der Grenzfrequenz reduziert sich das Phänomen auf einen unbestimmten Hin- und Rücklauf in Oy-Richtung der in Ox-Richtung ebenen Wellen.

Wir wollen nun für alle oberhalb der Grenzfrequenz liegenden Frequenzen die folgende Überlegung durchführen: Zwischen zwei Wänden AA' und BB' breite

sich eine ebene Welle in der mit Oy den Winkel Θ bildenden Richtung mit der Geschwindigkeit c aus.

Um nun für eine gegebene Abszisse x die Phänomene zu untersuchen, ordnen wir, wie in Abb. 432, parallel zu Oy einen Spalt an. Nach den bereits früher durchgeführten Überlegungen tritt hier eine Ausbreitungsgeschwindigkeit $c' = \frac{c}{\cos\Theta}$ auf. Der Kreisfrequenz ω der betrachteten Wellen, deren Wellenlänge im freien Raum $\lambda = \frac{2\pi c}{\omega}$ beträgt, entspricht eine Wellenlänge von

$$\lambda_1 = \frac{c'}{c}\,\lambda = \frac{2\pi c}{\omega\cos\Theta}.$$

Mit den reflektierten Wellen bilden sich also stehende Wellen, deren Knoten gerade auf AA' und BB' liegen, wenn $\lambda_1 = 2a$ ist.

Da nun $2a$ und ω bekannt sind, können wir $\cos\Theta$ so wählen, daß die Beziehung

$$\cos\Theta = \frac{2\pi c}{2a\omega} = \frac{\lambda}{2a}$$

erfüllt ist. Wir betrachten also sowohl die direkte Welle, die von BB' auf AA' fällt, als auch die reflektierte Welle, die von AA' auf BB' fällt. Diese beiden Wellen breiten sich in Richtungen aus, die mit Ox den Winkel $\frac{\pi}{2} - \Theta$ bilden. In Richtung Ox werden wir also (beide Wellen zusammen betrachtet) eine Ausbreitung mit der Geschwindigkeit

$$c' = \frac{c}{\cos\left(\frac{\pi}{2} - \Theta\right)} = \frac{c}{\sin\Theta}$$

erhalten. Da nun aber

$$\cos\Theta = \frac{\lambda}{2a}$$

ist, ergibt sich

$$c' = \frac{c}{\sqrt{1 - \frac{\lambda^2}{4a^2}}} = \frac{c}{\sqrt{1 - \frac{\pi^2 c^2}{a^2\omega^2}}}.$$

Dieser Ausdruck stimmt mit Gl. (4) überein. Wir erhalten also genau wieder die Anfangswelle. Diese stellt sich als Interferenzbild dar, das einer sich schräg zwischen zwei gegenüberstehenden Wänden fortschreitenden ebenen Welle bei ihren vielfachen Reflexionen entspricht.

Die Betrachtung dieser ebenen Welle, die offensichtlich die Energie mit der Geschwindigkeit c transportiert, führt uns auch auf die „Gruppengeschwindigkeit“ $\frac{c^2}{c'} = c\sin\Theta$, die einfach die Komponente der schrägen Ausbreitungsgeschwindigkeit c in Richtung Ox ist.

Entsprechend diesen Betrachtungen, könnte es vorteilhaft sein, entweder die direkte Ausbreitung der nichtebenen Welle entlang Ox, wie wir am Anfang gefunden haben, oder die schräge Ausbreitung der äquivalenten ebenen Welle mit aufeinanderfolgenden Reflexionen zu betrachten. In Abb. 435 ist eine solche Welle mit schräger Ausbreitung dargestellt, in (1) für eine Frequenz, wenig höher als die Grenzfrequenz, und in (2) für eine beträchtlich höhere Frequenz.

Um unsere Kenntnis dieser Wellen zu vervollständigen, müssen wir noch ihr magnetisches Feld bestimmen. Es läßt sich auf zwei Arten zeigen, daß im Gegensatz zu ebenen Wellen *das magnetische Feld* $\mathfrak{H}$ *dieser Welle eine Komponente in der Ausbreitungsrichtung* Ox *besitzt.*

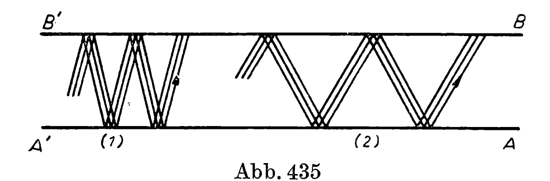


Abb. 435

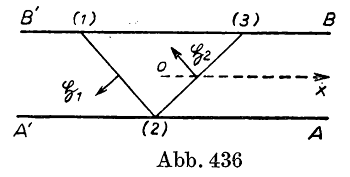


Abb. 436

Zuerst wollen wir eine ebene Welle auf dem Weg (1), (2), (3) betrachten (Abb. 436). Wir sehen, daß das Feld $\mathfrak{H}_1$, das senkrecht zur Ausbreitungsrichtung der Welle verläuft, eine Komponente in Ox-Richtung besitzt, die, wie man bei Berücksichtigung des Phasensprunges um π bei der Reflexion sieht, durch die Interferenz mit der reflektierten Welle nicht aufgehoben wird. (Der Phasensprung kann durch die FOUCAULTschen Ströme verursacht sein, die verhindern, daß das magnetische Feld wieder in den als ideal angenommenen Leiter tritt.) Das Magnetfeld auf dem Weg (2)–(3) hat also die Richtung $\mathfrak{H}_2$.

Zum anderen kann man das magnetische Feld sehr einfach mit Hilfe der sogenannten MAXWELL-FARADAYschen Beziehung berechnen:

$$\operatorname{rot}\mathfrak{E} = -\frac{1}{c}\,\frac{\partial\mathfrak{B}}{\partial t}. \tag{6}$$

Dabei ist $\mathfrak{B}$ in Gauß und $\mathfrak{E}$ in elektrostatischen Einheiten anzugeben.

Erinnern wir uns nun, daß diese Beziehung das Induktionsgesetz darstellt

$$e = -\frac{\partial\Phi}{\partial t},$$

so ist

$$\int \mathfrak{E}\,d\mathfrak{s} = -\frac{\partial}{\partial t}\iint \mathfrak{B}\,d\mathfrak{F}.$$

Da nun

$$\int \mathfrak{E}\,d\mathfrak{s} = \iint \operatorname{rot}\mathfrak{E}\,d\mathfrak{F}$$

ist, folgt durch Gleichsetzen der einzelnen Terme

$$\operatorname{rot}\mathfrak{E} = -\frac{\partial\mathfrak{B}}{\partial t}$$

in elektromagnetischen Einheiten. Setzt man nun für $\mathfrak{E}$ elektrostatische Einheiten ein, so gilt Gl. (6). Hierbei ist $\mathfrak{B} = \mathfrak{H}$ (in elektromagnetischen Einheiten).

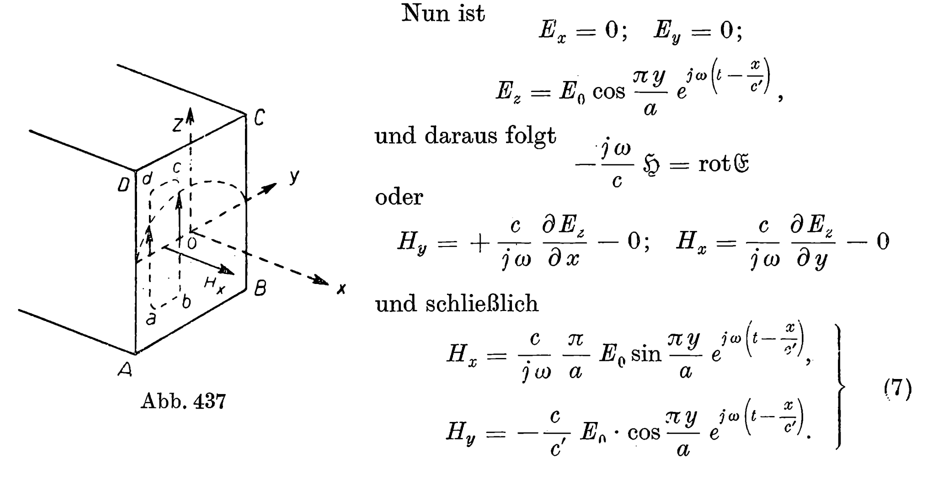


Abb. 437

Nun ist

$$E_x = 0; \quad E_y = 0;$$

$$E_z = E_0 \cos \frac{\pi y}{a}\, e^{j\omega\left(t - \frac{x}{c'}\right)},$$

und daraus folgt

$$-\frac{j\omega}{c}\,\mathfrak{H} = \operatorname{rot}\mathfrak{E}$$

oder

$$H_y = +\frac{c}{j\omega}\,\frac{\partial E_z}{\partial x} - 0; \quad H_x = \frac{c}{j\omega}\,\frac{\partial E_z}{\partial y} - 0$$

und schließlich

$$\left.\begin{aligned} H_x &= \frac{c}{j\omega}\,\frac{\pi}{a}\,E_0 \sin \frac{\pi y}{a}\, e^{j\omega\left(t - \frac{x}{c'}\right)}, \\ H_y &= -\frac{c}{c'}\,E_0 \cdot \cos \frac{\pi y}{a}\, e^{j\omega\left(t - \frac{x}{c'}\right)}. \end{aligned}\right\} \tag{7}$$

Man sieht aus diesen Formeln, daß das Feld H_y phasengleich mit dem Feld E_z ist und sich dem mit dem Faktor $\frac{c}{c'}$ multiplizierten Wert für eine ebene Welle gleich erweist. Das Neue daran ist jedoch das Vorhandensein eines gegenüber dem vorstehenden phasenverschobenen Feldes H_x, das auf der Achse Null ist, jedoch an den Wänden einen Maximalwert annimmt.

Wir stellen nun in Abb. 437 das Schema der Abb. 431 dar und sehen, daß beim transversalen Einführen eines Rahmens $abcd$ in den Leiter E_z auf beiden Längskanten unterschiedlich ist und eine elektromotorische Kraft

$$\frac{\partial E_z}{\partial y}\, dy dz$$

oder

$$\operatorname{rot}\mathfrak{E}\; dy\, dz$$

erzeugt. Diese ist gleich der Veränderung des Kraftflusses, welcher die Existenz des dargestellten veränderlichen magnetischen Feldes H_x hervorruft.

Wir untersuchen jetzt den POYNTINGschen Vektor und stellen fest, daß seine Komponente $\frac{cE_z \times H_y}{4\pi}$ ständig entlang Ox gerichtet ist und einen mittleren Wert ungleich Null besitzt, da E_z und H_y in Phase sind, während die Komponente $\frac{c\,E_z \times H_x}{4\pi}$ mit $\cos\omega t \sin\omega t$ oszilliert, da die beiden Komponenten der Vektoren gegeneinander um $\frac{\pi}{2}$ phasenverschoben sind. Also ist diese Komponente abwechselnd gegen positive und negative y gerichtet. Dadurch wird eine Energiedichte erzeugt, die unaufhörlich zwischen den beiden Wänden AD und BC schwingt.

Nun wollen wir den Typ der einfachsten Welle betrachten. Alle Resultate, die wir dabei erhalten, lassen sich allgemein anwenden, gleichgültig, ob es sich um andere Wellentypen in einem gleichen rechtwinkligen Hohlleiter oder um andere, runde bzw. elliptische usw. Hohlleiter handelt.

Will man alle diese Fälle behandeln, so ist dazu ein gewisses mathematisches Rüstzeug erforderlich; der physikalische Sinn ist jedoch in jedem Fall der gleiche. Man geht von der Gleichung

$$\Delta \mathfrak{E} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \mathfrak{E}}{\partial t^2}$$

aus und benutzt ein zylindrisches Koordinatensystem, in dem Ox beibehalten wird. Dann führt man in der Ebene yOz Polarkoordinaten oder elliptische usw. Koordinaten ein. Auf diese Weise erhält man

$$\frac{\partial^2 \mathfrak{E}}{\partial x^2} + \Delta_1 \mathfrak{E} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \mathfrak{E}}{\partial t^2}. \tag{8}$$

In dem zweidimensionalen LAPLACE-Ausdruck $\Delta_1 \mathfrak{E}$ substituiert man $\mathfrak{E}$ durch einen Ausdruck, der einerseits mit den Grenzbedingungen an den Wänden vereinbar und andererseits in der gesamten yz-Ebene mit $\mathfrak{E}$ in Phase ist. Wie man leicht sieht, wird man einen Ausdruck der Form

$$\Delta_1 \mathfrak{E} = -A^2 \mathfrak{E}$$

erhalten, da diese Verteilung als bestimmtes System stehender Wellen interpretiert werden kann (zweidimensional), das einer Ausbreitungsgleichung

$$\Delta_1 \mathfrak{E} = \frac{1}{c_1^2} \frac{\partial^2 \mathfrak{E}}{\partial t^2}$$

genügt. Dabei ist c_1 so gewählt, daß die Wellenlängen den geometrischen Möglichkeiten zur Resonanz entsprechen. Wir finden also

$$\Delta_1 \mathfrak{E} = -\frac{\omega^2}{c_1^2} \mathfrak{E} = -\frac{4\pi^2}{\lambda^2} \mathfrak{E},$$

wobei λ in dieser Formel eine Funktion der Hohlleiterdimensionen ist (in unserem vorstehenden Beispiel ist $\lambda = 2a$). Es gilt also

$$A^2 = \frac{4\pi^2}{\lambda^2}$$

(in unserem Beispiel ist $A^2 = \frac{\pi^2}{a^2}$, d.h. eine Funktion der Leiterdimensionen und des möglichen Wellentyps). Wir erhalten also längs des Hohlleiters ein Ausbreitungsgesetz

$$\frac{\partial^2 \mathfrak{E}}{\partial x^2} = \left(-\frac{\omega^2}{c^2} + A^2\right) \mathfrak{E}$$

und daraus die Geschwindigkeit c' zu

$$c' = \frac{c}{\sqrt{1 - \frac{A^2 c^2}{\omega^2}}}.$$

Dies zeigt uns, daß die Form der Gl. (4) *ganz allgemein ist.*

Die immer mögliche Zerlegung in ebene Wellen, die unaufhörlich zwischen den Wänden hin und her laufen und reflektiert werden, ist ebenfalls ein allgemeines Phänomen, welches übrigens nur eine Folgerung des vorstehenden Resultates darstellt: Man erhält tatsächlich notwendig wie oben $c' = \frac{c}{\sin \Theta}$, da die Geschwindigkeit des Energietransportes

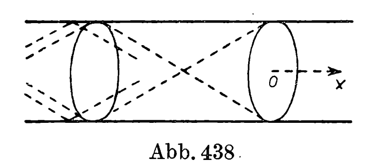


Abb. 438.

$$c_2 = c \sin \Theta = \frac{c^2}{c'}$$

beträgt, $\cos \Theta$ also gleich $\frac{A\,c}{\omega}$ ist. Dabei ist Θ der Winkel, der zum Auftreten stehender Wellen in der ebenen Querschnittsfläche für die Ausbreitungsrichtung der ebenen Wellen notwendig ist.

So breiten sich z. B. in einem runden Rohr die äquivalenten ebenen Wellen entlang Ox in unendlicher Anzahl entlang den Erzeugenden von Kegeln mit dem Scheitelwinkel Θ (Abb. 438) aus.

Klassifizierung der Wellen

Wir wollen nun die Frage der *Klassifizierung aller möglichen Wellen in einem gegebenen Hohlleiter* und ihre Nomenklatur behandeln. Dazu betrachten wir noch einmal den rechtwinkligen Hohlleiter. Die zuerst behandelte Welle war unter anderem dadurch charakterisiert, daß sie keine Komponente des elektrischen Feldes in Ausbreitungsrichtung, dagegen eine Longitudinalkomponente des magnetischen Feldes besaß. Aus diesem Grunde kam man überein, die Welle „H-Welle" zu nennen.

Es ist leicht möglich, sich aus Symmetriegründen eine Welle vorzustellen, die ein transversales magnetisches Feld besitzt. Sie würde dann ein elektrisches Feld mit einer longitudinalen Komponente haben. Diese Welle nennt man „E-Welle".

Betrachten wir nun wieder die H-Welle. Wir sehen sofort, daß es mehrere Arten gibt. Selbst wenn wir uns auf die oben behandelte Erzeugungsart der Wellen beschränken, sehen wir, daß man auf der Strecke a, der Breite des Hohlleiters, entweder eine Resonanz bei einer Halbwelle, zwei Halbwellen, drei Halbwellen usw. erhalten kann (siehe Abb. 439b). Bezeichnet man mit m die Anzahl der Halbwellen für das Feld E_z (wenn man Oy beschreibt), so sieht man, daß jedes Gesetz

$$E_z = E_0 \cos \frac{m \pi y}{a}$$

befriedigt ist, und man spricht von einer Welle der Ordnung m.

Nichts zwingt uns jedoch, eine Welle gleichförmig in bezug auf z anzunehmen. Es ist klar, daß jedes Gesetz der Form

$$E_z = E_0 \cos \frac{m\pi y}{a} \cos \frac{n\pi z}{b} \tag{10}$$

auch *a fortiori* gilt. Eine solche Welle nennt man nach Definition H_{mn}-Welle. Die in Abb. 439a dargestellte Welle ist eine H_{01}-Welle, die in Abb. 439b gezeigte eine H_{03}-Welle. Man sieht sofort, daß eine H_{00}-Welle nicht existieren kann, da die dabei auftretende Verteilung des elektrischen Feldes nicht mit den Grenzbedingungen in Übereinstimmung zu bringen wäre. Tatsächlich ist die H_{00}-Welle eine ebene Welle, bei der E_z in der gesamten xOz-Ebene konstant ist.

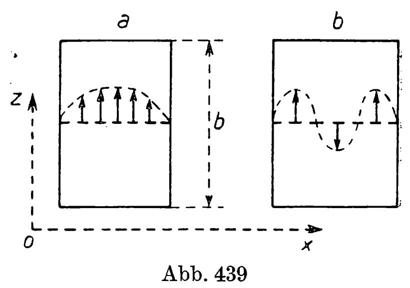


Abb. 439

Es ist wichtig, festzustellen, daß alle diese Wellen für eine gleiche Frequenz verschiedene Ausbreitungsgeschwindigkeiten besitzen und daß jede Wellenart eine andere Grenzfrequenz besitzt.

Wir wollen dies kurz prüfen und setzen E_z aus Gl. (10) in Gl. (2) ein:

$$\frac{\partial^2 E_z}{\partial y^2} = -\frac{m^2\pi^2}{a^2} E_z ,$$

$$\frac{\partial^2 E_z}{\partial z^2} = -\frac{n^2\pi^2}{b^2} E_z$$

und

$$\frac{\partial^2 E_z}{\partial x^2} = \left[-\frac{\omega^2}{c^2} + \left(\frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2}\right)\pi^2\right] E_z .$$

Rechnen wir nun weiter wie zu Beginn, so erhalten wir die Geschwindigkeit c' der Welle zu

$$c' = \frac{c}{\sqrt{1 - \frac{\pi^2 c^2}{\omega^2}\left(\frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2}\right)}} .$$

Je höher die Ordnung m, n der Welle ist, um so höher liegt die Grenzfrequenz und um so größer ist für eine gegebene Frequenz ihre Geschwindigkeit c'.

Die *Form der Kraftlinien* hängt natürlich in starkem Maße von dem Wellentyp ab. Die Gleichungen dieser Kraftlinien kann man in der Form

$$\frac{dx}{E_x} = \frac{dy}{E_y} = \frac{dz}{E_z}$$

und

$$\frac{dx}{H_x} = \frac{dy}{H_y} = \frac{dz}{H_z}$$

darstellen.

Wir wollen uns hier (Abb. 440) auf solche Kraftlinien beschränken, wie sie in rechteckigen Hohlleitern auftreten. Die ausgezogenen Linien stellen in der Abbildung E und die gestrichelten H dar. Nach den bisherigen Vereinbarungen müßte die relative Ablenkung der Kraftlinien der Feldstärke umgekehrt proportional sein. In Abb. 440 sind die elektrischen und magnetischen Kraftlinien in der Schnittebene yOz für die H_{01}- und die H_{11}-Wellen und die magnetischen Kraftlinien für beide Wellen in der Querschnittsebene zOx dargestellt.

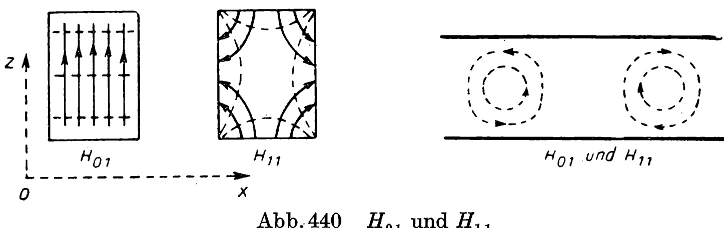


Abb. 440 H_{01} und H_{11}
Lage des Magnetfeldes

Wir stellen fest, daß mit Ausnahme für die H_{01}-Welle auch eine E_y-Komponente des Feldes existiert, während wir bisher nur die Existenz von E_z angenommen hatten. Diese Situation wird durch die Tatsache erklärt, daß das elektrische Feld keinen Kraftfluß in den freien Raum besitzt (COULOMBsches Theorem). Dies kann man (POISSONsche Gleichung) durch $\operatorname{div}\mathfrak{E} = 0$ oder

$$\frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y} + \frac{\partial E_z}{\partial z} = 0 \tag{11}$$

ausdrücken.

Hierbei ist $E_x \equiv 0$, und mit Hilfe der Gl. (10) erhalten wir

$$\frac{\partial E_y}{\partial y} = -\frac{\partial E_z}{\partial z} = E_0 \frac{\pi n}{b} \cos \frac{m\pi y}{a} \sin \frac{n\pi y}{b}.$$

Durch Integration ergibt sich

$$E_y = E_0 \frac{na}{mb} \sin \frac{m\pi y}{a} \sin \frac{n\pi y}{b}.$$

Wir sehen, daß dieser Ausdruck in Übereinstimmung mit der Abb. 440 steht. Man erhält ohne weitere Schwierigkeiten die vollständige Darstellung des magnetischen Feldes in diesen Wellen.

Zur Vervollständigung zeigen wir in Abb. 441 noch die Kraftlinien für andere H-Wellen und die einfachsten E-Wellen.

Wir stellen dabei eine sehr große Unterschiedlichkeit für die verschiedenen Wellen fest. Beachtet man jetzt noch, daß jede lineare Kombination von zwei oder mehreren Fundamentalwellen wieder eine neue mögliche Welle ergibt, kann man sich eine Vorstellung von der Fülle der Möglichkeiten machen.

Nun wissen wir jedoch, daß die Wellen mit verschiedenen Indizes m, n auch verschiedene Geschwindigkeiten besitzen. Daraus folgt, daß eine Superposition zweier solcher Wellen keine sogenannte sich „ausbreitende“ Verteilung des Feldes

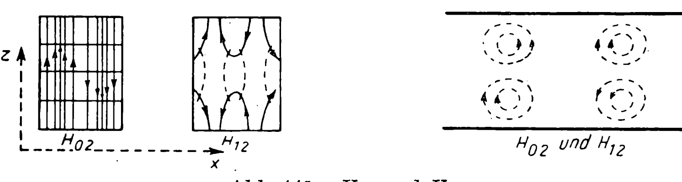


Abb. 441 H_{02} und H_{12}
Lage des Magnetfeldes

erzeugt, d. h. kein deformationsloses Ausbreiten von Querschnitt zu Querschnitt. Dagegen besitzen Wellen mit gleichen Indizes m, n auch gleiche Ausbreitungsgeschwindigkeiten, und die Linearkombinationen von H_{mn} und E_{mn} führen bei der Ausbreitung auf stabile Wellenstrukturen.

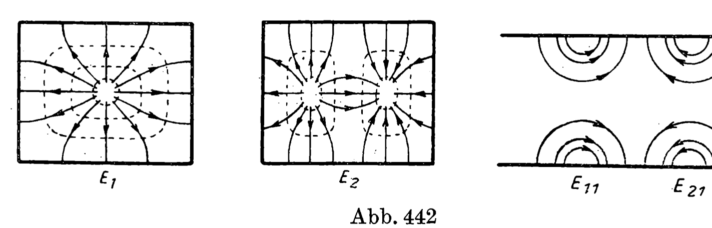
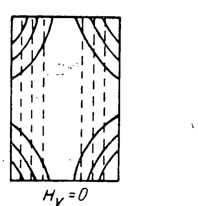


Abb. 442

Bei der Betrachtung des Beispiels einer H_{11}-Welle (Abb. 442) stellt man fest, daß diese nicht nur eine E_z-Komponente, sondern auch eine E_y-Komponente besitzt. Wir sehen und können auch nachweisen, daß diese E_y-Komponente die gleiche Form wie die E_y-Komponente der E_{11}-Welle besitzt (Abb. 442), wie verschieden die Komponenten E_z auch sein mögen.

Bei einer Linearkombination z. B. der Form $H_{11} - aE_{11}$, wobei a eine entsprechend gewählte Konstante ist, verschwindet die E_y-Komponente, und wir erhalten eine *E-Welle* in der Längsschnittebene mit den Komponenten E_x; E_z; $E_y = 0$ und H_x, H_y, H_z. Diese Betrachtung gilt für alle Wellen der Ordnung (m, n). Auf die gleiche Art kann man natürlich die entsprechende H-Welle des Längsquerschnittes bilden (Abb. 443).



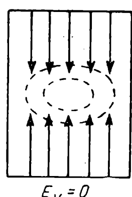


Abb. 443

Aussendung und Empfang der Wellen in einem Hohlleiter

Wir wollen nun die *Erzeugung* und die *Aufrechterhaltung* der eben betrachteten Wellen in einem Leiter untersuchen.

In Abb. 444 ist die Erzeugung von sich ausbreitenden H_{01}-, H_{11}- bzw. E_{11}- und E_{21}-Wellen dargestellt.

Es ist z. B. klar, daß das in Abb. 444a gezeigte ausgestrahlte Feld die geforderte Symmetrie besitzt, damit nach einer kurzen Anpassungsperiode das elektrische Feld E im Leiter völlig vertikal und das longitudinale magnetische Feld H_x, das auf der Achse Null ist, positiv oder austretend rechts von Ox und negativ oder eintretend links von Ox, wie die gestrichelten Kreise in Abb. 440 angeben. In der Abb. 444b, c und d sieht man die qualitative Möglichkeit zur Anpassung von durch Antennen ausgestrahlten Wellen an sich in der Röhre ausbreitende Felder. Die quantitativen Möglichkeiten einer solchen Anordnung waren Objekt einer allgemeinen

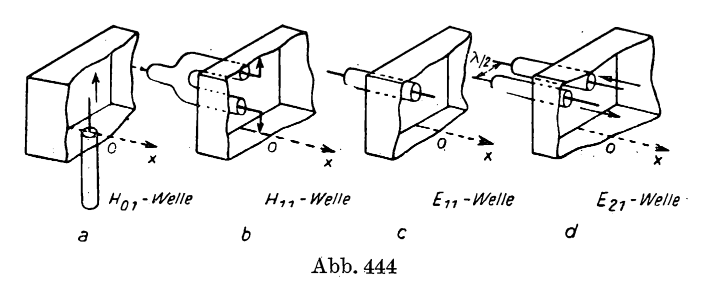


Abb. 444

mathematischen Abhandlung von SCHELKUNOFF, der gezeigt hat, daß als einzige Bedingung eine höhere Frequenz als die Grenzfrequenz des betrachteten Wellentyps notwendig ist.

An dieser Stelle soll gesagt werden, daß diese Grenzfrequenz die Frequenz ist, die einem Resonanzphänomen ohne Ausbreitung entlang Ox entspricht und die sich mit der dem betrachteten Wellentyp zukommenden Symmetrie zwischen den Wänden der Röhre einstellt. Die Wellenlängen im Vakuum, die diesen Grenzfrequenzen entsprechen, finden wir, wenn wir diese Resonanzen betrachten. Für die weiter oben betrachteten Wellen ergeben sich in einem quadratischen Hohlleiter mit der Kantenlänge a folgende Werte:

H_{01}-Welle	Grenzwellenlänge:	2,00 a (im Vakuum)
E_{11}- oder H_{11}-Welle		1,414 a
H_{20}-Welle		1,000 a
H_{12}- oder E_{12}-Welle		0,894 a

Diese Resultate gestatten umgekehrt, für Wellen gegebener Frequenz und gegebenen Typs die zur Ausbreitung erforderlichen Minimalabmessungen eines gegebenen Hohlleiters zu berechnen.

Zu einer vollständigen Darlegung der Hohlleitertechnik und ihrer vielfältigen Anwendungen wäre noch vieles zu sagen. Wir wollen uns jedoch im folgenden auf eine sehr kurze Betrachtung der Hauptelemente beschränken, die in Verbindung mit Hohlleitern eine allgemeine Anwendung gestatten.

Filteranordnungen

Mit Hilfe von Hohlraumresonatoren, deren Größe man durch bewegliche Kolben verändern kann, ist man in der Lage, Filter herzustellen, die Kopplung zu regeln usw.

In Abb. 445 ist eine Filterstrecke in einer Leitung dargestellt, während die Abb. 446 die Kopplung zweier Leitungen mit Hilfe eines Hohlraumresonators zeigt.

Die Dimensionen dieser Hohlraumresonatoren kann man nicht von vornherein einfach bestimmen, da die Ausbreitungsgeschwindigkeit in diesem Fall eine Funktion der Frequenz ist. Koppelt man jedoch Hohlleiter mit koaxialen Leitungen und bringt diese koaxialen Leitungen in Resonanz, wobei die Ausbreitungsgeschwindigkeit auf der Leitung $c = 3 \cdot 10^{10}$ cm/sec beträgt, so kann man durch Messung der Länge zwischen Knoten, Bäuchen usw. auf dieser Leitung direkt die Wellenlängen und die Frequenzen messen.

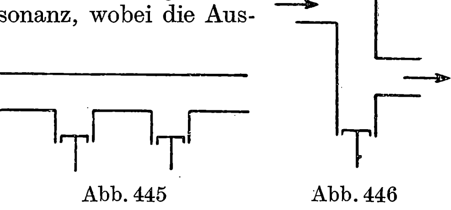


Abb. 445 Abb. 446

Eine koaxiale Leitung, in der eine H-Welle mit der Ordnung 1 läuft, ist in Abb. 447 dargestellt und in Abb. 448 eine mögliche Anordnung für eine H-Welle der Ordnung 0 (die Veränderung des Kraftflusses durch die Schleife ergibt die an-

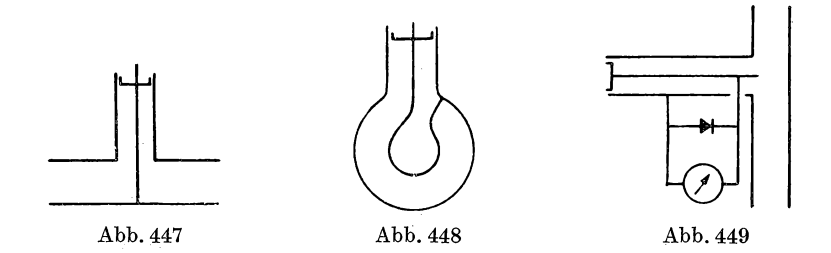


Abb. 447 Abb. 448 Abb. 449

fängliche elektromotorische Kraft). In Abb. 449 ist eine koaxiale Leitung regelbarer Länge mit einem Gleichrichterelement und einem Meßinstrument so geschaltet, daß die gesamte Anordnung als Wellenmesser verwendet werden kann.

Energieübertragung durch Schlitze

Dieses Phänomen wird durch die Abb. 450, 451, 452 eindeutig erklärt, so daß wir auf weitere Ausführungen verzichten können.

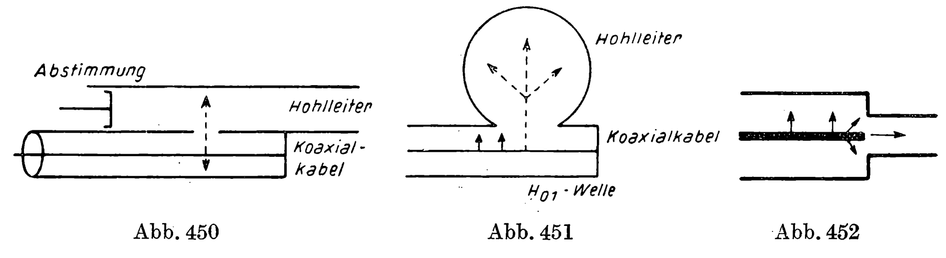


Abb. 450 Abb. 451 Abb. 452

Umwandlung eines Wellentyps in einen anderen

Zu dieser Umwandlung führen die verschiedensten Verfahren. Wir werden hier nur einen sehr wichtigen betrachten, der wegen des erreichten Wirkungsgrades von 100% von besonderem Interesse ist. Haben wir z. B. in einem runden Hohl-

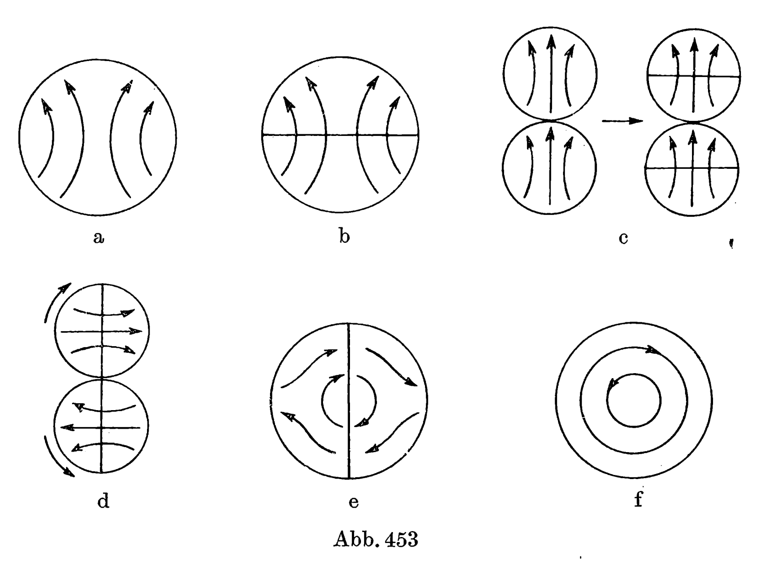


Abb. 453

a Elektrisches Feld der H_{11}-Welle im ursprünglichen Hohlleiter.

b Die Kraftlinien aus (*a*) werden durch Einsetzen einer metallischen Mittelebene nicht verändert.

c Wir kehren zu kreisförmigen Leitern zurück und wiederholen diese Operation. In jedem Leiterelement bleibt eine H_{11}-Welle bestehen.

d Die beiden Rohre werden mit ihren metallischen Mittelebenen um $\pi/2$ gedreht.

e Unter Beibehaltung der Mittelebene werden beide Leiter zusammengefaßt. Die Kraftlinien des elektrischen Feldes verlaufen in der angezeigten Richtung.

f Die Entfernung der Mittelebene läßt eine reine H_{01}-Welle auftreten.

leiter eine H_{11}-Welle in eine H_{01}-Welle umzuwandeln, so ist der gesamte Vorgang in seinem Ablauf in der Abb. 453 dargestellt.

Wenn es die Bedingungen für die Grenzfrequenz erfordern, kann es nötig sein, den Durchmesser des Hohlleiters während der Umwandlung zu verändern (speziell ihn zu vergrößern).

Anzeigeinstrumente

Um Wellen sehr hoher Frequenz (in der Größenordnung von 3000 MHz und mehr) in Hohlleitern nachzuweisen, werden Elemente mit sehr geringer Eigenkapazität benötigt. Man verwendet zu diesem Zweck Detektorkristalle, wobei man

die Gleichrichterwirkung einer metallischen Spitze auf einem kleinen Silizium- oder Germaniumkristall ausnutzt. Die Abb. 454 und 455 zeigen die technische Ausführung.

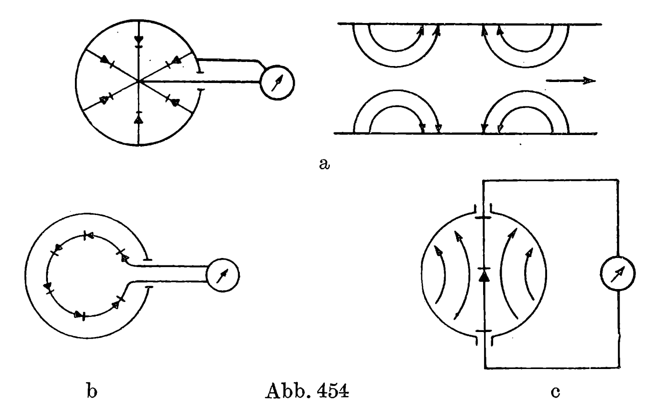


Abb. 454

a Nachweisnetz für eine E_{01}-Welle in einem runden Hohlleiter. (Diese Welle besitzt eine Radialsymmetrie, und man weist die Radialkomponente des elektrischen Feldes nach, das auch eine Longitudinalkomponente besitzt, wie die rechte Abbildung zeigt. Man kann sich leicht ein Nachweisnetz für diese Longitudinalkomponente vorstellen.)

b Die H_{01}-Welle in einem runden Hohlleiter besitzt ein elektrisches Feld, dem kreisförmige Kraftlinien entsprechen (Axialsymmetrie). Das dargestellte Nachweisnetz beruht auf dieser Eigenschaft. Ebensogut kann man auch den Kraftfluß der Longitudinalkomponente des Magnetfeldes durch die Schleife betrachten.

c Die bereits dargestellte H_{11}-Welle mit ihren elektrischen Kraftlinien kann man auch durch diese Anordnung nachweisen. Dabei müssen zwei Kapazitäten zur Verhinderung des Austritts der Hochfrequenz aus dem Hohlleiter vorgesehen werden.

Beispiel für den gleichzeitigen Nachweis zweier Wellen

Wir überlagern in einem Hohlleiter die beiden Wellen E_{01} und H_{01} und bringen im Leiter ein Nachweisnetz für die E_{01}-Welle an (Abb. 455). Dieses Netz ist ohne Einfluß auf die Ausbreitung des Feldes H_{01}. Dieses kann nun mit Hilfe des in Abb. 454b dargestellten Nachweisnetzes, das in der Nähe des ersten Netzes angeordnet wird, festgestellt werden. Durch einen verschiebbaren Kolben ist man in der Lage, für jeweils eine der beiden Wellen Resonanz einzustellen.

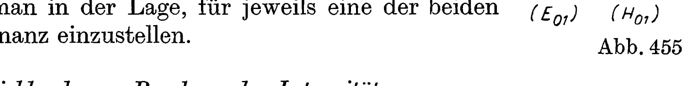


Abb. 455

Irisblende zur Regelung der Intensität

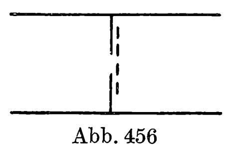


Abb. 456

Ebenso wie bei der Photographie die Intensität des Lichtes geregelt wird, kann man mit einer Irisblende die durch einen bestimmten Querschnitt tretende Energieintensität regeln. In den meisten Fällen führt jedoch die Anwendung einer solchen Blende zu einer komplizierteren Wellenstruktur. Zur Vermeidung dieses Effektes empfiehlt es sich, eine Irisblende nur zusammen mit Anordnungen zu verwenden, die entweder die nichtgewünschten Wellen absorbieren oder mit der betrachteten Welle in Resonanz stehen (Abb. 456).

Resonanz von Hohlräumen

a) Wir betrachten einen Hohlleiter, dessen beide Enden geschlossen sind, damit keine elektromagnetische Energie austreten kann. Er bildet auf diese Weise einen z.B. zylindrischen oder rechteckigen Hohlraum. Dieser Hohlraum besitzt elektromagnetische Eigenfrequenzen, die Resonanzbereichen bestimmter Wellentypen entsprechen, die man in diesem Hohlraum erzeugen kann. So kann man sich z.B. in einem Hohlraumparallelepiped a, b, c eine Verteilung des elektrischen Feldes E_z vorstellen, wie sie in Abb. 457 dargestellt ist und die einem Gesetz folgt, das die Grenzbedingungen befriedigt:

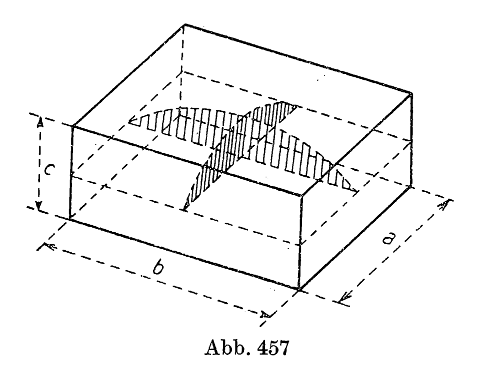


Abb. 457

$$E_z = E_0 \cos\frac{\pi x}{a} \cos\frac{\pi y}{b}.$$

Da die Gleichung

$$\frac{\partial^2 E_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 E_z}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 E_z}{\partial z^2} = -\frac{\omega^2}{c^2} E_z$$

befriedigt sein muß, sehen wir, daß die Bedingung

$$\frac{\pi^2}{a^2} + \frac{\pi^2}{b^2} = \frac{\omega^2}{c^2} = \frac{4\pi^2}{\lambda^2}$$

erfüllt sein muß. Daraus erhalten wir eine genau bestimmte Resonanzfrequenz, die als einzige die gewünschte Feldverteilung E_z erzeugt. Wir werden dann eine zweifach unendliche Folge von Resonanzfrequenzen finden, wobei wir den Verteilungstyp E_z beibehalten. In diesem Fall gilt allerdings

$$E_z = E_0 \cos\frac{n\pi y}{a} \cos\frac{m\pi y}{b}$$

und daraus folgend

$$\frac{\omega^2}{c^2} = \left(\frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2}\right)\pi^2.$$

Verzichtet man jedoch auf die Einschränkung, daß E entlang Oz verläuft, so erhält man weitere Resonanztypen mit anderen möglichen Resonanzfolgen.

Wir werden noch feststellen, daß die *Resonanzwellenlänge* vollständig durch die geometrischen Abmessungen des Hohlraums und den betrachteten Wellentyp bestimmt ist. Die *Resonanzfrequenz* dagegen hängt von c ab, d.h. von der Dielektrizitätskonstanten des den Hohlraum ausfüllenden Mediums.

b) Nun kann man die Güte eines solchen Hohlraumes untersuchen. Diese Güte Q ist der Größe $\frac{L\omega}{R}$ für einen Resonanzkreis analog und gibt die Anzahl der Perioden an, nach der die Amplitude einer freien Schwingung im Hohlraum auf den e-ten Teil abgenommen hat. Im allgemeinen hat man z.B. ein $Q = 100$ für einen Stromkreis, der aus Selbstinduktion, Kapazität und Widerstand besteht und für den Be-

reich der Mittelwellen konstruiert ist, sowie ein Q zwischen 1000 bis 2000 bei einer Stimmgabel (den Begriff der Güte dehnt man auch auf mechanische Vibrationen aus) und ein Q von 40000 für einen Quarz. Für einen Hohlraum kann man ohne Schwierigkeiten zeigen, daß die Güte in der Größenordnung des Ausdrucks $\frac{D}{\delta}$ liegt, wobei D die Breite des Hohlraums und δ die durch den Skin-Effekt gegebene Eindringtiefe in das Material des Hohlraums sind. Für höhere Frequenzen ist δ sehr klein, und man findet Güten von 10^5, 10^6 usw.

Verluste in Hohlräumen und Hohlleitern

Um das von uns gewünschte Ergebnis zu erzielen, betrachten wir einen Hohlraum mit elektromagnetischer Resonanz im Inneren. Die sich einstellende stehende Welle kann als Resultierende der Ausbreitung zweier ähnlicher, zueinander entgegengesetzt verlaufender Wellen angesehen werden (zur Vereinfachung stellen wir uns ein Parallelepiped vor). Ist die Energie dieser stehenden Welle gleichmäßig entlang der Abszisse verteilt, so tritt auf der Entfernung D eine gleichförmige Energiedichte auf (D ist wieder die Dimension des Hohlraums, vergrößert um den Faktor δ, die Eindringtiefe des Skin-Effektes in die Wand). Diese in die Wandung eintretende Energie wird jedoch absorbiert und wegen der Leitfähigkeit in Wärme umgewandelt. Unterbricht man jetzt die Aufrechterhaltung der elektromagnetischen Resonanz im Inneren, so sieht man, daß die Energiereserve auf der Entfernung D gerade D/δmal im Laufe der Schwingungen die in der Wand verlorene Energie erneuern kann. Mit anderen Worten, die Zeitkonstante τ liegt in der Größenordnung des D/δfachen der Periode. Man erhält den gleichen Faktor D/δ, wenn man das Verhältnis der rückwirkenden Energie zu der in Phase mit den Strömen befindlichen Energie betrachtet. Hat man also einen nur wenig von 1 verschiedenen Faktor, dann ist die Güte des Hohlraums durch den Ausdruck D/δ gegeben.

Dieses Resultat ist sehr interessant, da sich bei anwachsender Frequenz δ verringert, die Güte also bei konstantem D mit der Frequenz zunimmt. Es muß jedoch beachtet werden, daß sich nun der Resonanzbereich verändert, und der nicht berechnete Faktor, der mit D/δ zu multiplizieren ist, kann sich ebenfalls verändern. Macht man nun D gegenüber der Wellenlänge klein, so findet man, daß die Güte mit anwachsender Frequenz nach dem Gesetz $\frac{1}{\sqrt{\omega}}$ abnimmt. Die numerischen Resultate sind hier noch viel günstiger als das bei der Berechnung klassischer Stromkreise (für gleiche Frequenzen).

Nun betrachten wir die Ausbreitung in einem Hohlleiter. Für eine etwas oberhalb der Grenzfrequenz liegenden Frequenz breiten sich die Komponenten der ebenen Wellen durch Mehrfachreflexion an den Wänden aus, woraus ein großer Absorptionskoeffizient resultiert. Je höher die Frequenz ist, um so weniger Reflexionen würden stattfinden, und wir müssen mit einem Absorptionskoeffizienten rechnen, der mit steigender Frequenz anfangs sehr schnell und danach etwas langsamer abnimmt. Eine exakte mathematische Berechnung zeigt, daß dies genau dem Verlauf für eine H_{0n}-Welle entspricht. Für alle anderen Wellen ergibt sich

bei einer bestimmten Frequenz ein Minimum der Absorption, die danach mit zunehmender Frequenz wieder langsam ansteigt (Abb. 458).

Für alle E-Wellen beträgt die Frequenz der minimalen Absorption gerade $\sqrt{3}\,\omega_0$ (ω_0 ist dabei die Grenzfrequenz). Für H-Wellen ist die Frequenz unterschiedlich; so beträgt sie z. B. für die H_1-Welle $3{,}15\,\omega_0$.

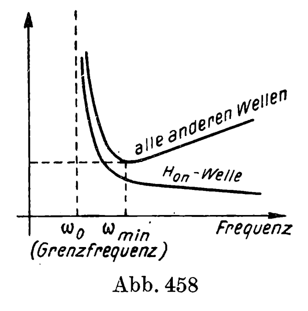


Abb. 458

Vergleichen wir jetzt die Absorption in einem Hohlleiter und in einem koaxialen Kabel gleicher Dimension (dabei seien die in einem solchen Kabel notwendigerweise auftretenden dielektrischen Verluste sogar vernachlässigt), so zeigt sich, daß bei genügend hohen Frequenzen die Absorption in dem koaxialen Kabel stärker ist. Dies gilt mit um so größerem Recht, wenn man die Verluste im Dielektrikum berücksichtigt, die bei sehr hohen Frequenzen noch stark anwachsen.

Wir wollen uns mit diesen Hinweisen begnügen.

Deformation eines Hohlleiters. Krümmung. Querschnittsveränderung

Im Prinzip findet man in allen diesen Fällen einen nachteiligen Einfluß auf die Wellenausbreitung. Betrachten wir z. B. einen runden zylindrischen Hohlleiter und deformieren ihn auf einem kurzen Stück so, daß er dort einen elliptischen Querschnitt aufweist. Tritt jetzt in diesen Leiterteil eine elektromagnetische Welle ein, so wird sie in zwei Wellen mit verschiedenen Ausbreitungsgeschwindigkeiten zerlegt. Im anschließenden runden Teil des Leiters treffen diese beiden Wellen nun mit verschiedenen Phasen wieder zusammen. Daraus folgt, daß nach der Wiedervereinigung der beiden Wellen zu zirkularen Wellen mehrere Wellentypen mit verschiedenen Ausbreitungsgeschwindigkeiten existieren. Die elektrischen und magnetischen Felder in einem Querschnitt breiten sich von dort an nicht mehr, wenigstens nicht mehr ohne Deformation, aus. Man spricht in diesem Fall, der der allgemeine ist, von der Welle als *„instabiler Welle"*. Wir sehen also, daß eine Störung, obwohl sehr klein und in einem Punkt eines Leiters lokalisiert, Störungen hervorruft, die a priori unbegrenzt sind und sich durch die Art ausdrücken, in der sich die Energie am Ausgang darstellt, d. h. im Scheinwiderstand des Hohlleiters. Tatsächlich ruft eine solche lokalisierte Störung eines Wellenleiters jedoch die Deformation einer Welle gegebener Länge nur in einer Entfernung hervor, die um so größer ist, je kleiner sie selbst ist.

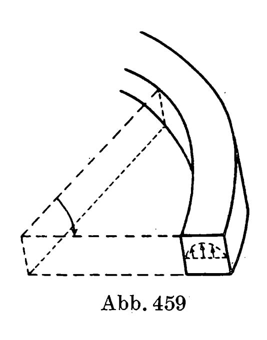


Abb. 459

Man muß daher Wellenstrukturen und Hohlleiter ohne Deformation untersuchen, die diese Unbequemlichkeit nicht aufweisen.

Glücklicherweise kann man zeigen, daß sich ein rechtwinkliger Hohlleiter in einer Richtung krümmen läßt, ohne eine Veränderung der Richtung des elektrischen Feldes der Welle zu erfordern. Es tritt also keine Instabilität auf. Um einen solchen Fall handelt es sich, wenn die anfangs beschriebene H_{01}-Welle sich in dem in Abb. 459 dargestellten gekrümmten Hohlleiter ausbreitet. Die mathe-

matische Behandlung dieser Vorgänge soll hier nicht betrachtet werden, sie bietet jedoch keine prinzipiellen Schwierigkeiten.

Anpassung durch Hornstrahler

Die Bemerkungen, zu denen wir eben gekommen sind, gestatten uns bereits, einen rechtwinkligen Hohlleiter, in dem sich eine H_{01}-Welle ausbreitet, mit einem sektorförmigen Verbreitungsstück zu verbinden, in dem sich ein elektrisches Feld, wie in Abb. 460 dargestellt, ausbreitet. Eine solche Verbreiterung nennt man *Hornstrahler*. Bei anderen Hornstrahlertypen tritt eine Veränderung des Wellentypes auf, die jedoch trotz allem auf eine bestimmte Verteilung des elektrischen Feldes im Austrittsquerschnitt hinausläuft. Daraus folgt die Kontinuität der Aus-

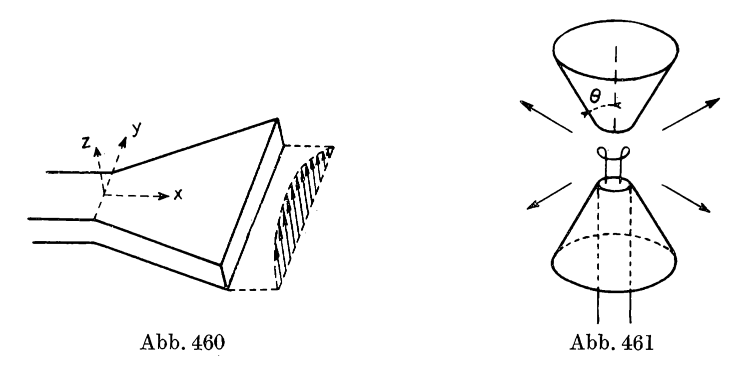


Abb. 460 Abb. 461

breitung in den Außenraum durch die Strahlung, die aus dem Hornstrahler heraustritt. Bei der Berechnung dieser Strahlung treten einige Schwierigkeiten auf. Es ist klar, daß die sich ausbreitende Energie beim Austritt aus dem Hornstrahler eine plötzliche Veränderung des Scheinwiderstands findet. Daraus resultiert eine bedeutende Reflexion *in das Innere* des Strahlers. Besitzt der Hornstrahler dagegen einen Austrittsquerschnitt, dessen Dimensionen groß gegenüber der Wellenlänge sind, so folgt daraus (wie bei jedem Strahlungsproblem mit nebeneinanderliegenden Quellen), daß die Energie in einem feinen Strahl gebündelt sein wird und der Strahlungswiderstand groß ist. In diesem Fall ist die von dem Hornstrahler herrührende *Dämpfung* ebenfalls groß. Die Annahme, daß die den Austrittsquerschnitt erreichende fortschreitende Welle nach außen abgestrahlt wird, ist also eine brauchbare Möglichkeit.

Zur Untersuchung dieser Strahlung benutzt man das Huygensche Prinzip, obgleich es diesem in der einfachen klassischen Form an Schärfe mangelt: Jedes Element dx des Austrittsquerschnittes entspricht einer kleinen Antenne, die in Phase mit den Antennen aller übrigen Elemente dx ausstrahlen würde. Die relative Verteilung auf jeder dieser angenommenen Antennen ist bekannt. Sie stimmt mit der des elektrischen Feldes (das als bekannt angenommen wird) in der Wellenfront überein. Um nun den Faktor zu finden, der die absolute Verteilung bestimmt, genügt es, über die gesamte ausgestrahlte Energie zu integrieren und diese der den Hornstrahler erreichenden Energie gleichzusetzen.

Auf diese Weise berechnet man die relativen Werte der Strahlungsdiagramme, die durch das Experiment gut bestätigt werden. Diese Bestätigung gilt auch für absolute Werte, wenn der Wirkungsgrad des Hornstrahlers fast 1 beträgt. Diese Diagramme sind übrigens denen sehr ähnlich, die sich bei einem Antennengitter vor dem gesamten Austrittsquerschnitt ergeben würden. Gegenüber diesen letzteren besitzen diese Hornstrahler gewisse Vorteile, da die Abschwächung des elektrischen Feldes an den Enden des Querschnitts und seine Verstärkung im Zentrum (im Fall einer einfachen, z.B. H_{01}-Welle) eine Verringerung der Wirkung der Nebenmaxima des Diagramms durch einen Effekt verursacht, der völlig geklärt ist und auch bei klassischen Antennengittern auftritt, wenn man die Speisung der Antennen gegen die Enden hin verringert.[1]) Siehe dazu auch das Diagramm der Richtantennen auf Seite 625.

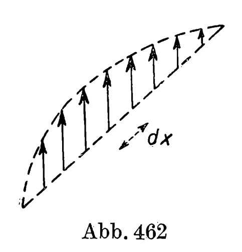


Abb. 462

Um diese Betrachtungen abzuschließen, weisen wir auf die Theorie der Abstrahlung durch Hornstrahler hin, die A. SCHELKUNOFF zum Thema einiger seiner Arbeiten wählte. Er behandelte besonders den Fall einer Abstrahlung durch zwei runde, kegelförmige Strahler (siehe Abb. 461). Für den Grenzfall (Winkel $\Theta = 0$) entwickelte er eine neue Antennentheorie, die von großer Bedeutung war.

Metallische Linsen

Wir betrachten die in Abb. 463a im Schnitt dargestellten konzentrischen Metalleiter. Eine von einer mehr oder weniger punktförmigen Quelle austretende elektromagnetische Strahlung trifft zwischen A und B auf eine Hohlleiteranordnung

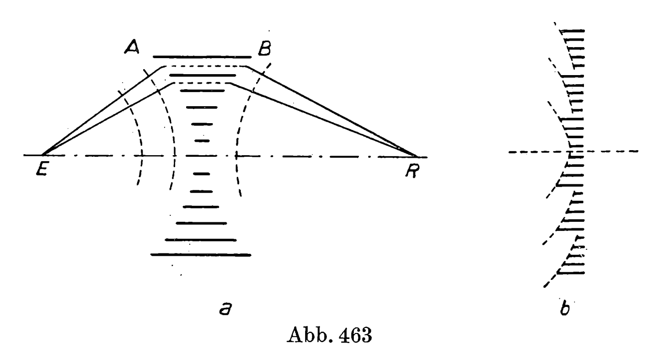


Abb. 463

und *breitet sich dort mit einer vergrößerten Phasengeschwindigkeit aus.* Daraus ergibt sich, daß die Krümmung der Wellenfront eine andere Form annehmen und sogar nach der anderen Seite verlaufen kann. Die Abb. 463a zeigt eine Sammellinse, die in R ein Bild von E erzeugt. Die Parallele zur optischen Sammellinse ist offen-

[1]) Ist die durch jedes Element abgestrahlte Intensität eine Funktion der Lage dieses Elementes, so kann man durch die Einführung einer weiteren Variablen das Strahlungsdiagramm in einem genügend großen Maß deformieren.

sichtlich. Bei Glaslinsen wissen wir indessen, daß sich das Licht im Glas weniger schnell ausbreitet und die Linse nach dem FERMATschen Prinzip im Zentrum dicker sein muß. In einer metallischen Linse ist es umgekehrt. Da sich die Strahlung in der Linse schneller ausbreitet, muß diese ihre größte Dicke am Rande aufweisen. Auf diese Weise erreicht man sowohl für die Randstrahlen als auch für den Strahl durch das Zentrum bei einer Ausbreitung von E nach R gleiche Zeiten.

In Abb. 463b ist der Schnitt durch eine nach dem Prinzip der FRESNELschen Linsen entwickelte *Stufenlinse* dargestellt.

Diese Anordnungen sind seit 1946–1947 bekannt.

Schlitzantennen. Dielektrische Antennen

Man kann weiterhin zeigen, daß die Schlitze in der Wand eines Hohlleiters ebenso strahlen, wie Antennen gleicher Dimensionen.[1]) Es ergibt sich eine große Vielfalt von Möglichkeiten, um Richtflächen für Ultrakurzwellen zu erhalten. Die geometrische Verteilung der Strahlung hängt einzig von der Form der Schlitze und den hier herrschenden Feldern ab. Die Berechnung der abgestrahlten Energie erfordert die Berücksichtigung des entsprechenden Strahlungsscheinwiderstandes (siehe auch im folgenden Kapitel) und seiner Rückwirkung auf die Ausbreitung im Hohlleiter. Im allgemeinen wird durch Symmetriebetrachtungen eine gute Näherung bereits erreicht.

Schließlich treten bei der Ausbreitung einer Welle in einem dielektrischen Stab ebenfalls Hohlleitereffekte auf, durch die eine Abstrahlung durch die Wände möglich ist. Diese Abstrahlung besitzt interessante Richteigenschaften, die zur Konstruktion von *dielektrischen Antennen* (siehe weiter unten, Kapitel VI) führten.

Anwendungen von Hohlleitern

Einzig für die Frequenzen in der Größenordnung von 1000 MHz ($\lambda = 30$ cm) und darüber bieten die Hohlleiter praktische Verwendungsmöglichkeiten bei vertretbaren Dimensionen. Sie werden in diesem Bereich an Stelle koaxialer Kabel verwendet, da diese wegen der hohen und mit der Frequenz noch steigenden Verluste praktisch unbrauchbar werden. Bei einer Wellenlänge von $\lambda = 50$ cm verliert z. B. ein Radargerät auf 15 m Koaxialkabel die Hälfte seiner Energie.

In der Zeit von 1939–1945 wurden bei Radargeräten mit Wellenlängen von $\lambda = 10$ cm Hohlleiter von etwa 30 m Länge zur Verbindung des Magnetronsenders mit den Antennen benutzt. Die Antennen wurden als Hornstrahler ausgebildet.

In der Praxis werden in der nächsten Zeit ohne Zweifel vielfältige Ausführungsformen für Verbindungen durch Hohlleiter entwickelt werden.

Hornstrahler, metallische Linsen usw. werden zur Bündelung großer Strahlungssysteme in einen Strahl mit dem Scheitelwinkel 2α benutzt, wobei

$$\sin\alpha = \frac{\lambda}{D}$$

gilt. Dabei ist D die Dimension des strahlenden Systems (siehe auch Seite 625).

---

[1]) Dies ist das aus der Optik bekannte BABINETsche Prinzip.

IV. KAPITEL

Strahlung. Beugung

Das retardierte Vektorpotential

Obwohl wir di e *Ausbreitung*, wenigstens die einer ebenen Welle, bereits untersucht haben, wissen wir jedoch selbst im einfachen Fall des HERTZschen Versuches noch nicht, wie die magnetischen Felder zu beschreiben sind, die durch Bewegungen von Ladungen in den Leitern verursacht werden. Wir haben jedoch bereits das magnetische Feld eines Stromes in einem beliebigen Punkt des Raumes mit Hilfe des *Vektorpotentials* berechnet:

$$\mathfrak{A} = \int \frac{i_{\text{el. magn.}}}{r} \, d\mathfrak{s}.$$

Dabei soll $\mathfrak{A}$ immer in elektromagnetischen Einheiten angegeben werden, d. h., wir werden es im weiteren (um immer in Gauß rechnen zu können) in der Form

$$\mathfrak{A}_{\text{el. magn.}} = \int \frac{i_{\text{el. stat.}}}{c\, r} \, d\mathfrak{s}$$

benutzen. Dabei ist $d\mathfrak{s}$ das Stromelement und r der Abstand zu dem Punkt, in dem das magnetische Feld berechnet werden soll.

Wenn wir zu diesem Vektorpotential den Begriff der Ausbreitung hinzufügen, so gibt uns die Beziehung

$$\mathfrak{H} = \operatorname{rot} \mathfrak{A}$$

ein elektromagnetisches Feld an, das sich effektiv ausbreitet. Wir nehmen nun an, daß der Generatorstrom, der in einem Antennenelement $l = ds$ (das von O ausgehend in Richtung Oz verläuft) gegeben sei zu $i(t)$, d. h., er ist eine Funktion der Zeit. Wollen wir nun das Vektorpotential in einem Punkt P in der Entfernung r zu einem Zeitpunkt t bestimmen, so betrachten wir den Strom zu einem früheren Zeitpunkt $t - \frac{r}{c}$ und nehmen an, daß er sich zwischen O und P mit der Geschwindigkeit c ausgebreitet hat.

In diesem Fall besitzt das Vektorpotential nur eine Komponente A_z, und wenn der Strom die Form

$$i = i_0 \, e^{j\omega t}$$

aufweist, ist diese in der Entfernung r gegeben zu

$$A_z = \frac{i_0 l}{c\, r} \, e^{j\omega\left(t - \frac{r}{c}\right)}.$$

Die Komponenten des magnetischen Feldes $\mathfrak{H} = \operatorname{rot} \mathfrak{A}$ lauten dann

$$H_x = \frac{\partial A_z}{\partial y}\,; \quad H_y = -\frac{\partial A_z}{\partial x}\,; \quad H_z = 0.$$

Die eben angestellten Betrachtungen wollen wir als korrekt *annehmen*. Tatsächlich kann man ohne Schwierigkeiten zeigen, daß wir durch sie auf eine Lösung der MAXWELLschen Gleichungen geführt werden. Diese Darstellungsweise wurde besonders von LORENTZ in seine Elektronentheorie übernommen.

Elektromagnetisches Strahlungsfeld

Berechnen wir die in der Rotation auftretenden Ableitungen, so ergeben sich für den Faktor $\frac{1}{r}$ von A_z die abgeleiteten Terme, z. B. in der Form

$$-\frac{1/r^2}{r/y} \quad \text{oder} \quad -\frac{y}{r^3},$$

die mit $\frac{1}{r^2}$ verschwinden. Der Faktor $e^{j\omega\left(t-\frac{r}{c}\right)}$ liefert dagegen die Terme

$$\frac{1}{r}\cdot\frac{y}{r}\,e^{j\omega\left(t-\frac{r}{c}\right)},$$

die nur mit $\frac{1}{r}$ verschwinden und für große r überwiegen.

Das durch die ersten Terme gegebene Feld H ist bereits bekannt. Es ist das durch das BIOT-SAVARTsche Gesetz beschriebene statische Magnetfeld. Die zweiten Terme bestimmen ein neues Feld H, das sogenannte *Strahlungsfeld*. Wie wir sehen werden, ist es nur bei großen r zu berücksichtigen und kann in der Nähe vernachlässigt werden, da das statische Feld dort überwiegt.

Zur Berechnung des Strahlungsfeldes genügt es also, die Ableitungen des Exponentialfaktors zu betrachten. Diese ergeben

$$H_x = -j\,\frac{\omega}{c^2}\,\frac{il}{r}\,e^{j\omega\left(t-\frac{r}{c}\right)}\cdot\frac{y}{r},$$

$$H_y = \frac{j\omega}{c^2}\,\frac{il}{r}\,e^{j\omega\left(t-\frac{r}{c}\right)}\cdot\frac{x}{r},$$

$$H_z = 0.$$

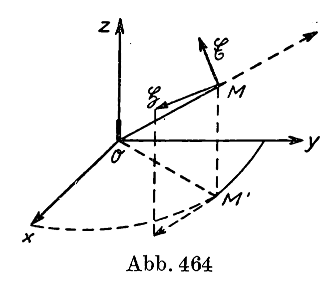


Abb. 464

Wir wollen nun das in Abb. 464 dargestellte Feld H im Punkt M berechnen. Dieses Feld verläuft parallel zu der Ebene xOy (senkrecht zu l) und steht senkrecht auf dem Vektor $\overrightarrow{OM}$. Numerisch erhalten wir

$$H = \frac{\omega}{c^2}\,\frac{i}{r}\,\frac{\sqrt{x^2+y^2}}{r},$$

da

$$\frac{\sqrt{x^2+y^2}}{r} = \frac{OM'}{OM} = \sin\Theta$$

folgt, wenn wir $\omega = \frac{2\pi c}{\lambda}$ (λ sei die ausgestrahlte Wellenlänge) annehmen:

$$H_{\text{Gauss}} = \frac{2\pi l i_{\text{el. stat.}}}{c\lambda r} \sin\Theta .$$

Dabei ist Θ der Winkel zwischen Oz und OM.

Da nach unserer Voraussetzung r groß sein soll, verhält sich die von O ausgehende Welle in ihrer Ausbreitung wie eine ebene Welle. Wir sehen dabei von der mit $\frac{1}{r}$ erfolgenden Amplitudenabnahme ab, die den allgemeinen Gesetzmäßigkeiten entspricht (diese werden besser und zweckmäßiger in einem Lehrbuch der Akustik besprochen). Daraus folgt, daß neben dem von uns gesuchten Feld H noch ein elektrisches Feld auftritt, das, in elektrostatischen Einheiten ausgedrückt, gerade gleich dem ersteren ist, wenn die Dielektrizitätskonstante gleich der des Vakuums ist. Dieses elektrische Feld steht senkrecht zu H und zu OM, liegt also in der Ebene zOM und hat den Wert

$$E_{\text{el. stat.}} = \frac{2\pi i l}{c\lambda r} \sin\Theta .$$

Im allgemeinen drückt man i in Ampere, H in Gauß und E in Volt pro Längeneinheit aus. Berücksichtigen wir noch, daß $\frac{i}{c}$ den Strom in elektromagnetischen Einheiten darstellt, d. h. nur $\frac{i}{10}$ des Wertes beträgt, wenn i in Ampere gerechnet wird, so finden wir

$$H = \frac{2\pi}{10} \frac{l i_{\text{Amp}}}{r\lambda} \sin\Theta$$

und

$$E_{\text{Volt/cm}} = \frac{30 \cdot 2\pi l i_{\text{Amp}}}{r\lambda} \sin\Theta .$$

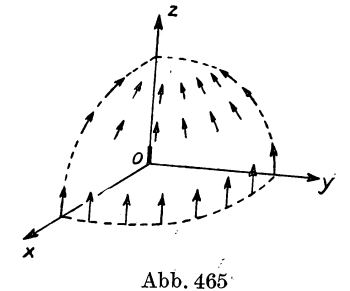


Abb. 465

Wir werden übrigens feststellen, daß diese Formeln auch für E in Volt pro Meter oder Volt pro Kilometer gelten, wenn wir nur l, r, λ entsprechend in Metern, Kilometern usw. angeben.

Mit Hilfe dieser sehr wichtigen Formeln sind wir in der Lage, das elektromagnetische Strahlungsfeld in großer Entfernung von der Antenne zu berechnen. Ebenso wichtig ist es, sich die räumliche Anordnung der Strahlungsfelder, besonders des elektrischen, vorzustellen. In Abb. 465 ist ein Antennenelement, von O aus in Richtung Oz verlaufend, dargestellt. Außerdem ist ein Kugeloktant mit dem Radius r eingezeichnet. In den auf diesem Oktanten liegenden Punkten ist das dort herrschende Feld durch Pfeile charakterisiert. Dieses Feld ist ein *Wechselfeld:* Es verändert nach jeder halben Periode seine Phase. Dagegen besitzt es jedoch eine zu $\sin\Theta$ proportionale Amplitude und verschwindet auf der Oz-Achse. *Eine geradlinige Antenne strahlt also nicht in ihrer Längsrichtung ab.* Außerdem ist das Feld in Richtung des auf die senkrecht zur Ausbreitungsrichtung gelegene Ebene projizierten Stromes *polarisiert.*

Verallgemeinerung der Formeln für reelle Antennen

Die gefundenen Formeln gelten nur, wenn die Länge l der Antenne so klein ist, daß die gesamte Strahlung in M in Phase ist.

Die Strahlungen des Antennenelementes dz in der Höhe z (Abb. 466) besitzen bei ihrer Ausbreitung gegen M einen Wegunterschied OX gegenüber den von O ausgehenden Strahlungen. Es gilt also

$$OX = z\cos\Theta .$$

Die angegebenen Formeln gelten also nur für unendlich kleine Antennenelemente dl genau, und das Strahlungsfeld einer geradlinigen Antenne in Richtung Θ ergibt sich als Summe der Strahlungsfelder ihrer einzelnen Elemente dl. Das Strahlungsfeld ergibt sich bei Berücksichtigung der Phase zu

$$E_{\text{Volt/cm}} = j e^{j\omega t} \frac{60\pi}{\lambda r} \sin\Theta \int_{-l/2}^{+l/2} i(z) e^{-j\omega\left(\frac{r - z\cos\Theta}{c}\right)} dz.$$

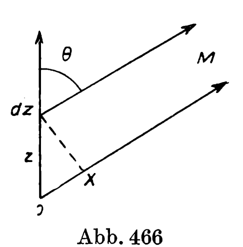


Abb. 466

Sehen wir von der allgemeinen Phase $e^{j\omega\left(t-\frac{r}{c}\right)}$ ab, so erhalten wir

$$E_{\text{Volt/cm}} = \frac{60\pi}{\lambda r} \sin\Theta \int_{-l/2}^{+l/2} i(z) e^{j\frac{2\pi z\cos\Theta}{\lambda}} dz.$$

Wenn die Dimensionen der betrachteten Antenne gegenüber λ nicht vernachlässigbar sind, werden die erhaltenen Resultate eine bedeutend kompliziertere Form besitzen. Wir haben bereits festgestellt, daß die Stromverteilung in einem Dipol gegeben ist durch

$$i(z) = I_0 \cos\frac{2\pi z}{\lambda}.$$

Mit dieser Verteilung können wir das Strahlungsfeld eines Dipols der Länge $l = \frac{\lambda}{2}$ berechnen zu

$$E = \frac{60\pi}{\lambda r} \sin\Theta\, I_0 \int_{-\lambda/4}^{+\lambda/4} \cos\frac{2\pi z}{\lambda} \left[\cos\left(\frac{2\pi z}{\lambda}\cos\Theta\right) + j\sin\left(\frac{2\pi z}{\lambda}\cos\Theta\right)\right] dz.$$

Aus Symmetriegründen ist der Imaginärteil dieses Integrals Null, und es bleibt

$$E = \frac{60}{r} I_0 \frac{\cos\left(\frac{\pi}{2}\cos\Theta\right)}{\sin\Theta}.$$

So ruft z. B. ein Strom mit der Amplitude I_0, der in der Mitte eines Dipols einen Wert von 1 Ampere besitzt, in einer Entfernung $r = 1$ km $= 1000$ m ein Strahlungsfeld in der zur Antenne senkrechten Ebene, d. h. wenn $\Theta = \frac{\pi}{2}$ ist, von

$$E = \frac{60\, I_0}{r} = 60 \text{ mV/m}$$

hervor.

Gute Vorstellungen über die Stromverteilung erhält man, wenn man annimmt, daß die Antenne durch eine induktiv mit dem Strahlungswiderstand gekoppelte Leitung dargestellt wird.

Strahlungswiderstand

Wir wollen nun die Formeln für das Strahlungsfeld in großer Entfernung suchen. Im ganzen Raum finden wir die Energiedichte zu

$$\frac{E^2}{4\pi} = \frac{\pi\, i^2 l^2}{c^2 \lambda^2 r^2} \sin^2 \Theta\,,$$

wenn E in elektrostatischen Einheiten gegeben ist. Dies entspricht einem Energiefluß von

$$\frac{c E^2}{4\pi} = \frac{\pi}{c} \frac{i^2 l^2}{\lambda^2 r^2} \sin^2 \Theta$$

pro cm² Oberfläche in der Entfernung r.

Den gesamten Energiefluß erhalten wir nach Integration über die gesamte Kugeloberfläche:

$$W = \frac{\pi}{c} \frac{i^2 l^2}{\lambda^2} \int_0^{\pi} \int_0^{2\pi} \frac{1}{r^2} \sin^2 \Theta\, r^2 \sin \Theta\, d\Theta\, d\varphi\,,$$

$$W = \frac{8\pi^2}{3c} \frac{i^2 l^2}{\lambda^2}\,.$$

Wenn wir jetzt

$$R_{\text{el. stat.}} = \frac{8\pi^2}{3c} \frac{l^2}{\lambda^2}$$

setzen, erhalten wir für die Energie die Form $R i^2$, R ist dabei der *Strahlungswiderstand*. Aus Gründen der Energieerhaltung ist tatsächlich notwendig, daß die Stromquelle, die den oszillierenden Strom I in der Antenne aufrechterhält, die Leistung $R I^2$ liefert, da diese Leistung durch die Strahlung abgegeben wird. Die Kopplung der Antenne mit dem unendlichen Raum macht sich also durch das Auftreten eines mit der Antenne in Reihe liegenden fiktiven Widerstandes R bemerkbar. Die in R verbrauchte Leistung wird von einem Beobachter, der von der Antenne nichts als den gemessenen Scheinwiderstand kennt, als JOULEsche Wärme interpretiert. Tatsächlich finden wir sie jedoch in der ausgestrahlten Welle wieder.

Befindet sich die Antenne in einem Raum, der die elektromagnetische Strahlung absorbiert, so finden wir diese schließlich als JOULEsche Wärme im Raum wieder.

Zur Bestimmung des Strahlungswiderstandes in Ohm muß der vorstehende Wert mit $9 \cdot 10^{11}$ multipliziert und $c = 3 \cdot 10^{10}$ eingesetzt werden:

$$R_\Omega = 80\,\pi^2 \left(\frac{l}{\lambda}\right)^2.$$

Dabei ist vorausgesetzt worden, daß die Stromstärke überall in der Antenne gleich und diese sehr klein gegenüber der Wellenlänge ist, wie dies der Fall bei einem *HERTZschen Resonator* ist, wo die beiden großen Endkapazitäten diese Bedingungen gewährleisten. Dies gilt jedoch nicht für die üblichen Antennen, da man bei der Berechnung ihres Strahlungswiderstandes von einer genauen Formel des Feldes E ausgehen muß.

Berechnen wir z. B. den Strahlungswiderstand eines Dipols der Länge $\frac{\lambda}{2}$, der in den freien Raum strahlt. Wir haben

$$W = \int \frac{c\,E^2}{4\pi}\, r^2\, 2\pi \sin\Theta\, d\Theta = 1800\, \overline{I_0^2} \int_0^\pi \cos^2\left(\frac{\pi}{2}\cos\Theta\right) \frac{d\Theta}{\sin\Theta} = R I_0^2,$$

wobei I_0 (der Strom in der Antenne) eine Funktion der Zeit ist. In dieser zweiten Formel setzen wir E in V/cm, I_0 in A ein und erhalten dann den Strahlungswiderstand direkt in Ω. Berechnen wir den numerischen Wert dieses (transzendenten) Integrals, so finden wir

$$R = 73 \text{ Ohm}.$$

Dieser Wert ist für alle bei Resonanz wirkenden Dipole charakteristisch und unabhängig von der Wellenlänge (man braucht nur zu beachten, daß die Länge l der halben Wellenlänge $\lambda/2$ angepaßt ist).

Wir wollen kurz noch *andere Anwendungen* angeben.

1. Eine vertikale Antenne wird in die leitende Erde gesteckt. Sie ist also in Resonanz, wenn ihre Länge l gerade $\lambda/4$ beträgt. Das Verhalten der Ströme in dieser Antenne ist das gleiche wie in einem Dipol der Länge $\lambda/2$ im freien Raum. Da die Strahlung jedoch nur in dem Raum oberhalb der Erdoberfläche auftreten kann, ist der Strahlungswiderstand nur *halb so groß* wie der des Dipols, obgleich das Strahlungsfeld in der Erde genauso groß ist.

2. Die Abstrahlungen zweier Antennen, die parallel angeordnet sind und von entgegengesetzt zueinander fließenden Strömen durchflossen werden, heben sich gegenseitig fast vollständig auf. In einer gegebenen Richtung OM verbleibt nur der Strahlungsanteil, der von der Wegdifferenz zwischen den Drähten und dem Punkt M herrührt. Die abgestrahlte Leistung $W = R I^2$ ist sehr klein; wenn also I sehr groß ist, muß R sehr klein sein.

Zur Übung führen wir jetzt die folgende Rechnung durch: Wir betrachten zwei Antennen $\pm I l$, die in der Entfernung $+\frac{d}{2}$ bzw. $-\frac{d}{2}$ von Ox und parallel zu Oz

angeordnet sind (Abb. 467). In dem durch die Winkel Θ und φ bestimmten Punkt M wollen wir das elektrische Feld E senkrecht zu OM bestimmen. Es hat den Wert

$$E = \frac{2\pi I l}{c\lambda r} \sin\Theta\, e^{j\omega\left(t - \frac{r + \sin\Theta \sin\varphi \frac{d}{2}}{c}\right)} - \frac{2\pi I l}{c\lambda r} \sin\Theta\, e^{j\omega\left(t - \frac{r - \sin\Theta \sin\varphi \frac{d}{2}}{c}\right)}.$$

Die Entfernungen zwischen M und den Zentren der beiden Antennen betragen

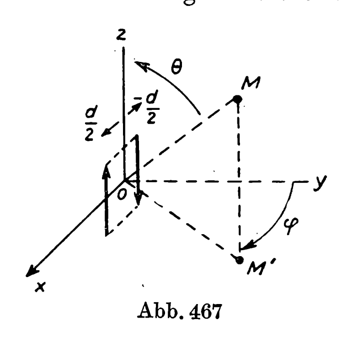


Abb. 467

$$r + \frac{d}{2} \sin\Theta \sin\varphi,$$

$$r - \frac{d}{2} \sin\Theta \sin\varphi.$$

Daher erhalten wir für das elektrische Feld

$$E = \frac{2\pi I l}{c\lambda r} e^{j\omega\left(t - \frac{r}{c}\right)} \sin\Theta \cdot 2j \sin\left(\frac{\omega d}{2c} \sin\Theta \sin\varphi\right).$$

Nehmen wir an, daß $d \ll \lambda$, d.h., es sei $\frac{\omega d}{2c} = \frac{\pi d}{\lambda}$ kleiner als 1, so kann der Wert des letzten Sinusgliedes mit seinem Bogen identifiziert werden. Wir können dann

$$E = \frac{4\pi^2}{c\lambda^2 r} I l d \sin^2\Theta \sin\varphi$$

schreiben und erhalten damit einen Strahlungsfluß von

$$\frac{cE^2}{4\pi} = \frac{4\pi^3}{\lambda^4 r^2} \frac{I^2 l^2 d^2}{c} \sin^4\Theta \sin^2\varphi$$

pro cm². Der Gesamtfluß in den freien Raum beträgt dann

$$\int \frac{cE^2}{4\pi} r^2 \sin\Theta\, d\Theta\, d\varphi = \frac{64}{15} \frac{\pi^4}{\lambda^4} \frac{I^2 l^2 d^2}{c}.$$

Der als Koeffizient von I^2 gegebene Strahlungswiderstand hat also den Wert

$$R = \frac{64}{15} \frac{\pi^4}{\lambda^4} \frac{l^2 d^2}{c} = \frac{8\pi^2}{3c} \frac{l^2}{\lambda} \left(\frac{8\pi^2}{5} \frac{d^2}{\lambda^2}\right).$$

Dieser stimmt mit dem für kurze Antennen gefundenen Wert nach Multiplikation mit $\frac{8\pi^2}{5} \frac{d^2}{\lambda^2}$ (kleiner als 1) überein.

Beziehen wir uns hier noch einmal auf unsere Betrachtungen der *Feeder* in Kapitel I, Seite 433, so erklärt diese letzte Formel, warum die Strahlung der Feeder (für die $d \longrightarrow 0$) vernachlässigt werden kann. Das obige Resultat kann natürlich

zu einer exakten Bestimmung des Strahlungswiderstandes eines Feeders benutzt werden.

3. Der Strahlungswiderstand aller Arten von Antennen (komplexe und Richtantennen) gehorcht, wie wir festgestellt haben, den gleichen Gesetzen. Eine etwas andere Rechnung erhalten wir, wenn wir mit Hilfe des POYNTINGschen Vektors das in einer gegebenen Entfernung als Funktion der ausgestrahlten Leistung aufgebaute Feld berechnen, während die Formeln dieses Kapitels die Berechnung des Feldes als Funktion des Stroms in der Antenne erlauben. Vergleichen wir beide Resultate miteinander, so finden wir eine Beziehung zwischen der abgestrahlten Leistung und dem Strom und sind dann in der Lage, den Strahlungswiderstand anzugeben.

Anwendung auf Elektronen. Beugungsprobleme

Alle Überlegungen, die wir für die durch einen Strom i in einer Antenne hervorgerufene Strahlung angestellt haben, lassen sich ohne weiteres auf den Fall einer mit der Geschwindigkeit v bewegten Ladung e übertragen, indem man die bekannte Gleichung $il = ev$ (siehe Kapitel „Elektronen") einführt. Man kann immer annehmen, daß v von der Form

$$v = v_0 e^{j\omega t}$$

ist, und man berechnet das durch die Bewegung der Ladung e hervorgerufene Vektorpotential, als wäre es von einem Wechselstrom

$$i = i_0 e^{j\omega t}$$

aufgebaut.

Wir wollen nicht die Formeln für ein mit der Geschwindigkeit v bewegtes Elektron aufstellen, sondern nur eine spezielle Anwendung für den wichtigen Fall angeben, daß das Elektron durch die Wirkung eines elektrischen Wechselfeldes der Form

$$E_1 = E_{10} e^{j\omega t}$$

bewegt wird. Als elektrisches Feld wählen wir z. B. das einer *einfallenden Lichtwelle*. Man kann leicht verstehen, daß das Elektron eine Geschwindigkeit proportional zu $e^{j\omega t}$ annehmen und entsprechend auf seinem Weg in alle Richtungen ein elektrisches Feld ausstrahlen wird, wobei letzteres sich ebenfalls mit $e^{j\omega t}$ verändert und mit $\frac{1}{r}$ abklingt. Diese Erscheinung wird *Beugung* genannt.

Wir bezeichnen mit m die Masse des Elektrons und mit e seine Ladung und nehmen an, daß es im Punkt O einer zur Entfernung r proportionalen Kraft Kr und einer viskosen Reibung $F\frac{dr}{dt}$ unterworfen sei. Letztere ist weiter unten explizite angegeben.

Die einfallende Welle breite sich z. B. entlang Oy aus und besitze ein in Richtung Oz polarisiertes elektrisches Feld mit dem Wert

$$E_1 = E_{10}\, e^{j\omega\left(t - \frac{y}{c}\right)}.$$

Im Punkt O ist $y = 0$ und $E_1 = E_{10}$. Die *Bewegungsgleichung des Elektrons* in z-Richtung lautet also

$$m\frac{d^2 z}{dt^2} + F\frac{dz}{dt} + Kz = eE_1 = eE_{10}e^{j\omega t}.$$

Tatsächlich ruft das Feld E_1 bei einer Wirkung auf die Ladung e die Kraft eE_1 hervor.

Für die stationäre Bewegung ergibt die Integration

$$z = \frac{eE_{10}e^{j\omega t}}{K - m\omega^2 + jF\omega}.$$

Daraus folgt

$$v = \frac{dz}{dt} = \frac{j\omega e E_{10}e^{j\omega t}}{K - m\omega^2 + jF\omega}.$$

Wir finden also schließlich

$$(ev)_{\text{el. stat.}} = \frac{j\omega e^2 E_{10}e^{j\omega t}}{K - m\omega^2 + jF\omega}.$$

Das Elektron strahlt also bei seiner Bewegung ein elektromagnetisches Feld ab, dessen elektrische Komponente in der Entfernung r und in einer beliebigen den Winkel Θ mit der Oz-Achse bildenden Richtung durch die Formel (1) gegeben ist:

$$E_{\text{el. stat.}} = \frac{2\pi\sin\Theta}{c\lambda r}(ev) \tag{1}$$

oder

$$E_{\text{el. stat.}} = \frac{\sin\Theta}{c^2 r}\,\frac{j\omega^2 e^2 E_{10}e^{j\omega t}}{K - m\omega^2 + jF\omega}. \tag{2}$$

Man sieht also, daß dieses Feld proportional zu $\omega^2 z$, also zu $\frac{d^2 z}{dt^2}$, ist. Daraus ergibt sich der folgende Satz: *Ein Elektron strahlt proportional zu seiner Beschleunigung.*

Die Gleichung (2) und die Existenz eines gleichen, senkrecht zu E stehenden magnetischen Feldes H definieren im gesamten Raum die *gebeugte Welle.*

Das Blau des Himmels

Wir betrachten nun ein Elektron, welches durch eine sehr große Kraft Kz gegen O bewegt wird. Diese Kraft sei bedeutend größer als die Trägheitskraft $m\frac{d^2 z}{dt^2}$ und die Reibungskraft $F\frac{dz}{dt}$. Es gilt also

$$K \gg m\omega^2 \quad \text{und} \quad K \gg F\omega.$$

Gleichung (2) liefert uns dann die gebeugte Welle $E \sim \omega^2 E_1$. Das elektrische Feld ist aber gerade der aus der Optik bekannte *Fresnelsche Lichtvektor*. Um die Intensität des Lichtes zu erhalten, bilden wir sein Quadrat und finden

$$I \sim \omega^4 E_1^2.$$

Dabei gibt E_1^2 die einfallende *Beleuchtungsstärke* an, und der Quotient $\frac{I}{E_1^2}$ ist als Maß für den Anteil der gebeugten Strahlung anzusehen. Wir sehen, daß sich in diesem Fall $\frac{I}{E_1^2}$ mit der vierten Potenz der Frequenz oder, auf die Wellenlänge bezogen, mit $\frac{1}{\lambda^4}$ verändert. Im Bereich des *sichtbaren Lichtes* werden also die kurzen Wellenlängen (die Wellenlänge des extremblauen Lichtes beträgt $\lambda = 4 \cdot 10^{-5}$ cm) gegenüber den anderen (rotes Licht: $\lambda = 8 \cdot 10^{-5}$ cm) verstärkt. *Läßt man weißes Licht einfallen, so erscheint das gebeugte Licht praktisch blau.* Dies ist gerade der Fall beim Sonnenlicht, welches auf die Moleküle der Luft fällt. Das Blau des Himmels ist also nichts anderes als das Ergebnis der Beugung des Sonnenlichtes an den Elektronen der verschiedenen in der Atmosphäre enthaltenen Moleküle.

Strahlungswiderstand eines Elektrons

Wir wollen nun den Energiefluß eines Strahlungsfeldes berechnen. Pro cm² des zu r senkrechten Querschnitts finden wir die Leistung

$$\frac{cE^2}{4\pi} = \frac{\sin^2\Theta\,\omega^4 e^4 E_{10}^2}{(4\pi c^3 r^2)\,[(K - m\omega^2)^2 + F^2\omega^2]} = \frac{\sin^2\Theta}{4\pi c^3 r^2}\, e^2\omega^2 \left(\frac{dz}{dt}\right)^2.$$

Wenn wir über alle Richtungen integrieren, so finden wir

$$W = \frac{\omega^2 e^2}{c^3}\left(\frac{dz}{dt}\right)^2 \int_0^\pi \frac{2\pi\sin^3\Theta}{4\pi}\, d\Theta = \frac{2}{3}\,\frac{\omega^2 e^2}{c^3}\left(\frac{dz}{dt}\right)^2. \tag{3}$$

Es ist klar, daß diese abgestrahlte Leistung von der einfallenden Welle geliefert werden muß oder, mit anderen Worten, das Feld E_1 verrichtet eine Arbeit, die der Verschiebung eines Elektrons entspricht. Nach der Bewegungsgleichung kann nur die in Phase mit der Geschwindigkeit befindliche Kraft $F\frac{dz}{dt}$ eine solche Arbeit verrichten. Tatsächlich wird während einer Sekunde die Leistung $F\frac{dz}{dt}\,dz$ abgegeben, so daß wir $F\left(\frac{dz}{dt}\right)^2$ erhalten. Setzt man dies in Gleichung (3) gleich, so erhält man

$$F = \frac{2}{3}\,\frac{\omega^2 e^2}{c^3}. \tag{4}$$

Dabei wird e in elektrostatischen Einheiten gemessen.

Dies ist der Strahlungswiderstand eines Elektrons. Es wäre besser, diesen Strahlungswiderstand als *Strahlungsreibung* zu bezeichnen, da es sich um einen

mechanischen Widerstand handelt. Auf diese Art wird das Auftreten eines Reibungsterms in der Bewegungsgleichung erklärt.

Wirkungsquerschnitt eines Elektrons bei der Beugung

Ein schwingendes Elektron entnimmt der einfallenden Strahlung die Leistung $\frac{2}{3}\frac{\omega^2 e^2}{c^3}\left(\frac{dz}{dt}\right)^2$. Nun hat die Leistung der einfallenden Strahlung die Form eines Energieflusses der Größe $\frac{cE_1^2}{4\pi}$ pro cm^2 Querschnitt senkrecht zur Einfallsrichtung. Man kann also auch sagen, daß das Elektron die gesamte Energie einer Fläche

$$S = \frac{\frac{2}{3}\frac{\omega^2 e^2}{c^3}\left(\frac{dz}{dt}\right)^2}{\left(\frac{cE_1^2}{4\pi}\right)} \text{ in cm}^2$$

aufnimmt.

Obgleich diese Art der Betrachtung sehr willkürlich ist, besitzt sie jedoch eine große Anschaulichkeit und wird allgemein benutzt.

Da wir $\frac{dz}{dt}$ kennen, können wir für S schreiben

$$S = \frac{8\pi}{3}\frac{\omega^4 e^4}{c^4}\frac{1}{(K - m\omega^2)^2 + F^2\omega^2}.$$

Setzen wir nun aus (4) den Wert für F ein, so finden wir schließlich

$$S = \frac{8\pi}{3}\frac{\frac{\omega^4 e^4}{c^4}}{(K - m\omega^2)^2 + \frac{4}{9}\frac{\omega^6 e^4}{c^6}} \text{ in cm}^2.$$

Für den Fall eines *freien Elektrons* wollen wir diese Formel jetzt numerisch berechnen. Dabei ist K Null, und wir sehen sofort, daß $m^2\omega^4$ sehr groß gegenüber $\frac{4}{9}\frac{\omega^6 e^4}{c^6}$ ist, und können also

$$S = \frac{8\pi}{3}\frac{e^4}{c^4 m^2}$$

in elektrostatischen Einheiten schreiben.

Die Ladung des Elektrons in elektromagnetischen Einheiten ist dabei $\frac{e}{c}$, d.h. $\frac{9649}{N}$, wobei N die LOSCHMIDTsche Zahl und 9649 das elektrochemische Äquivalent in elektromagnetischen Einheiten bedeuten; m hat den Wert $\frac{1}{1836\,N}$, da die Masse eines Elektrons 1836mal kleiner als die Masse eines Wasserstoffatoms ist. Daraus folgt

$$S = 0{,}663 \cdot 10^{-24} \text{ cm}^2.$$

In diese Rechnung wollen wir nun die Interpretation des Elektrons als kleine Kugel mit dem Radius $2 \cdot 10^{-13}$ cm einführen. Wir sehen, daß durch ein Elektron eine Fläche $\pi r^2 = 0{,}125 \cdot 10^{-24}$ cm² bedeckt wird und daß die Fläche S, auf der die einfallende Energie verschwinden muß (Abb. 468), den $\frac{0{,}663}{0{,}125} = 5{,}3$fachen Wert der tatsächlich bedeckten Fläche besitzt.

Die von der einfallenden Welle gelieferte Energie findet man selbstverständlich vollständig in der gebeugten Welle wieder.

Ein weiterer interessanter Fall ist die *Resonanz*, bei der eine Kraft K existiert, die gerade gleich $m\omega^2$ ist, d.h.

$$K - m\omega^2 = 0.$$

Der Wirkungsquerschnitt beträgt dann

$$S = \frac{8\pi}{3}\,\frac{c^2}{\omega^2} = \left(\frac{2}{3\pi^2}\right)\pi\lambda^2.$$

Diese Fläche ist *sehr groß*, und auch die der einfallenden Welle entnommene Energie ist daher beträchtlich. In der klassischen Physik kennt man keine Systeme, die der vorstehenden Theorie entsprechen. Es tritt jedoch eine Resonanz

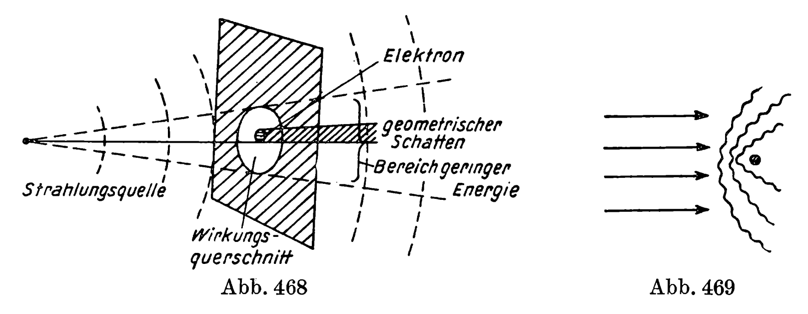


Abb. 468 Abb. 469

der elektronischen Bindungen in den Atomen mit der entsprechend gewählten Lichtfrequenz auf. Diese Energieübertragungen und Reemissionsvorgänge unterliegen jedoch den Gesetzen der *Quantentheorie* und werden in den entsprechenden Lehrbüchern behandelt.

Bei der KENNELLY-HEAVISIDE-Schicht in der oberen Atmosphäre (siehe weiter unten, Seite 636) handelt es sich um etwas Ähnliches: Die Elektronen sind *frei*; die Anwesenheit von positiven Ionen, die wegen ihrer Masse als quasi-unbeweglich angesehen werden, führt jedoch zu beträchtlichen Resonanzerscheinungen (siehe auch die Betrachtungen über das *Plasma*, Seite 586).

In keinem Fall hat übrigens die durch die Anwesenheit eines Elektrons verursachte Störung des elektrischen Feldes die einfache in Abb. 468 dargestellte Form. Die tatsächliche Störung erhält man durch Betrachtung des einfallenden sowie des gebeugten Feldes in jedem einzelnen Punkt. Dabei findet man ähnliche Beugungssäume, wie sie bei der Beugung einer Meereswelle an einem einzelnen Felsen (Abb. 469) auftreten. Je weiter man sich von dem Elektron entfernt, um so mehr verringert sich auch wegen der Abnahme der gebeugten Welle mit $1/r$ die Amplitude.

Wirkungsquerschnitt einer abgestimmten Dipolantenne

Im einfallenden Feld

$$E_1 = E_{10}\, e^{j\omega\left(t-\frac{y}{c}\right)},$$

das in Oz-Richtung polarisiert sei, befinde sich ein ebenfalls in Oz-Richtung liegender abgestimmter Dipol. Dieser Dipol gerät in Resonanz und wird dabei von einem Strom durchflossen, der leicht zu berechnen ist. Man kann ohne Schwierigkeiten das Feld längs eines Dipols mit der Länge $l = \lambda/2$ integrieren und erhält die auftretende Potentialdifferenz zu

$$V_1 = E_1 l = \frac{\lambda}{2} E_1.$$

Der Strahlungswiderstand des Dipols beträgt 73 Ω. Die Gleichung $U_1 = RI$ mit $R = 73\ \Omega$ liefert also den Strom I im Dipol. Nach der Definition von R hat dieser den Wert des Strombauches in der Mitte des Dipols. Kennen wir diesen Strom, so können wir leicht das auf seinem Weg durch die (unter der Wirkung des einfallenden Feldes strahlende) Antenne gebeugte Feld berechnen. Die Energie des gebeugten Feldes pro Sekunde hat den Wert

$$R I^2 \quad \text{oder} \quad \frac{U_1^2}{R} \quad \text{oder} \quad \frac{\lambda^2 E_1^2}{4R}.$$

Diese Leistung kann auch so interpretiert werden, als würde die pro Flächeneinheit senkrecht zur Ausbreitungsrichtung einfallende Leistung $\frac{cE_1^2}{4\pi}$ auf der als *Wirkungsquerschnitt* der Antenne (die mit $\lambda/2$ schwingt) definierten Fläche S verschwinden. Dieser Wirkungsquerschnitt hat, wenn man R in elektrostatischen Einheiten angibt, den Wert

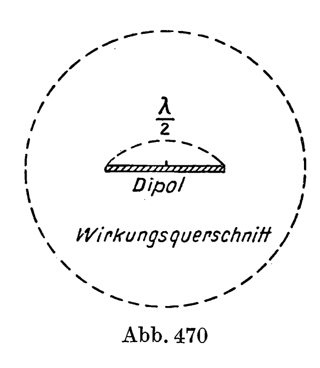


Abb. 470

$$S = \frac{\frac{\lambda^2 E_1^2}{4R}}{\frac{cE_1^2}{4\pi}} = \frac{\pi\lambda^2}{Rc} \text{ in cm}^2.$$

Setzt man darin $R = 73\ \Omega$, so findet man

$$S = \frac{\pi\lambda^2}{73\,c} \cdot 9 \cdot 10^{11} = \frac{30\pi}{73}\lambda^2 = \pi\,(0{,}65\,\lambda)^2.$$

In Abb. 470 ist gestrichelt der Wirkungsquerschnitt als Kreis mit dem Durchmesser $1{,}3\,\lambda$ dargestellt. Dieser Durchmesser wird kleiner, wenn die Antenne geneigt ist.

Beugung durch andere Objekte als abgestimmte Antennen

Wir werden bei unseren Betrachtungen für diese Fälle recht komplizierte Resultate finden. Wir wollen nicht noch einmal auf das Blau des Himmels eingehen, bei dem durch die enorme Menge der beteiligten Materie die Beugung sichtbar ist. Die Beugung ist nur dann von Bedeutung, wenn irgendwelche zusätzlichen Resonanzeffekte auftreten. In einigen speziellen Fällen kann man die Größenordnung der Effekte abschätzen.

Als Beispiel wollen wir n Elektronen betrachten, die miteinander in Phase schwingen und voneinander nur wenig entfernt sind, so daß ihre gebeugten Wellen in jedem Punkt in Phase sind. Daraus folgt, daß das gebeugte Feld gerade dem einer einzigen Ladung $n \cdot e$ entspricht. Die Intensität variiert also mit $n^2 e^2$, d.h., der Wirkungsquerschnitt der Energie beträgt das n^2-fache eines Elektrons. Man kann dieses Ergebnis auch in folgender Form ausdrücken: *Wir haben n Elektronen. Jedes von ihnen besitzt in diesem Falle einen n-mal so großen Wirkungsquerschnitt, als wäre es allein vorhanden.* Dies gilt besonders, wenn man n Elektronen in einem einzigen Molekül betrachtet, die gegenüber den Lichtwellen die vorausgesetzten Hypothesen erfüllen. (Tatsächlich liegen diese Elektronen in einem Bereich der Größenordnung von $2 \cdot 10^{-8}$ cm, während die Wellenlänge des Lichtes in der Größenordnung von $5000 \cdot 10^{-8}$ cm liegt.) Betrachten wir dagegen Elektronen, die zu verschiedenen sich voneinander unabhängig bewegenden Molekülen gehören, so stellen wir nach der Wellenbeugung fest, daß ihre Phasen in einem beliebigen Punkt M in keiner Beziehung zueinander stehen. Wenn wir jetzt mit E_0 die Amplitude jedes gebeugten Elementarfeldes bezeichnen, so erhalten wir die Gesamtamplitude in M zu

$$E = E_0 \sin(\omega t + \varphi_1) + E_0 \sin(\omega t + \varphi_2) + \cdots + E_0 \sin(\omega t + \varphi_n). \qquad (5)$$

Zur Bestimmung der Intensität quadrieren wir diesen Ausdruck und setzen die zeitlichen Mittelwerte ein:

$$\overline{E^2} = E_0^2 \left[\overline{\sin^2(\omega t + \varphi_1)} + \overline{\sin^2(\omega t + \varphi_2)} + \cdots + \overline{\sin^2(\omega t + \varphi_n)} \right.$$
$$\left. + 2\,\overline{\sin(\omega t + \varphi_1)\sin(\omega t + \varphi_2) + \cdots}\right].$$

Für jedes Quadrat des Sinus erhalten wir den Mittelwert $\frac{1}{2}$. Es sei $\frac{E_0}{2} = E_1^2$ der mittlere Wert des Quadrates des durch ein einziges Molekül hervorgerufenen Feldes, wogegen sich die Produkte der Sinus mit verschiedenen Phasen glücklicherweise im Mittel aufheben. Wir finden also

$$\overline{E^2} = n E_1^2.$$

Das ist aber gerade die gleiche Situation wie beim *Himmelsblau:* die gestreute Gesamtintensität ist die Summe der durch die einzelnen Moleküle gestreuten Intensitäten. Für jedes Molekül ist das gebeugte Feld die Summe der durch jedes der zum Molekül gehörenden Elektronen gebeugten Felder.

Wird der beugende Körper von Molekülen gebildet, die untereinander in ihren Bewegungen Wechselwirkungen ausgesetzt sind, durch welche eine Regelmäßig-

keit im Aufbau angestrebt wird (z. B. in einer Flüssigkeit oder noch besser in einem Kristall), dann wird sich die Summe (5) aufheben. Die Phasen sind mit einer Neigung zur Regularität verteilt, und man kann ohne Mühe zeigen, daß die Diffusion nur noch von *Dichteschwankungen* abhängt. Dies finden wir z. B. bei der Lichtdiffusion in Flüssigkeiten und Kristallen, wo dieses Phänomen sehr schwach und schwierig zu beobachten ist.

Nun erinnern wir uns an die HERTZschen Wellen. Beliebige Objekte, metallischer oder isolierender Natur, werden Anlaß zu einer Beugung geben: Die Metalle mit ihren freien Elektronen werden von induzierten Konvektionsströmen durchflossen, während die dielektrischen Isolatoren mit ihren polarisierbaren Molekülen oszillierende Verschiebungsströme zeigen. Diese Beugung wird genau in der gleichen Weise berechnet wie die an einem im Punkt O festgehaltenen Elektron, die wir bereits betrachtet haben. Dazu genügt es, das polarisierbare Molekül durch zwei Ladungen + und −, die sich von O nach entgegengesetzten Richtungen bewegen, und eine gleichgroße, entgegenwirkende Rückstellkraft zu charakterisieren. Wir werden sofort sehen, daß diese beiden Ladungen mit verschiedenen Vorzeichen und entgegengesetzten Geschwindigkeiten gleiche „Ströme" hervorrufen, so daß die Formeln mit denen für einen oszillierenden Strom oder ein einzelnes schwingendes Elektron identisch sind.

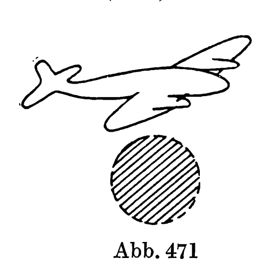


Abb. 471

Um die Größenordnung zu veranschaulichen, betrachten wir folgende Tatsache: Seit ungefähr 1934 ist bekannt, daß Flugzeuge in der Luft als Beugungszentren mit einer Intensität wirken, die etwa der von 10 abgestimmten Dipolen mit Wellenlängen zwischen 3 und 8 m vergleichbar ist.

In Abb. 471 sind ein Flugzeug von der Seite und sein Wirkungsquerschnitt dargestellt, um die Größenordnung zu zeigen.

In bestimmten günstigen Fällen ist die gebeugte Welle intensiv genug, um noch auf der Erde die Anwesenheit des Flugzeuges anzeigen zu können. Auf der Grundlage dieser Erscheinung hat man entsprechende Nachweisverfahren entwickelt.

Mit kürzeren Wellen und Hindernissen größerer Ausmaße kommt man vom Bereich der Beugung zu dem der Reflexion. So erhält man auf Schiffen z. B. von Klippen oder Eisbergen reflektierte Signale, die benutzt werden, um deren Lage nachzuweisen. Dies ist die sogenannte *Radartechnik*, die mit Wellenlängen zwischen 10 und 3 cm arbeitet. Bei dieser Gelegenheit wollen wir uns noch einmal daran erinnern, daß diese Technik zuerst von H. GUTTON und M. PONTE um 1934 in Frankreich entwickelt und auf dem Ozeandampfer „Normandie" erprobt wurde.

DAS FREIE ELEKTRON

I. KAPITEL

Das freie Elektron

Einführung des Elektrons durch die Gesetze der Elektrolyse

Im Jahre 1833 fand FARADAY die Gesetze der Elektrolyse: 96490 Coulomb befreien 1 Grammäquivalent. Dies erklärt sich, wenn die $6{,}02 \cdot 10^{23}$ negativen Ionen eines Grammäquivalents ($N = 6{,}02 \cdot 10^{23}$ ist die LOSCHMIDTsche Zahl) Träger einer gleichen Elementarladung

$$e = 4{,}802 \cdot 10^{-10} \quad \text{elektrostatische Einheiten}$$

oder

$$\frac{4{,}802 \cdot 10^{-10}}{2{,}998 \cdot 10^{10}} = 1{,}6017 \cdot 10^{-20} \quad \text{elektromagnetische Einheiten}$$

oder $1{,}6017 \cdot 10^{-19}$ Coulomb sind, da $1{,}6017 \cdot 10^{-19} \cdot 6{,}02 \cdot 10^{23}$ gerade 96490 Coulomb ergibt.

Sobald man den Wert der LOSCHMIDTschen Zahl gefunden hatte, konnte man sich eine klare Vorstellung von der elektrischen Elementarladung machen. Erst sehr viel später hat man festgestellt, daß diese Ladung, wenn sie negativ ist, mit einem Teilchen sehr geringer Masse, dem *Elektron*, verbunden ist. Die Masse dieses Elektrons beträgt den 1836. Teil der Masse eines Wasserstoffatoms.

Versuch von ROWLAND (1876)

Verschiebt man elektrische Ladungen, so beobachtet man das Auftreten eines magnetischen Feldes, das dem eines von einem Generator in einem festen Leiter erzeugten Strom entspricht.

Dies hat zuerst ROWLAND in seinen Experimenten gezeigt. Die von ihm benutzte Anordnung (Abb. 472) enthält zwei ebene Kondensatoren mit den runden Leitern A_1 und B_1 bzw. A_2 und B_2. Die Kondensatorplatten A_1 und A_2 sind auf einer Achse beweglich. Läßt man diese beiden Platten rotieren, so bewegen sich auch die auf ihnen enthaltenen Ladungen, während die von den festen Platten getragenen Ladungen unbewegt bleiben. (Die Resultate, die diese Hypothese vorherzusagen gestattet, stehen in Übereinstimmung mit den experimentellen Tatsachen.)

Abb. 472

Zwischen den festen Platten wird eine Magnetanordnung astatisch aufgehängt, um die sich zum Schutze von Luftströmen und elektrostatischen Influenzeffekten ein Käfig befindet (Abb. 472). Der obere Magnet ist so hoch angebracht, daß er nicht mehr unter der Wirkung des durch die Rotation der Platten hervorgerufenen Magnetfeldes steht.

Werden die Platten in Rotation versetzt, so kann man tatsächlich den Aufbau eines magnetischen Feldes beobachten. Durch die Messungen zeigt sich, daß das durch die Verschiebung der geladenen Leiter aufgebaute Magnetfeld mit dem durch die entsprechenden Ströme gleicher Ladung, die sich in einem festen Stromkreis mit der gleichen Geschwindigkeit verschieben, erzeugten identisch ist.

Wir werden also zu der Annahme geführt, daß *Leitungsströme Verschiebungen elektrisch geladener Teilchen im Inneren eines Leiters sind.* Diese geladenen Teilchen sind (wenigstens bei metallischen Leitern) *Elektronen.*

Magnetfeld durch bewegte geladene Teilchen

Alle Betrachtungen über das von einem bewegten Teilchen aufgebaute Feld, auch die Rückwirkungen des Feldes auf dieses Teilchen, führen uns wieder auf die klassischen Formeln von Ampère und Laplace (Abb. 473):

$$i\,dl = e\,v\,.$$

Dabei sind $i\,dl$ das Stromelement, das in diese Formeln eingeht, und v die Geschwindigkeit, mit der die Ladung verschoben wird. *Die Ladung wird hier in elektromagnetischen Einheiten oder in kohärenten elektromagnetischen Einheiten ausgedrückt* (i und e in elektromagnetischen Einheiten oder e in Coulomb und i in Ampere).

Der Strom i hat den Wert $\frac{dq}{dt}$, wobei dq die Ladungen darstellt, die in der Zeit dt durch den Leiterquerschnitt längs dl hindurchtreten. Diese Ladungen bewegen sich andererseits mit der mittleren Geschwindigkeit v. Wir wählen dt so, daß $\frac{dl}{dt} = v$ oder $dl = v\,dt$ folgt. Die entsprechenden Ladungen dq sind durch

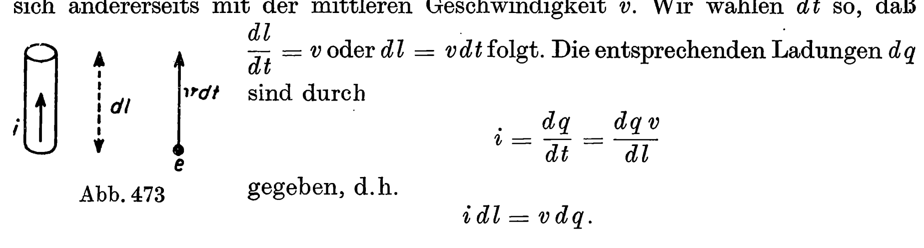


Abb. 473

$$i = \frac{dq}{dt} = \frac{dq\,v}{dl}$$

gegeben, d.h.

$$i\,dl = v\,dq\,.$$

Betrachten wir jetzt eine einzige Elementarladung $dq = e$, so sehen wir, daß ihre Verschiebung mit der Geschwindigkeit v dem Auftreten eines Stromelementes $i\,dl$ äquivalent ist. Wir dürfen also tatsächlich

$$i\,dl = e\,v$$

schreiben.

Das durch ein solches bewegtes Teilchen aufgebaute magnetische Feld hat die Form

$$H = \frac{i\,dl \sin\alpha}{r^2}.$$

Setzen wir jetzt $e\,v$ für $i\,d\,l$ ein, so ist

$$H = \frac{e\,v \sin\alpha}{r^2}.$$

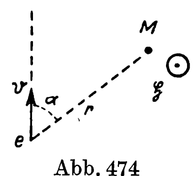


Abb. 474

Wir müssen bei allem beachten, daß die Ladung e eines Elektrons *negativ* ist. In dem in Abb. 474 angegebenen Fall ist das magnetische Feld in M durch einen zur Zeichenebene senkrechten Pfeil dargestellt.

Wirkung eines elektrischen Feldes auf ein geladenes Teilchen

Das elektrische Feld E übt auf ein Teilchen eine Kraft eE aus, die proportional seiner Ladung und *entlang des Feldes gerichtet* ist. Bezeichnen wir mit m die Masse des Teilchens, so finden wir eine durch das Fundamentalgesetz der Mechanik

$$e\mathfrak{E} = m\,\mathfrak{b} \tag{1}$$

gegebene Beschleunigung b.

Ist das Feld E zeitlich veränderlich, so kann man die Bewegung mit Hilfe der Gleichung (1) bestimmen. In dem *wichtigen Spezialfall* eines *konstanten* elektrischen Feldes, das man *von einem Potential V ableiten kann*, erhält man

$$E = -\frac{\partial V}{\partial n}$$

und nach Integration den Ausdruck

$$\frac{1}{2}\,m\,(v^2 - v_0^2) = e(V_0 - V); \tag{2}$$

v_0 ist dabei die Geschwindigkeit in dem Punkt, in dem das Potential V_0 beträgt, und v die Geschwindigkeit im Punkte mit dem Potential V.

Wir stellen fest, daß wir in allen Gleichungen e und E in einem System kohärenter Einheiten ausdrücken müssen. Wählen wir das mechanische CGS-System, so haben wir sowohl E als auch e beide in elektromagnetischen oder beide in elektrostatischen Einheiten einzusetzen. Werden E in V/m und e in Coulomb angegeben, so werden wir für die mechanischen Einheiten auf das MKS-System geführt und erhalten die Kraft eE in Großdyn oder Newton.

Nun betrachten wir einen Strom von *Elektronen*, der von einem als Ursprung des Potentials angenommenen Punkt mit der Geschwindigkeit Null ausgesandt wird. Ohne Berücksichtigung des Vorzeichens von e finden wir

$$\frac{1}{2}\,m\,v^2 = |e|\,V.$$

Diese Formel braucht jedoch nicht angewendet zu werden, wenn kein Potential vorhanden ist. Wächst ein magnetisches Feld H z. B. linear mit der Zeit an, so baut dieses immer ein zeitlich *konstantes* elektrisches Feld auf, dessen Rotation aber nicht Null ist:

$$\operatorname{rot} E = -\mu \frac{\partial H}{\partial t}.$$

Dieses Feld erzeugt die elektromotorische Induktionskraft und wird *nicht von einem Potential abgeleitet*, obgleich es sich durch eine elektromotorische Kraft *zwischen den beiden Klemmen eines Stromkreises* äußert.

Auch wenn die Potentialdifferenz von der Zeit abhängt, braucht diese Formel nicht angewendet zu werden. Wir betrachten als Beispiel eine Diode: Von der Kathode gehen Elektronen aus, und an die Anode seien eine konstante Potentialdifferenz V_0 und eine variable $V_1 \sin \omega t$ angelegt. Die Bewegung der Elektronen wird durch Gl. (1) und nicht mehr durch Gl. (2) bestimmt, welche in diesen extremen Fällen von den Versuchsergebnissen sehr abweichende Resultate liefert.

Die elektrostatische Ablenkung

In diesem Abschnitt wollen wir ein Elektron betrachten, das mit gleichförmiger Geschwindigkeit in das Feld parallel zu den Platten eines ebenen Kondensators eintritt, und untersuchen, wie seine Bewegung unter der Wirkung dieses

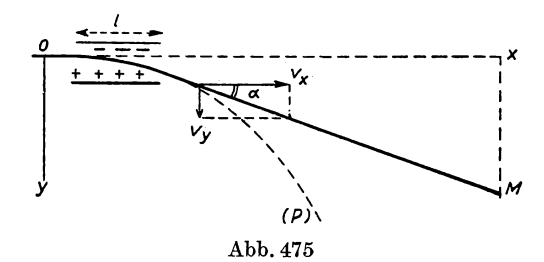


Abb. 475

Feldes erfolgt. Die Ox-Achse verlaufe in der anfänglichen Ausbreitungsrichtung, die Oy-Achse senkrecht dazu (Abb. 475).

Mit E wollen wir das zwischen den Platten des Kondensators herrschende Feld bezeichnen. Das Elektron weicht von seinem Weg ab, da es unter der Wirkung einer Kraft eE in Richtung Oy steht, die es entsprechend

$$eE = m \frac{d^2 y}{dt^2}$$

beschleunigt. Da E konstant ist, erhalten wir

$$m \left(\frac{dy}{dt}\right)_t - m \left(\frac{dy}{dt}\right)_0 = eEt;$$

$\left(\frac{dy}{dt}\right)$ ist Null beim Eintritt in den Kondensator. Die Geschwindigkeit $\frac{dy}{dt}$ im Kondensator wächst proportional mit der Zeit, während $\frac{dx}{dt}$ konstant ist. Der Weg ist also eine Parabel, wie sie auch beim horizontalen Wurf eines Steines im Schwerefeld der Erde auftritt.

Der Kondensator habe die Länge l, und das Elektron verlasse den Kondensator zur Zeit $t = \frac{l}{v}$, wobei v die konstante Geschwindigkeit $v_x = \frac{dx}{dt}$ in Richtung Ox ist. Zu diesem Zeitpunkt besitzt das Elektron eine Geschwindigkeit v_y:

$$v_y = \frac{eE}{m} t = \frac{e}{m} E \frac{l}{v} .$$

Es verläßt also die Parabel und bewegt sich tangential zu dieser weiter gegen einen bestimmten Punkt M auf einem Schirm. Sein Weg bildet mit der Achse Ox den Winkel α, die sogenannte *Ablenkung*. Für diese gilt

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{v_y}{v_x} = \frac{e}{m} \frac{El}{v^2} = \frac{eEl}{2\left(\frac{1}{2} m v^2\right)} = \frac{eEl}{2eU} .$$

Dabei ist U die Potentialdifferenz, durch die das Elektron auf die Geschwindigkeit v beschleunigt wurde. Ist U_1 die Potentialdifferenz zwischen den um h voneinander entfernten Kondensatorplatten, so gilt weiterhin

$$E = \frac{U_1}{h} \quad \text{und} \quad \operatorname{tg} \alpha = \frac{U_1}{U} \frac{l}{2h} .$$

Dabei ist bemerkenswert, daß dieser Ausdruck nicht mehr von dem Teilchen abhängt (weder von e noch von m). Wir finden also folgende wichtige Eigenschaft:

In einer rein elektrostatischen Anordnung, in der die Teilchen durch rein elektrische Felder beschleunigt und abgelenkt werden, sind die Wege aller Teilchen gleich und bleiben gleich, wenn alle Spannungen im gleichen Verhältnis verändert werden.

Diese Eigenschaft geht jedoch leider verloren, wenn man die Relativität berücksichtigt (Abhängigkeit der Masse von der Geschwindigkeit).

Anwendung: *Kathodenstrahloszillograph mit elektrostatischer Ablenkung* (Abb. 476)

Entsprechend den Erfahrungen bei der Thermoionenemission benutzt man eine kleine Nickelröhre, die mit Barium- und Strontiumoxyden bedeckt ist und eine so-

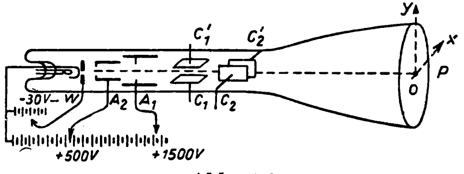


Abb. 476

genannte Oxydkathode bildet. Diese Kathode wird durch einen Wolframdraht geheizt, der sich im Inneren der Röhre befindet und durch eine feuerfeste Magnesiahülle isoliert ist. Vor dieser Kathode befindet sich eine Elektrode W, die sogenannte WEHNELT-Elektrode, die aus einer dünnen Scheibe mit einem Loch zum Begrenzen des Elektronenstrahles besteht. Diese Elektrode liegt auf einem regelbaren Potential und ist der Kathode gegenüber negativ geladen. Sie dient außer zur Begrenzung des Elektronenstrahls zur Steuerung seiner Intensität. Die *Hauptanode* A_1 liegt auf einer hohen Spannung (1500 V oder mehr, für einige spezielle Anwendungen sogar 20000–60000 V) und wird von einem zum Strahl konzentrischen Zylinder gebildet, der gegebenenfalls mit einer oder mehreren Blenden ausgerüstet ist. Durch seine Ladung zieht er Elektronen an und bildet den Strahl aus. Die Aufgabe besteht nun in der Fokussierung des Elektronenstrahls in einem Punkt P auf dem aus Zinksulfid bestehenden Leuchtschirm, auf dem die Blende der WEHNELT-Elektrode abgebildet werden soll. Dieser Leuchtschirm leuchtet unter der Wirkung der auftreffenden Elektronen durch Fluoreszenz auf. Zu diesem Zweck ist die Existenz wenigstens einer zweiten Anode A_2 notwendig, an der ein Hilfspotential von z.B. 500 V liegt, um die Wirkung einer *elektrostatischen Linse* zu erreichen (siehe weiter hinten „Elektronenoptik").

Die eben beschriebene Anordnung ist eine sogenannte *Elektronenquelle* und wird in allen Elektronenröhren, die mit feinen Strahlen arbeiten, verwendet (Ikonoskope und ähnliche, Klystrons und Röhren mit Geschwindigkeitsmodulation). In den üblichen Oszillographen fordert man von diesem Strahl nur eine Stärke von einigen Mikroampere. Würde man für den Strahl eine Stromstärke von einigen Milliampere auf einer Fläche vom $^1/_{10}$ mm^2 fordern, so ergäben sich bei der Fokussierung Schwierigkeiten, da sich die Elektronen wegen ihrer negativen Ladungen gegenseitig abstoßen würden. Man kann also nicht unbegrenzte Ladungsdichten fokussieren.

Um ein sichtbares Abbild der beobachteten Phänomene in Form von Kurven zu erhalten, muß der Punkt P auf dem Schirm F verschoben werden. Dazu benutzt man unter anderem die elektrostatische Ablenkung, die eine bequeme Lösung dieses Problems darstellt. Zu diesem Zweck schickt man den Strahl zuerst zwischen zwei Kondensatorplatten C_1 und C_1' hindurch, wo er durch eine an diesen liegende Spannung U_1 eine in Richtung Ox verlaufende Ablenkung erfährt, die proportional zu dieser Spannung ist. Dahinter befinden sich die Kondensatorplatten C_2 und C_2', zwischen denen der Strahl eine weitere, der an diesen Platten liegenden Spannung U_2 proportionale Ablenkung in Richtung Oy erhält.

Bei den üblichen Röhrenabmessungen erhält man Linearablenkungen auf dem Schirm von 1–2 mm pro Volt an den Ablenkplatten, wobei die Fokussierungsspannung in der Größenordnung von 1500 V liegt.

Nach den im vorigen Abschnitt angegebenen Bemerkungen *werden durch eine proportionale Veränderung aller Röhrenspannungen sowohl Fokussierung als auch Ablenkung nicht verändert*. Man kann nicht nur, man wünscht sogar alle Röhrenspannungen einer einzigen Stromquelle zu entnehmen. So verwendet man z.B. gleichgerichteten Wechselstrom zur Speisung und kann auch den Kathodenstrahloszillographen mit Wechselstrom betreiben. (Die weiter hinten behandelte Relativitätskorrektur ist bisher nicht berücksichtigt worden).

In den meisten Fällen will man den zeitlichen Verlauf eines elektrischen Vorganges untersuchen. Das Phänomen möge die Spannung U_2 und eine Ab-

lenkung in Oy-Richtung liefern. Die Ablenkung Ox muß also proportional mit der Zeit anwachsen, dann plötzlich zurückgehen und dann wieder anzuwachsen beginnen. Die entsprechende Spannung U_1 nennt man *Kippspannung* (siehe Abb. 477). Dabei ist τ die sehr kleine Zeit, in der die Spannung wieder auf Null zurückkehrt. Man findet eine solche Spannung an den Klemmen eines über einen Widerstand geladenen Kondensators. Dies gilt wenigstens für den ersten Teil des Anstiegs der Aufladungskurve, wo die exponentielle Kurve mit ihrer Tangente übereinstimmt. Danach ist es dann nötig, den scharfen Abfall der Spannung, d.h. die plötzliche Entladung des Kondensators, zu sichern. Eine der einfach-

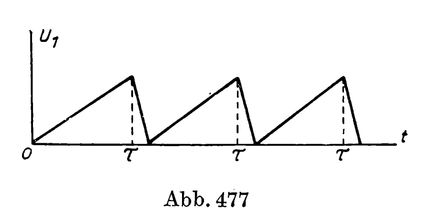


Abb. 477

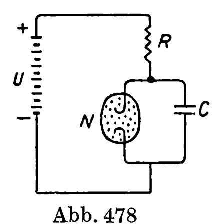


Abb. 478

sten Methoden ist die Verwendung einer Glimmlampe mit Neonfüllung, die immer dann den Kondensator entlädt, wenn dieser ihre Zündspannung (z.B. 110 V) erreicht hat (Abb. 478). In der Neonlampe entsteht eine Entladung mit *negativer Charakteristik*, und die Spannung fällt während einer kurzen Zeit (einige 10^{-6} sec), in der die Ladung des Kondensators C abfließt, stark ab (z.B. 50 V). Der bis auf 50 V entladene Kondensator kann die erforderliche Brennspannung nicht mehr liefern, so daß die Glimmlampe erlischt, d.h., sie wirkt wieder als Isolator. Dadurch wird der Kondensator C erneut über den Widerstand aufgeladen. Der zu betrachtende Vorgang liegt also immer im Bereich zwischen der Zündspannung (110 V) und der Löschspannung der Lampe (50 V) (Abb. 479). Dies ist ein Beispiel für eine *Relaxationsschwingung* mit einer Periode T, welche gerade gleich der leicht zu berechnenden Zeit ist, in der die Spannung U den Kondensator C über den Widerstand R von 50 V auf 110 V auflädt. Die Schwingung ist nicht mit einer Pendelschwingung zu vergleichen.

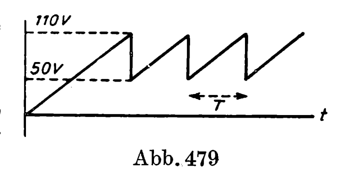


Abb. 479

Die Technik kennt eine große Anzahl von Varianten und Verbesserungen für Aufbauten dieser Art.

In anderen Fällen ist man daran interessiert, Lissajoussche Figuren zu erhalten. Dies erreicht man sehr leicht, indem man auf die beiden Systeme der Ablenkplatten die beiden Spannungskomponenten aufbringt.

Es ist schließlich noch zu bemerken, daß wir die Intensität des Lichtpunktes nach Belieben verändern können, indem wir an die Wehnelt-Elektrode eine mehr oder weniger negative Spannung legen. Dadurch können wir auf einem Oszillographenschirm *deutliche Bilder* erzeugen. Dazu wird ein *Zeilenkipp* durch eine sägezahnförmige Spannung U_1 erzeugt, während diese Zeilen durch eine zweite derartige Spannung U_2, die jedoch weniger oft kippt, entlang Oy verschoben wer-

den. (Kippt erstere Spannung 800 mal so oft wie die zweite, so erhalten wir 800 Zeilen pro Bild.) Wiederholt sich die Sägezahnkurve 25- oder 50 mal pro Sekunde, so erhält man 25 oder 50 Bilder pro Sekunde. Wird nun die WEHNELT-Elektrode durch eine von der Helligkeit der einzelnen Punkte des Objektes abhängige Spannung moduliert, so liefert sie ein deutliches Bild des Objektes. Dies ist das Prinzip der Bildwiedergabe beim Fernsehen auf dem Schirm eines Kathodenstrahloszillographen.

Die große Übertragungsgeschwindigkeit der Signale ist unbedingt erforderlich. Will man ein quadratisches Bild mit gleicher Güte in Ox- und Oy-Richtung erhalten, so muß dieses Bild bei 800 Zeilen 800 Punkte pro Zeile aufweisen, d. h., das Signal muß von schwarz auf weiß – vom Minimum auf das Maximum – verändert werden in einer Zeit, die beträgt:

$\frac{1}{800}$ der Zeit, die zur Übertragung einer Zeile zur Verfügung steht, d. h.

$\frac{1}{800 \cdot 800}$ der Zeit, die zur Übertragung eines Bildes zur Verfügung steht, d. h.

$\frac{1}{800 \cdot 800 \cdot 25}$ einer Sekunde, wenn 25 Bilder pro Sekunde erscheinen, d. h. gerade $\frac{1}{16}$ Mikrosekunde.

Diese hohe Geschwindigkeit ist eine der in der Fernsehtechnik auftretenden Schwierigkeiten.

Wirkung eines zeitlich konstanten Magnetfeldes auf ein geladenes Teilchen

Ein magnetisches Induktionsfeld $B(x, y, z)$, das sich *zeitlich nicht verändert*, übt auf ein Teilchen e mit der Masse m eine Kraft aus, die *proportional* zu dessen Geschwindigkeit v und *immer senkrecht* auf der durch die Geschwindigkeit und das Feld aufgespannten Ebene ist. Diese Kraft überträgt dem Teilchen keine größere Energie, sondern lenkt es nur ab. Für die Kraft gilt

$$\mathfrak{K} = e\mathfrak{v} \times \mathfrak{B}.$$

Dabei sind e in elektromagnetischen Einheiten, B in Gauß und v und K in CGS-Einheiten einzusetzen. Tatsächlich ergibt sich dieser Ausdruck aus dem LAPLACEschen Gesetz durch die Gleichsetzung $i\,dl = ev$.

Die Komponenten der Kraft in Richtung der Koordinatenachsen (linksdrehendes System) lauten:

$$K_x = e(v_y B_z - v_z B_y),$$
$$K_y = e(v_z B_x - v_x B_z),$$
$$K_z = e(v_x B_y - v_y B_x).$$

In Abb. 480 bewegt sich ein *Elektron* (negative Ladung) mit einer *konstanten Geschwindigkeit* v entlang $O\,y$. Parallel zu $O\,x$ existiert von der Ebene $x O\,y$ aus ein Feld B. Die Rotation von v um das Feld B ist ein gegen negative Oz gerichteter Vektor (AMPÈREsche Regel). Da jedoch der Faktor e negativ ist, muß die Kraft in O gegen positive z gerichtet sein. Der Weg des Elektrons bleibt in der Ebene $y O z$ und wird nach oben abgelenkt.

Die Tangentialbeschleunigung bleibt immer Null, d. h., die Bewegung bleibt auch auf dem neuen Weg gleichförmig. Die Normalbeschleunigung auf diesem Weg ist gegeben zu

$$B_n = \frac{e\,v\,B}{m} = \frac{v^2}{\varrho},$$

wenn v und B senkrecht zueinander bleiben und ϱ der *Krümmungsradius* der Bahn ist.

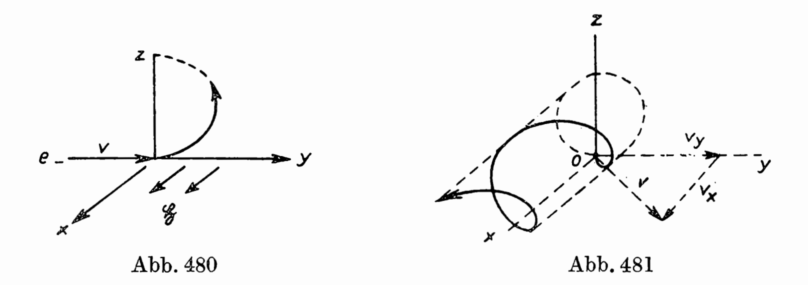


Abb. 480 Abb. 481

Ist kein elektrisches Feld vorhanden, das die Geschwindigkeit v verändern könnte, so ist die Bahn ein *Kreis*, wenn B *gleichförmig* ist. Der Radius dieses Kreises beträgt

$$\varrho = \frac{m\,v}{e\,B}.$$

Besitzt die Anfangsgeschwindigkeit eine Komponente v_x parallel zum Feld B, so verursacht diese Komponente keine Wirkung, d. h., das Vektorprodukt $\mathfrak{v}_x \times \mathfrak{B}$ ist Null, und es tritt keine neue Kraft auf. Der tatsächliche Weg ist also eine Schraubenlinie mit einer zu $O\,x$ parallelen Achse, die mit der gleichförmigen Geschwindigkeit v_x durchlaufen wird. Die Projektion dieser Schraubenlinie auf die $y O z$-Ebene ergibt also einen Kreis (Abb. 481). Ist die Bewegung des Elektrons langsam, so besitzt die Schraubenlinie um die Kraftlinie einen sehr kleinen Durchmesser. Hierbei handelt es sich um das Prinzip der *magnetischen Fokussierung*, das in der Fernsehtechnik (siehe Seite 545) ausgenutzt wird.

Die gyromagnetische Frequenz

Wir wollen mit T die Umlaufperiode des auf diesen Kreis projizierten Elektrons bezeichnen. Damit ist $n = 1/T$ die entsprechende Frequenz. Es wird sich

herausstellen, *daß n ein Charakteristikum des Feldes und des Teilchens ist und nicht von der Geschwindigkeit des Teilchens abhängt.* Tatsächlich gilt

$$n \cdot 2\pi \varrho = v_y$$

mit

$$\varrho = \frac{m v_y}{e B}.$$

Der Ausdruck

$$n = \frac{e B}{2\pi m}$$

wird dann *gyromagnetische Frequenz* genannt.

Für ein Elektron $\left(\frac{e}{m} = 1{,}80 \cdot 10^7 \text{ elektromagnetische Einheiten}\right)$ rechnet man ungefähr 3 Megahertz pro Gauß, d. h., bei einer elektromagnetischen Wellenlänge entsprechen 100 m 1 Gauß.

Magnetische Ablenkung

Wird der entlang $O\,y$ verlaufende Elektronenstrahl nur auf einem kurzen Weg l einem Magnetfeld unterworfen, so wird er abgelenkt und verläuft dann geradlinig weiter (Abb. 482).

Es gilt dann

$$\alpha = \frac{l}{\varrho} = \frac{e B}{m v},$$

wobei α der Winkel der Ablenkung ist.

Für konstante e, m und B geht diese Ablenkung mit $\frac{1}{v}$ und nicht mit $\frac{1}{v^2}$ wie die elektrostatische Ablenkung. Daraus ergibt sich eine wichtige Schlußfolgerung:

Schnelle Elektronen werden in einem magnetischen Feld stärker als in einem elektrischen Feld abgelenkt.

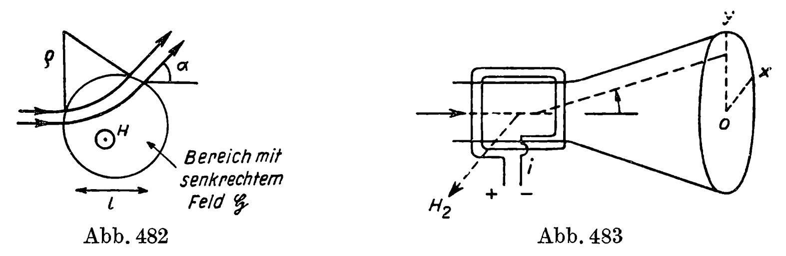


Abb. 482 Abb. 483

Die magnetische Ablenkung wird z. B. in Kathodenstrahloszillographen ausgenutzt. Dazu wird eine Ablenkungsspule D um die Wandung der Röhre angebracht (in der Praxis verwendet man meist zwei solcher Spulen). Diese Anordnung arbeitet mit einem gleichförmigen Feld. Wird die Spule, wie es in Abb. 483 gezeigt ist, von einem Strom i durchflossen, so wird der von links einfallende Elektronenstrahl nach oben abgelenkt.

Prinzip des Massenspektrographen

Wir betrachten eine Teilchenquelle, von der in Richtung Ox geladene Partikeln mit verschiedenen Massen und verschiedenen Geschwindigkeiten ausgesandt werden (Abb. 484). Diese Teilchen werden zuerst im Bereich E einer elektrostatischen Ablenkung durch ein elektrisches Feld zwischen zwei Kondensatorplatten unterworfen. Die Teilchen mit einem bestimmten Verhältnis e/m werden, wenn ihre Geschwindigkeit klein ist, in den Strahl v_1 und, wenn diese groß ist, in den Strahl v_2 abgelenkt. Wir unterwerfen nun diese Teilchen im Bereich H durch ein zur Zeichenebene senkrecht stehendes (nicht dargestelltes) Magnetfeld einer magnetischen Ablenkung. Dabei werden die schnellen Teilchen weniger abgelenkt als die langsameren. Beide Strahlen treffen sich dadurch im Punkte P. Durch eine entsprechend gute Apparatur ist es möglich, alle Teilchen mit gleichem Verhältnis e/m, unabhängig von ihrer Geschwindigkeit, im Punkt P zu fokussieren. Sind Teilchen mit verschiedenen Werten von e/m im Strahl vorhanden, so finden wir an Stelle des Punktes P auf dem Schirm eine Gerade. Bringen wir an Stelle des Schirms eine photographische Platte an, so erhalten wir den *Massenspektrographen*, wie er von Aston erstmalig entwickelt wurde. Mit diesem Massenspektrographen war es möglich, die Atommassen verschiedener Isotope genau zu bestimmen. Es gelang z. B. mit seiner Verwendung, eine große Anzahl von Isotopen zu entdecken und in großen Anlagen die beiden wichtigsten Uranisotope U^{235} und U^{238} quantitativ zu trennen.

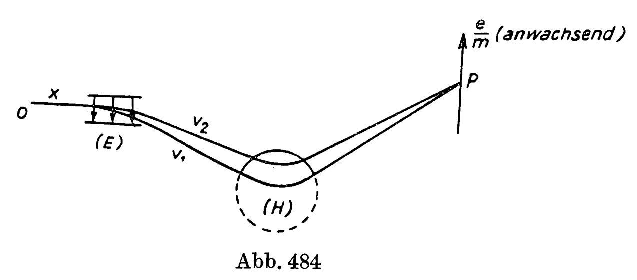


Abb. 484

Einige Bemerkungen über die Einheiten[1])

Die Frage der Einheiten bietet keine Schwierigkeit, wenn man ein kohärentes System verwendet. Im allgemeinen Fall der Wirkung von einander überlagerten elektrischen und magnetischen Feldern sind jedoch einige Vorbemerkungen notwendig. Das allgemeine Gesetz der Kraft wird lauten

$$\mathfrak{K} = e\mathfrak{E} + e\mathfrak{v} \times \mathfrak{B},$$

wobei alle Größen in einem *einzigen kohärenten* System ausgedrückt sind. Außerdem ist in einem solchen System, z. B. dem praktischen MKS-System, darauf zu achten, daß nicht die Induktion mit dem im Vakuum gleichen Magnetfeld selbst verwechselt wird: Es ist immer die *Induktion*, die die Kräfte erzeugt.

[1]) Siehe auch am Ende dieses Buches das Kapitel „Einheiten".

Dieses allgemeine Gesetz gilt auch noch, wenn man ein *inkohärentes* System der elektrischen Einheiten, jedoch das gleiche mechanische System benutzt, z. B. das CGS-System, und als Dimension der Kraft das dyn beibehält. Man kann dann schreiben

$$\mathfrak{K}_{\text{dyn}} = e_{\text{el. stat.}}\, \mathfrak{E}_{\text{el. stat.}} + e_{\text{el. magn.}}\, \mathfrak{v}_{\text{cm/sec}} \times \mathfrak{B}_{\text{el. magn.}} .$$

Dabei tritt jedoch die Unbequemlichkeit auf, die Größe e in derselben Formel durch zwei verschiedene Werte $e_{\text{el. stat.}}$ und $e_{\text{el. magn.}}$ ausgedrückt zu haben. Im allgemeinen zieht man es vor, für e den Wert in elektrostatischen Einheiten einzusetzen, da die Ladung einen mehr elektrischen Charakter besitzt. Es ergibt sich also

$$\mathfrak{K}_{\text{dyn}} = e_{\text{el. stat.}} \left(\mathfrak{E}_{\text{el. stat.}} + \frac{1}{c}\, \mathfrak{v}_{\text{cm/sec}} \times \mathfrak{B}_{\text{Gauß}} \right).$$

Wir wollen nun im praktischen System arbeiten und führen ein spezielles Beispiel an.

Ein Elektron bewege sich mit einer Geschwindigkeit von 10000 km/sec ($v_{\text{CGS}} = 10^9$, $v_{\text{prakt.}} = 10^7$) in einem senkrechten Induktionsfeld von 1 Gauß. Die Ablenkkraft hat in CGS-Einheiten mit $e = 1{,}60 \cdot 10^{-20}$ (in elektromagnetischen Einheiten) den Wert

$$1{,}60 \cdot 10^{-20} \cdot 10^9 \cdot 1 = 1{,}60 \cdot 10^{-11}\ \text{dyn}.$$

Rechnet man im praktischen Maßsystem, so hat die Kraft den Wert $1{,}60 \cdot 10^{-16}$ Newton, und es gilt die Gleichung

$$1{,}60 \cdot 10^{-16}\,\text{Newton} = (\underset{\substack{\downarrow \\ \text{Wert von } e \text{ im MKS-System}}}{1{,}60 \cdot 10^{-19}\,\text{Coulomb}}) \cdot \underset{\substack{\downarrow \\ v}}{10^7}.\ \text{Wert von 1 Gauß im MKS-System.}$$

Man findet also, daß 1 Gauß gerade 10^{-4} MKS-Einheiten der magnetischen Induktion oder umgekehrt 1 MKS-Einheit der magnetischen Induktion gerade 10^4 Gauß entspricht. Diese Einheit heißt Weber pro m^2.

Dieses Beispiel weist noch einmal auf die nicht immer beachtete Tatsache hin, daß die magnetische Induktion und nicht das Feld auf die von den Strömen durchflossenen Leiter wirkt.

Wirkung eines zeitlich veränderlichen Magnetfeldes auf ein geladenes Teilchen

In diesem Falle gibt es immer eine rein magnetische Wirkung, die durch die LAPLACEsche Gleichung beschrieben wird. Es ist jedoch notwendig, die Wirkung eines neuen elektrischen Feldes zu berücksichtigen, das durch die Gleichung

$$\operatorname{rot} \mathfrak{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \mathfrak{B}}{\partial t},$$

die sogenannte MAXWELL-FARADAYsche Formel (die in der MAXWELLschen Theorie gefunden wurde), beschrieben ist. Letztere Gleichung ist in Gauß angegeben.

Dieses Feld ist durchaus erklärbar und liefert, längs einer Schleife integriert, die elektromotorische Induktionskraft. Geht man nicht von den MAXWELLschen Gleichungen aus, so findet man in jedem speziellen Problem diesen Effekt wieder, wenn man diese elektromotorische Kraft, wie wir bereits gesehen haben, berechnet. Benutzt man dagegen die „Formeln", so müssen die Terme exakt eingesetzt werden. Von diesem Standpunkt aus ist die Formel für die Kraft nur gültig, wenn E nicht nur das Feld, das von den elektrischen Ladungen herrührt, sondern auch das durch die MAXWELL-FARADAY-Beziehung beschriebene Feld enthält.

Die Situation wird besser beschrieben, wenn wir uns erinnern, daß B aus einem Vektorpotential A hervorgeht:

$$\mathfrak{B} = \operatorname{rot} \mathfrak{A},$$

d.h.

$$\mathfrak{E}_{(\text{MAXWELL-FARADAY})} = -\frac{1}{c}\frac{\partial \mathfrak{A}}{\partial t}.$$

Allgemein findet man (unter Berücksichtigung, daß das rein elektrostatische Feld $\mathfrak{E} = -\frac{\partial V}{\partial n}$ oder $-\operatorname{grad} V$ ist) den Ausdruck

$$\mathfrak{K} = e\left[-\operatorname{grad} V - \frac{1}{c}\frac{\partial \mathfrak{A}}{\partial t} + \frac{1}{c}\mathfrak{v} \times \operatorname{rot} \mathfrak{A}\right].$$

Die Kraft wird also eindeutig durch das skalare Potential V und das Vektorpotential A ausgedrückt.

Anwendung:

Wirkung eines Magnetfeldes auf ein auf einer Kreisbahn umlaufendes Elektron

a) *Theorie des Diamagnetismus.* Im zweiten Teil des V. Kapitels haben wir im Prinzip eine Erklärung des Diamagnetismus gegeben. Wir sind nun in der Lage, eine Berechnung dieses Problems durchzuführen.

Wir wollen den einfachen Fall eines auf einer Kreisbahn mit dem Radius r umlaufenden und von einer im Zentrum gelegenen Ladung Ze angezogenen Elektrons betrachten (Abb. 485). Seine Geschwindigkeit v ist gegeben durch

$$\frac{m v^2}{r} = \frac{Z e^2}{r^2}. \tag{1}$$

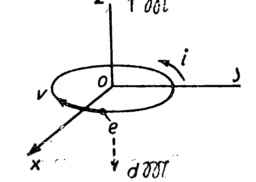


Abb. 485

(Dies ist die Gleichung des Gleichgewichts zwischen der Zentrifugal- und der Anziehungskraft.) Ist andererseits die Energie des Elektrons bekannt, dann bestimmt diese Gleichung den Radius r der Kreisbahn.

Wir lassen nun eine gleichförmige zur Ebene der Kreisbahn senkrechte magnetische Induktion B wirken. Die LAPLACEsche Kraft $F = Bev$ (in elektromagnetischen Einheiten) zeigt bei unserem Beispiel nach außen. Diese Kraft *addiert* sich also zur Zentrifugalkraft, und nach Gl. (1) kann man annehmen, daß bei gleichbleibender Geschwindigkeit v ein neuer Gleichgewichtszustand nur für ein *kleineres*

r möglich ist. Daraus folgt, daß sich die Kreisfläche S verringern müßte. In unserem Beispiel würde das magnetische Moment der Kreisbahn, das nach Definition den Wert $Si = \frac{r}{2} ev$ (i ist dabei der einem mit der Geschwindigkeit v auf einer Kreisbahn umlaufenden Elektron e äquivalente Strom: $i \cdot 2\pi r = ev$) besitzt, dadurch verringert werden. Diese Verringerung wird durch einen Vektor dM dargestellt, der nach unten gerichtet ist. Dieses Feld verursacht das Auftreten des Diamagnetismus, indem es eine dem Feld entgegengesetzte Magnetisierung aufbaut.

Die vorstehenden Betrachtungen, obwohl sie auf qualitativ richtigen Beziehungen beruhen, sind jedoch *völlig unexakt*. Wir werden dagegen zeigen, *daß die Einführung eines Feldes B in einem bestimmten Zeitpunkt nicht den Bahnradius r, sondern die Geschwindigkeit des Elektrons verändert.* (Es ist selbstverständlich, daß das Feld gleichförmig im Raum und zeitlich konstant bleiben wird.)

An Stelle des sich auf der Kreisbahn bewegenden Elektrons betrachten wir jetzt den ihm äquivalenten Strom i. Das Feld B erzeugt den durch die Kreisbahn tretenden Fluß

$$F \cdot B = \pi r^2 B.$$

Verändert sich der Kraftfluß, so tritt eine elektromotorische Induktionskraft

$$e = -\frac{\pi r^2}{c} \frac{\partial B}{\partial t}$$

auf, die einem elektrischen Feld E entlang der Kreisbahn äquivalent ist. Dabei ist

$$E \cdot 2\pi r = e \quad \text{und} \quad E = -\frac{r}{2c} \frac{\partial B}{\partial t}.$$

Diese Formel ergibt sich auch aus den MAXWELLschen Gleichungen. Für das Elektron finden wir also eine *Vergrößerung der Geschwindigkeit*, die gegeben ist durch

$$m \frac{dv}{dt} = + eE = -\frac{er}{2c} \frac{\partial B}{\partial t}.$$

Verändert man also das Feld von 0 auf B, so wächst die Geschwindigkeit um

$$\omega = \frac{eB}{2cm}$$

in Gauß oder

$$\omega = -\frac{eB}{2m}$$

in elektromagnetische Einheiten.

Diese Veränderung der Winkelgeschwindigkeit ist die sogenannte *LARMOR-Präzession.*

Man kann also bei gleichbleibendem r zeigen, daß die Veränderung der Zentrifugalkraft immer gerade gleich der LAPLACE-Kraft ist, d.h., daß das Elektron auf seiner ursprünglichen Kreisbahn verbleibt. Tatsächlich kann man für $m(\omega + \delta\omega)^2 r$ auch schreiben: $m\omega^2 r + 2m\omega\delta\omega r$. Der zweite Term $2m\omega\delta\omega r$ hat gerade den Wert $-\omega r e B = -Bev$, und dies kompensiert die LAPLACE-Kraft $+Bev$ in elektromagnetischen Einheiten.

(Träte eine solche Kompensation nicht auf, dann müßten wir zu Anfang die Möglichkeit einer Veränderung von r annehmen und die elektromotorische Induktionskraft in elektromagnetischen Einheiten in der Form

$$e = -\frac{\partial}{\partial t}(\pi r^2 B)$$

darstellen. Führt man jedoch die Berechnung durch, so findet man, daß eine Veränderung von r nicht möglich ist.)

Nun wollen wir die Veränderung des einer Kreisbahn entsprechenden magnetischen Momentes im elektromagnetischen CGS-System berechnen:

$$M = \frac{r}{2} ev = \frac{r^2}{2} e\omega .$$

Dieses Moment wird um

$$\delta M = -\frac{r^2}{4}\frac{e^2 B}{m}$$

verändert, wobei δM wie im vorhin betrachteten Fall dM entgegengesetzt zum Feld gerichtet ist.

Bei der Betrachtung einer in entgegengesetzter Richtung durchlaufenen Kreisbahn hätte man δM in gleicher Richtung gefunden, d.h., beide Kreisbahnen würden zum Diamagnetismus beitragen. Der allgemeine Fall ist jedoch der, daß die Achse der Kreisbahn mit dem magnetischen Feld den Winkel Θ bildet. Dann finden wir, daß die Komponente $B\cos\Theta$ die LARMOR-Präzession verursacht und daß allein die Komponente $\delta M\cos\Theta$ entlang des ursprünglichen Feldes nicht verschwindet.

Diese Komponente δM_1 hat also den Wert

$$\delta M_1 = -\frac{r^2}{4}\frac{e^2 B}{m}\cos^2\Theta .$$

Wenn wir nun den Mittelwert von $\cos^2\Theta$ über alle Richtungen bilden, so finden wir, da $\cos\Theta$ ein Richtungskosinus der analytischen Geometrie ist, $\overline{\cos^2\Theta} = 1/3$. Nun nehmen wir Z als Anzahl der Elektronen pro Molekül, r^2 als Mittelwert für alle Elektronen ($Zr^2 = \Sigma r_i^2$) und n als Anzahl der Moleküle pro Volumeneinheit an. Das magnetische Moment pro Volumeneinheit ist dann gegeben zu

$$M = -\frac{Znr^2e^2}{12m} B .$$

Daraus folgt eine diamagnetische Suszeptibilität

$$\chi = -\frac{Z n r^2 e^2}{12\, m} \quad \text{in elektromagnetischen Einheiten.} \tag{2}$$

Diese Theorie nimmt hauptsächlich an, daß sich die Kreisbahnen nicht unter der Wirkung von B orientieren. Dies fanden wir bereits im V. Kapitel des zweiten Teils, wo wir die Wechselwirkungen zwischen benachbarten Kreisbahnen betrachteten.

Die Mittelwerte können auch auf eine andere Art gebildet werden, indem man nämlich annimmt, daß die Atome kugelsymmetrisch sind. Dazu muß man in dem Ausdruck

$$\delta M = -\frac{r^2}{4}\,\frac{e^2 H}{m}$$

$r^2 = x^2 + y^2$ und für das Quadrat des mittleren Abstandes zwischen Elektron und Kern $\varrho^2 = x^2 + y^2 + z^2$ setzen. Wir finden dann im Mittel $\overline{x^2} + \overline{y^2} = \frac{2}{3}\,\overline{\varrho^2}$ für jede beliebige Orientierung des Feldes H und für die Suszeptibilität

$$\chi = -\frac{Z\, n\, \varrho^2\, e^2}{6\, m}. \tag{3}$$

Die durch die Gleichungen (2) und (3) gegebene Größenordnung ist sehr gut bestätigt; eine genaue Theorie dieses Phänomens erfordert jedoch die Anwendung der Quantenmechanik.

b) *Der* Zeeman-*Effekt.* Für eine zum Feld senkrecht liegende Kreisbahn vergrößert oder verkleinert sich die Winkelgeschwindigkeit ω des Elektrons um

$$\Delta\omega = \frac{n}{R} = \pm\frac{e}{2\,m}\,B \quad \text{in elektromagnetischen Einheiten.}$$

Dies ist die bereits erwähnte Larmor-Präzession. Um 1895 hatte Lorentz auf Grund dieser Larmor-Präzession eine Erklärung des Zeeman-Effektes gegeben (Frequenzaufspaltung der Spektrallinien, wenn sich die Lichtquelle in einem magnetischen Feld befindet). Die ausgestrahlte Frequenz $\frac{\omega}{2\pi}$ ist danach die Umlauffrequenz eines Elektrons auf einer Kreisbahn und $\frac{\Delta\omega}{2\pi}$ ihre Veränderung. Diese Theorie hat sich nicht bestätigt, zu einer präzisen Behandlung des Problems sind quantenmechanische Betrachtungen unerläßlich. Die gefundene Größenordnung und das Prinzip der Erklärung sind jedoch richtig.

c) *Das Betatron* (Abb. 486). Als Betatron bezeichnet man eine Apparatur, in der Elektronen durch ein variables Magnetfeld beschleunigt werden. Das aus einer Elektronenquelle eingeschossene Elektron gerät in einen Bereich, in dem ein zu

seiner Bewegungsebene senkrechtes Magnetfeld proportional mit der Zeit anwächst. Es wird dabei durch das elektrische Feld

$$E = -\frac{r}{2c}\,\frac{dB}{dt}$$

(siehe Seite 504) beschleunigt und geht auf eine Kreisbahn mit einem dem Anfangswert des magnetischen Feldes entsprechenden Radius über. Tatsächlich erreicht das Elektron eine so große Geschwindigkeit, daß sich die relativistische

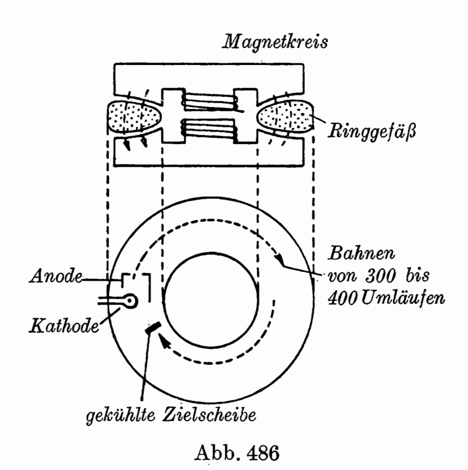


Abb. 486

Massenänderung bemerkbar macht. Wir werden auf diese Frage noch zurückkommen. Den Aufbau eines Betatrons kann man sich gut durch die Vorstellung eines Transformators veranschaulichen, dessen Sekundärwicklung durch eine Elektronen enthaltende Vakuumröhre ersetzt ist. Seine Primärwicklung dient zur zeitlichen Veränderung der Induktion.

MILLIKANsche Versuche (1908)

Über die historisch bedeutenden Etappen (Versuche von J. J. THOMSON, J. PERRIN u. a.), die heute durch die Demonstrationsmöglichkeiten des Kathodenstrahloszillographen längst überholt sind, gelangen wir zu den MILLIKANschen Versuchen. Ihm gelang es erstmals, eindeutig die diskontinuierliche Natur der Elektrizität nachzuweisen.

In dem vertikalen gleichförmigen elektrischen Feld, das zwischen den beiden Platten eines Plattenkondensators herrscht, kann man die Bewegung eines Öltröpfchens (Durchmesser in der Größenordnung von $1\,\mu$) beobachten, wenn dieses angestrahlt wird (Abb. 487).

Abb. 487

Stößt dieses Tröpfchen mit einem Ion zusammen, so verändert sich seine Ladung. Wir wollen nun mit e seine Ladung und mit m seine Masse bezeichnen. Die Resultante der angreifenden Kräfte ist vertikal nach unten gerichtet und hat den Wert $mg - eE$ (ohne Beachtung des Vorzeichens von e).

Nun schalten wir das elektrische Feld ab. Der Öltropfen besitzt eine Grenzgeschwindigkeit v_0. Es wird sich also ein Gleichgewicht zwischen seinem Gewicht und dem Reibungswiderstand des Gases, der der Geschwindigkeit proportional angenommen wird, einstellen:

$$k v_0 = m g .$$

Legt man nun wieder das Feld E an, so wird die Grenzgeschwindigkeit v einen solchen Wert annehmen, daß

$$k v = m g - e E$$

ist, und wir finden

$$\frac{v_0}{v} = \frac{m g}{m g - e E} = \frac{g}{g - E \frac{e}{m}} .$$

Die Masse m leitet man von der Grenzgeschwindigkeit v_0 ab, indem man annimmt, daß der Koeffizient k mit genügender Genauigkeit durch das STOKESsche Gesetz

$$k = 6 \pi \eta a$$

gegeben ist. Dabei seien η die Viskosität des Gases (0,00017 CGS-Einheiten für Luft bei 0° C) und a der Tröpfchenradius. Man weiß heute, daß die STOKESsche Formel auch in Fällen gültig ist, die viel allgemeiner sind als die Theorie, aus der man sie erhielt. Sie wird immer gut durch das Experiment bestätigt. Ist also m bekannt, so können wir e berechnen und finden, daß alle so gemessenen Ladungen Vielfache der gleichen Ladung

$$e = 4{,}802 \cdot 10^{-10} \quad \text{elektrostatische Einheiten}$$
$$= 1{,}6017 \cdot 10^{-20} \quad \text{elektromagnetische Einheiten}$$

sind.

Die Masse m des Elektrons selbst läßt sich jedoch durch den MILLIKAN-Versuch nicht bestimmen. Alle Experimente mit elektrostatischer oder magnetischer Ablenkung, die wir nicht beschreiben wollen, die sich jedoch leicht mit Kathodenstrahloszillographen oder Massenspektrographen durchführen lassen, ergeben aber für das Verhältnis $\frac{e}{m}$ den Wert

$$\frac{e}{m} \text{ (Elektron)} = 1{,}759 \cdot 10^7 \quad \text{elektromagnetische Einheiten.}$$

Man kann aus diesem Ausdruck sofort die Masse des Elektrons bestimmen, die sich zu 1/1836 der Masse eines Wasserstoffatoms ergibt.

Nimmt man andererseits an, daß die Ladung eines Elektrons mit der aus der Elektrolyse gefundenen Elementarladung identisch ist, so muß, wenn N die LOSCHMIDTsche Zahl bedeutet,

$$N e_{\text{el. magn.}} = 96490 \text{ elektromagnetische Ladungseinheiten}$$

gelten (FARADAYsches Gesetz). Setzen wir in diese Formel den von MILLIKAN gefundenen Wert für e in elektromagnetischen Einheiten ein, so erhalten wir

$$N = 6{,}02 \cdot 10^{23}.$$

Masse und Radius eines Elektrons in der klassischen Theorie

Ein Elektron mit der Ladung e ruft in einem Punkt in der Entfernung r ein elektrisches Feld der Größe

$$E = \frac{e}{r^2} \quad \text{(in elektrostatischen Einheiten)}$$

hervor.

Die elektrostatische Energie *außerhalb des Elektrons* ist gegeben zu

$$\iiint \frac{E^2}{8\pi}\, d\Omega = \frac{e^2}{8\pi} \iiint \frac{d\Omega}{r^4} = \frac{e^2}{2} \int_a^\infty \frac{dr}{r^2} = \frac{e^2}{2a} \tag{1}$$

in elektrostatischen Einheiten. Dabei bezeichnen a den Radius des Elektrons und $d\Omega$ das Volumenelement.

Bewegt sich dagegen dieses Elektron mit der Geschwindigkeit v, so hat das in einem Punkt M in Richtung Θ und der Entfernung r aufgebaute Magnetfeld den Wert

$$H = \frac{e\, v \sin\Theta}{r^2}$$

in elektromagnetischen Einheiten.

Die elektrostatische Energie im Raum ist in diesem Fall gegeben zu

$$\iiint \frac{H^2}{8\pi}\, d\Omega = \frac{e^2 v^2}{8\pi} \iiint \frac{\sin^2\Theta}{r^4}\, d\Omega = \frac{e^2 v^2}{4} \int_0^\pi \int_a^\infty \frac{\sin^3\Theta\, d\Theta\, dr}{r^2}$$

$$= \frac{e^2 v^2}{3} \int_a^\infty \frac{dr}{r^2} = \frac{1}{2}\left(\frac{2e^2}{3a}\right) v^2$$

in elektromagnetischen Einheiten. Die Gleichung ist von der Form $\frac{1}{2}\, m v^2$. Man kann dieses Resultat interpretieren, indem man sagt, daß das Elektron *eine elektromagnetische Masse* $m = \frac{2e^2}{3a}$ in elektromagnetischen Einheiten besitzt. Die Tatsache, daß ein in Bewegung versetztes Elektron eine Strahlung aussendet oder wenigstens ein statisches Magnetfeld aufbaut, äußert sich energetisch in einer bei der Erzeugung dieser Bewegung zu überwindenden Trägheitskraft. Ist das Elektron einmal in Bewegung, so behält es auch ohne weitere Energiezufuhr seine gleichförmige Geschwindigkeit bei. Die magnetische Energie verringert sich in einigen Volumenelementen, um dafür in anderen anzuwachsen.

Die Masse eines Elektrons ist sehr viel kleiner (1/1836 der eines Wasserstoffatoms) als die jedes bekannten anderen materiellen Teilchens. Dies führt uns auf die Annahme, daß seine *gesamte Masse elektromagnetischen Ursprungs ist.* Unter diesen Annahmen wird

$$\frac{2\,e^2}{3\,a}\ \text{(elektromagnet.)} = \frac{1}{1836 \cdot 6{,}02 \cdot 10^{23}} = 0{,}9 \cdot 10^{-27} = m.$$

Für den *Radius a des Elektrons* erhalten wir daraus den Wert

$$a = \frac{2}{3}\,\frac{e^2}{m} = 1{,}9 \cdot 10^{-13} \approx 2 \cdot 10^{-13} \quad \text{cm},$$

der in der Größenordnung der Atomkerndimensionen liegt.

Der Vorteil dieser Abschätzung liegt darin, daß die uns noch unbekannte *Struktur* des Elektrons in keiner Form eingeht. Auch andere Berechnungen ergeben die gleiche Größenordnung (siehe Wirkungsquerschnitt eines Elektrons bei der Beugung, Seite 486).

Durch die Tatsache, daß die Dimensionen des Elektrons in der Größenordnung der des Kerns liegen und die Kernpartikeln durch Kräfte, die in größerer Entfernung nicht mehr wirksam sind, festgehalten werden, kommen wir zu der Annahme, daß die Gesetze der Elektrodynamik unterhalb einer *Minimallänge* ($l = 2 \cdot 10^{-13}$ cm) bedeutenden Veränderungen unterworfen sein müssen.

Nimmt man z.B. an, daß das gesamte elektrische Feld keinen größeren als den auf dem klassischen Radius eines Elektrons herrschenden Wert annehmen kann, und sucht die Temperatur eines schwarzen Körpers, dessen energetische Strahlungsdichte durch die Ausbreitung dieses maximalen Feldes verursacht wird, so findet man sie in der Größenordnung von 10^{12} °K. Diese Temperatur scheint tatsächlich in den Zentren einiger Sterne (weißer Zwerge) zu herrschen, von denen man weiß, daß in ihnen selbst die stabilsten Kerne vollständig in die sie bildenden Elementarteilchen aufgespalten sind, und man kennt weder höhere Temperaturen noch stärkere elektromagnetische Felder.

Einfluß der Relativität

Unsere bisher in der klassischen Mechanik durchgeführten Berechnungen müssen in bestimmten Fällen einschneidenden Veränderungen unterworfen werden:

Postuliert man, wie erforderlich, die Invarianz der Lichtgeschwindigkeit in bezug auf jede Veränderung des Koordinatensystems, so bedingt die Relativitätsmechanik eine Veränderung der Masse mit der Geschwindigkeit nach dem Gesetz

$$m = \frac{m_0}{\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)^{1/2}}; \qquad (1)$$

c ist dabei die Lichtgeschwindigkeit im Vakuum. Diese Formel muß notwendig auch auf die Masse eines Elektrons, gleichgültig, ob sie elektromagnetisch ist oder

nicht, angewandt werden. Von der *Ausbreitungs*geschwindigkeit c der von einem bewegten Elektron aufgebauten Felder gelangt man allein mit der Elektrodynamik wieder zu dem durch die obige Formel ausgedrückten Gesetz.

Weiterhin erfordert die Relativität, daß die Gesamtenergie eines Körpers von der Form mc^2 sei. Nehmen wir für m die Gleichung (1), so finden wir für kleine Geschwindigkeiten in erster Näherung für den geschwindigkeitsabhängigen Teil dieser Energie den klassischen Ausdruck $\frac{m_0 v^2}{2}$.

Für das Elektron hatten wir eine elektrostatische Energie von $\frac{e^2}{2a}$ in elektrostatischen Einheiten gefunden. Da aber $e_{\text{el. stat.}} = c e_{\text{el. magn.}}$ ist, gilt für die elektrostatische Energie

$$\frac{e^2_{\text{el. magn.}}}{2a} c^2.$$

Bis auf den Faktor $\frac{4}{3}$ ist der Ausdruck $\frac{e^2_{\text{el. magn.}}}{2a}$ gleich der elektromagnetischen Masse eines Elektrons $\frac{2}{3} \frac{e^2_{\text{el. magn.}}}{a}$, die man als *Ruhmasse* m_0 bezeichnet. Der Faktor $\frac{4}{3}$ verschwindet, wenn man eine weitere Hypothese über die Ladungsverteilung im Inneren des Elektrons macht. Dadurch wird die Berechnung des Integrals (1) derart verändert, daß wir gemäß der Relativität die elektrostatische Energie eines Elektrons als elektrischen Ausdruck der seiner Masse eigenen Energie ansehen können.

Eine praktisch bedeutende Folgerung der Relativität für Elektronen, deren Geschwindigkeit wegen ihrer geringen Masse leicht durch etwas höhere Potentiale in die Nähe der Lichtgeschwindigkeit gebracht werden kann, besteht darin, daß die Relation zwischen Geschwindigkeit und beschleunigender Potentialdifferenz sich verändert und durch

$$mc^2 - m_0 c^2 = Ue$$

mit

$$m = \frac{m_0}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

gegeben ist. Es gilt also

$$\frac{v^2}{c^2} = 1 - \frac{1}{\left(1 + \frac{Ue}{m_0 c^2}\right)^2}$$

oder

$$\frac{v^2}{c^2} = \frac{\frac{2eU}{m_0 c^2}\left(1 + \frac{1}{2}\frac{eU}{m_0 c^2}\right)}{\left(1 + \frac{m_0 c^2}{eU}\right)^2}.$$

Dies kann man auch nach $\frac{eU}{m_0 c^2}$ in eine Reihe entwickeln.

Wir sehen also, daß die durch die Relativität eingeführte Korrektur bei großen Geschwindigkeiten die Ungültigkeit des Gesetzes der Invarianz der Wege in bezug auf die Spannungen in elektrostatischen Anordnungen, wie wir es auf Seite 483 betrachtet haben, aufdeckt. Die relative Bedeutung dieser Korrektur ist für v^2 durch $\frac{eU}{m_0 c^2}$ und für v durch $\frac{1}{2}\frac{eU}{m_0 c^2}$ gegeben. Für eine Abschätzung ist es bequem, das Potential U_0 in der Form

$$e U_0 = m_0 c^2$$

zu betrachten, wobei $e U_0$ die minimale Anzahl der zur Erzeugung der Energie eines Elektrons notwendigen Elektronenvolt ist. Man hat (siehe die Lehrbücher der Atomphysik) festgestellt, daß ein Photon mit dieser Energie bei einem Stoß mit einem schweren Kern eine solche Bildung verursachen kann. (Tatsächlich werden dabei gleichzeitig ein positives und ein negatives Elektron, die ein sogenanntes *Paar* bilden, erzeugt.) Es gilt übrigens

$$U_0 = \frac{0{,}9 \cdot 10^{-25} \cdot 9 \cdot 10^{20}}{4{,}8 \cdot 10^{-10}} \cdot 300\,\mathrm{V} \approx 500000\,\mathrm{V}.$$

Den Faktor $\frac{eU}{m_0 c^2}$ kann man auch in der Form $\frac{U}{U_0}$ darstellen. Dann erhalten wir den Ausdruck für v^2 zu

$$\frac{v_{\text{reell}}^2}{v_{\text{klass}}^2} = \frac{1 + \frac{U}{2U_0}}{\left(1 + \frac{U}{U_0}\right)^2},$$

wobei

$$\frac{1}{2} m_0 v_{\text{klass}}^2 = eU.$$

Es ist interessant, für diese Werte eine Tabelle aufzustellen (Tabelle I).

Tabelle I

$\frac{U}{U_0}$	$\frac{v_{\text{reell}}}{v_{\text{klass}}}$
0,1	0,93
0,5	0,745
1	0,612
2	0,472
4	0,346

Ist dagegen U sehr groß, so geht $v \to c$, und es empfiehlt sich, die Schreibweise

$$\frac{v^2}{c^2} = 1 - \left(\frac{m_0 c^2}{eU}\right)^2 = 1 - \left(\frac{U_0}{U}\right)^2$$

anzuwenden. Aus ihr ergibt sich die Tabelle II, und man erreicht bei annehmbaren Spannungen mit den heute üblichen Anordnungen (Betatron) praktisch die Lichtgeschwindigkeit.

Tabelle II

$\frac{U}{U_0} = 4$	$\frac{v_{\text{reell}}}{c} = 0{,}968$
10	0,995
100	0,9995

TSCHERENKOW-Effekt

Dieser Effekt wurde wenige Jahre vor dem Kriege von dem sowjetischen Physiker TSCHERENKOW entdeckt. Er betrachtete die Leuchterscheinungen, die auftreten, wenn man Elektronen mit einer Geschwindigkeit v kleiner als die Lichtgeschwindigkeit im Vakuum, jedoch größer als die Ausbreitungsgeschwindigkeit des Lichtes im Kristall in einen solchen hineinbringt.

Um den Elektronenstrahl bildet sich ein Kegel, in dem sich das Licht entlang seiner Erzeugenden mit der Geschwindigkeit c_1 ausbreitet und dessen halber Scheitelwinkel Θ durch $\sin\Theta = \frac{c_1}{v}$, genau wie in der Theorie der akustischen Stoßwellen, gegeben ist. Dieser Effekt ist eine gute direkte Bestätigung der Relativitätstheorie.

Betatron

Nehmen wir an, wie es tatsächlich der Fall ist, daß das Elektron sehr schnell eine nahe der Lichtgeschwindigkeit gelegene Geschwindigkeit angenommen hat, so können wir leicht die Arbeitsbedingungen für ein Betatron angeben.

Mit Φ wollen wir den Fluß in der „Sekundärwindung" bezeichnen, der von dem Mittelwert der Induktion B_m durch die Fläche erzeugt wird. Nach einem Umlauf ist das Elektron durch das Potential $\Delta U = \frac{d\Phi}{dt}$ beschleunigt worden. Ist $\Delta\Phi = \Delta B_m \pi r^2$ die Zunahme pro Umlauf und $dt = \frac{2\pi r}{c}$, so gilt

$$\Delta U = \Delta B_m \frac{r c}{2}.$$

Diese Spannungszunahme wird einzig und allein zur Vergrößerung der Elektronenmasse beitragen:

$$e U = mc^2 - m_0 c^2,$$

woraus

$$\Delta U = \frac{\Delta m}{e} c^2$$

folgt.

Will man andererseits erreichen, daß das Elektron trotz der Massenzunahme auf seiner Bahn verbleibt, so muß die zusätzliche Zentrifugalkraft $\frac{\Delta m c^2}{r}$ gerade gleich der LAPLACE-Kraft $e \Delta B c$ sein. An Stelle von $\frac{\Delta B_m}{2} r \cdot c$ ergibt sich

$$\Delta v = \Delta B \cdot r \cdot c.$$

Es ist ΔB_m also gleich $2 \Delta B$. Diese wichtige Relation liefert uns das Gesetz, nach dem die Veränderung des Magnetfeldes im Betatron vom Zentrum zur Peripherie hin erfolgen muß. Die aus dem LAPLACEschen Gesetz folgende Induktion B herrscht tatsächlich an der Peripherie. Man kann leicht zeigen, daß dieselbe Beziehung auch gilt, wenn die Geschwindigkeit v von c sehr verschieden ist. Durch die Konstruktion eines Magnetkreises, der durch die passende Wahl der Spaltanordnung diese Bedingung erfüllt, erhält man brauchbare Konstruktionen.

Eine andere Frage ist die *Stabilität der Elektronenbahnen*. Man sieht z.B. ohne Mühe, daß bei Kraftlinien des Magnetfeldes, die wie in Abb. 486 gekrümmt sind, also nicht vertikal verlaufen, immer eine Kraft existiert, die das Elektron in der Mittelebene hält.

Die erste Idee eines Betatrons wurde 1922 von SLEPIAN entwickelt. Die Prinzipien einer korrekten Arbeitsweise wurden (nach deutschen Vorschlägen) 1941 von KERST erarbeitet und zum Bau des ersten Betatrons ausgenutzt. Heute kann man Betatrons von 20 MeV leicht herstellen.

Durch die Quantenmechanik eingeführte Beschränkungen

Wir bezeichnen mit m die Masse eines Teilchens und mit v seine Geschwindigkeit. In der Quantenmechanik wird die Wellenlänge λ mit diesen Größen durch das 1925 von DE BROGLIE entdeckte Gesetz

$$m v = \frac{h}{\lambda}$$

verbunden, in dem $h = 6{,}62 \cdot 10^{-27}$ die PLANCKsche Konstante ist (siehe in den Lehrbüchern der Thermodynamik). Danach kann man für dieses Teilchen keine Dimensionen kleiner als die Wellenlänge annehmen und bei der Ausbreitung des Lichtes nicht von Lichtpunkten sprechen, die kleinere Dimensionen als die sie erzeugende Wellenlänge besitzen.

Diese Annahme wurde durch die Experimente von DAVISSON und GERMER (1927) bestätigt. Diese Forscher ließen einen feinen Elektronenstrahl auf einen Nickeleinkristall fallen. Dabei fanden sie ein Beugungsphänomen an den das Kristallgitter bildenden Atomen. Das auftretende Beugungsbild konnte gedeutet werden, indem man annahm, daß es sich um eine Beugung einer der DE-BROGLIE-Formel entsprechenden Wellenlänge handelte.

Daraus folgt jedoch vom Standpunkt der Quantenmechanik, daß das Elektron in den meisten Fällen einen sehr viel größeren als seinen klassischen Radius besitzt.

Berücksichtigen wir die Relativitätskorrektur, nach der m von der Geschwindigkeit abhängt, so nimmt der Ausdruck $mv = \frac{h}{\lambda}$ die Form

$$\frac{1}{v^2} - \frac{1}{c^2} = \frac{m_0 \lambda^2}{h}$$

oder

$$\frac{v}{c} = \frac{\frac{h}{c\, m_0\, \lambda}}{\sqrt{1 + \frac{h^2}{c^2\, m_0^2\, \lambda^2}}}$$

an; $\frac{h}{c\, m_0}$ hat also die Dimensionen einer Länge λ_0 und den Wert

$$\lambda_0 = \frac{6{,}62 \cdot 10^{-27}}{0{,}9 \cdot 10^{-27} \cdot 3 \cdot 10^{10}} = 2{,}44 \cdot 10^{-10}\ \text{cm}.$$

Wir können also auch

$$\frac{v}{c} = \frac{\frac{\lambda_0}{\lambda}}{\sqrt{1 + \left(\frac{\lambda_0}{\lambda}\right)^2}}$$

oder

$$\frac{\left(\frac{\lambda_0}{\lambda}\right)^2}{\sqrt{1 + \left(\frac{\lambda_0}{\lambda}\right)^2}} = \frac{2\, e\, U}{m_0\, c^2} = \frac{2\, U}{U_0}$$

schreiben. Dabei ist U das dem Elektron die Geschwindigkeit v erteilende Beschleunigungspotential. Man findet also, daß

1. ein Elektron die Ausdehnung eines Atoms ($\lambda \approx 2{,}44 \cdot 10^{-8}$ cm) besitzt, wenn $\lambda_0/\lambda = \frac{1}{100}$ ist und die Geschwindigkeit $v = \frac{c}{100}$ oder $3 \cdot 10^8$ CGS-Einheiten beträgt. Das Potential hat dann den Wert $U = \frac{1}{2 \cdot 10^4}\, U_0$, d.h. 25 V ($U_0$ ist dabei 500000 V).

2. ein Elektron den klassischen Elektronenradius aufweist ($\lambda \approx 2{,}44 \cdot 10^{-13}$ cm), wenn $\lambda_0/\lambda = 1000$ und die Geschwindigkeit $\frac{v}{c} \approx 1$ ist. Sein Beschleunigungspotential $U = 500\, U_0$ ist dabei $250 \cdot 10^6$ V.

Dieser Begriff der einem sich bewegenden Elektron äquivalenten Wellenlänge findet in der Atomphysik, die hier jedoch nicht behandelt werden soll, und in der *Elektronenoptik* Anwendung.

II. KAPITEL

Elektronenoptik

Der Ausgangspunkt für die Elektronenoptik findet sich in einer Arbeit von H. BUSCH (*Archiv für Elektrotechnik* 18, 583, 1927). In dieser Arbeit zeigte BUSCH, daß durch die Anlegung von elektrischen oder magnetischen Feldern mit axialer Symmetrie die von dem Objekt ausgehenden Elektronen in einem Bild fokussiert werden können. Dabei gelten, wenigstens wenn man die Relativitätskorrektur vernachlässigen kann, die Bedingungen der Optik.

Brechungsindex

In der Elektronenoptik ergibt sich der Brechungsindex als Quadratwurzel des Beschleunigungspotentials V. *Vom korpuskularen Standpunkt gilt folgendes:*

In einem Medium (Abb. 488), in welchem kein elektrisches Feld existiert und das elektrische Potential den konstanten Wert V_1 besitzt, falle ein Elektron mit der Geschwindigkeit v_1 unter dem Winkel α_1 auf die Grenzfläche S_1. Zwischen den beiden Grenzflächen S_1 und S_2 liege die Potentialdifferenz $V_2 - V_1$. Unterhalb der Grenzfläche S_2 tritt das Elektron in ein feldfreies Medium mit dem konstanten Potential V_2. Durch das zu den Grenzflächen S_1 und S_2 senkrechte elektrische Feld werden die zu den Äquipotentialflächen parallelen Geschwindigkeiten nicht verändert, d.h., es gilt

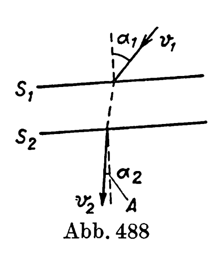


Abb. 488

$$v_1 \sin\alpha_1 = v_2 \sin\alpha_2 .$$

Da jedoch $v_1^2 \sim V_1$ und $v_2^2 \sim V_2$ sind, ergibt sich *das* DESCARTES*sche Gesetz*

$$\sqrt{V_1}\sin\alpha_1 = \sqrt{V_2}\sin\alpha_2 ,$$

wobei $\sqrt{V}$ dem Brechungsindex entspricht.

Vom wellenmechanischen Standpunkt erhalten wir dagegen

$$mv = \frac{h}{\lambda} .$$

Tritt ein Elektron von einem Medium in ein anderes, so verändert sich seine Geschwindigkeit v wie $\sqrt{V}$, d.h., λ verändert sich mit $\frac{1}{\sqrt{V}}$. Dies entspricht in der Optik einer Welle mit gegebener Frequenz, deren Wellenlänge sich umgekehrt proportional zum Brechungsindex verändert. Man kann also z.B. die Wege der gebrochenen Elektronenstrahlen nach dem HUYGENSschen Prinzip konstruieren usw.

Existenz und Eigenschaften von elektrostatischen Linsen

Wir wollen annehmen, daß um die Oz-Achse ein bestimmtes zylinder- (oder axial-) symmetrisches elektrisches Feld existiere (Abb. 489). Die Erhaltung des

aus einem kleinen Zylinder mit dem Radius r und der Höhe dz austretenden Kraftflusses liefert uns die beiden Summanden

$$2\pi r dz E_r + \pi r^2 \frac{\partial E_z}{\partial z} dz = 0.$$

Ersterer ist der durch die Seitenflächen und letzterer der durch die Grundflächen austretende Fluß. Daraus erhalten wir

$$E_r = -\frac{r}{2} \frac{\partial E_z}{\partial z}. \tag{1}$$

Das Radialfeld ist also proportional zum Radius r. Diese Tatsache gestattet die Konstruktion von elektrostatischen Linsen. Betrachten wir einen Bereich zwischen a und b, in dem ein solches Feld existiert (Abb. 490). Ein Elektron (2), das sich parallel zur Achse bewegt, dessen Abstand von der Achse jedoch doppelt so groß ist wie der eines anderen Elektrons (1), wird zweimal so stark abgelenkt wie das Elektron (1), da es auf ein doppelt so großes Feld E_r trifft. Wir sehen also, daß sich beide Elektronen in dem auf der Achse gelegenen Punkt F (dem sogenannten *Brennpunkt*) treffen werden (Abb. 490).

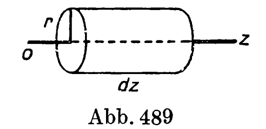


Abb. 489

Abb. 490

Nun wollen wir die Lage dieses Brennpunktes berechnen. Das in das Gebiet (a, b), in welchem sich das Feld verändert, tretende Elektron, das anfänglich eine zur Achse parallele Geschwindigkeit v besaß, erhält nun eine Radialgeschwindigkeit v_r:

$$m \frac{dv_r}{dt} = eE_r.$$

Da man jedoch für dt auch $\frac{dz}{v}$ schreiben kann (wenn v die Geschwindigkeit der longitudinal einfallenden Elektronen ist), folgt

$$dv_r = \frac{e}{m} E_r \frac{dz}{v} = -\frac{e}{2m} \frac{r}{v} \frac{\partial E_z}{\partial z} dz, \tag{2}$$

$$\frac{v_r}{v} = -\frac{e}{2m} \frac{r}{v^2} \int_a^b \frac{\partial E_z}{\partial z} dz = -\frac{e}{2m} \frac{r}{v^2} [(E_z)_b - (E_z)_a].$$

Dabei ist es interessant:

1. $\frac{v_r}{v}$ (die Ablenkung) gleich r/f zu setzen, wobei f die gesuchte Brennweite ist, und

2. v^2 ausgehend von dem die Geschwindigkeit erzeugenden Beschleunigungspotential V zu berechnen:

$$\frac{1}{2} m v^2 = e V.$$

Daraus finden wir

$$\frac{1}{f} = -\frac{E_b - E_a}{4V}. \tag{3}$$

Diese zwar grobe Formel bestätigt sich jedoch in der Praxis sehr gut und liefert die Brennweite *dünner* elektrostatischer Linsen, da man in der Berechnung annimmt, daß sich die Geschwindigkeit v des Elektrons zwischen a und b aus zeitlichen Gründen nicht verändert.

Zu bemerken ist dabei:

1. Das Verhältnis $\frac{e}{m}$ tritt in der f bestimmenden Formel nicht mehr auf, die Brennweite ist also für alle Ionen die gleiche. Durch Variation der Spannung kann man sie beliebig verändern.

2. Werden alle Spannungen (sowohl V als auch die das Feld E_z zwischen a und b aufbauende Spannung) im gleichen Verhältnis verändert, so ändert sich die Brennweite nicht.

Die oben angeführte einfache Rechnung wird unzureichend, wenn es sich nicht mehr um dünne Linsen handelt. Nehmen wir nicht mehr an, daß die Geschwindigkeit des Elektrons beim Durchtritt durch die Linse unverändert bleibt, und benutzen die Gleichung (2) mit den Ausdrücken

$$v = \sqrt{\frac{2e}{m} V}; \quad E_z = -\frac{\partial V}{\partial z} = -V'; \quad \frac{\partial E_z}{\partial z} = -V'',$$

dann erhalten wir

$$v_r = -\frac{1}{4} \sqrt{\frac{2e}{m}}\, r \int \frac{V''}{\sqrt{V}}\, dz.$$

Die Endgeschwindigkeit jenseits von (b) in Richtung Oz beträgt schließlich

$$v_b = \sqrt{\frac{2e}{m}} \cdot \sqrt{V_b}.$$

Das Verhältnis $\frac{v_r}{v} = \frac{r}{f}$ definiert immer die Brennweite, für die man die folgende Gleichung findet:

$$\frac{1}{f} = -\frac{1}{4\sqrt{V_b}} \int_a^b \frac{V''}{\sqrt{V}}\, dz. \tag{4}$$

Es ist klar, daß im Gebiet a der Ausdruck $\sqrt{V_a}$ und im Gebiet b der Ausdruck $\sqrt{V_b}$ benutzt werden muß. Als Linsenformel ergibt sich

$$\frac{\sqrt{V_a}}{p} - \frac{\sqrt{V_b}}{p'} = -\frac{1}{4}\int_a^b \frac{V''}{\sqrt{V}}\, dz.$$

Wir finden also alle Gesetze der geometrischen Optik wieder, und $\sqrt{V}$ entspricht dem Brechungsindex.

Die Aberrationen. Wir wollen die Aberrationen hier nicht behandeln. Ihre Berechnung ist einfach, wenn man eine genaue Untersuchung der Elektronenwege im Bereich (a, b) und genaue Strukturbetrachtungen des elektrischen Feldes usw. durchführt. Außerdem werden wir die Relativitätskorrektur und die gegenseitige Abstoßung der Elektronen bei intensiven Strahlenbündeln nicht berücksichtigen.

Beispiele für elektrostatische Linsen

1. Die beiden Anoden A_1 und A_2 der Elektronenquelle eines Kathodenstrahloszillographen (Abb. 491).

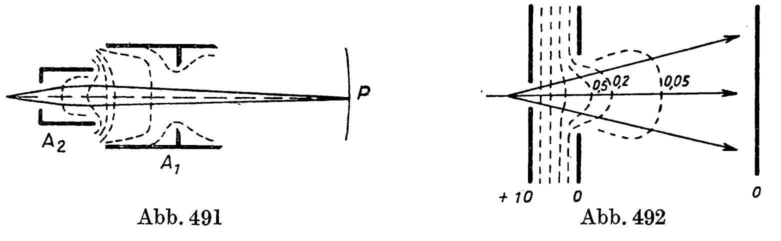


Abb. 491 Abb. 492

Die Äquipotentialfläche für 1500 V ist die Anode A_1 selbst, die für 500 V die Anode A_2. Die zwischen diesen Werten liegenden Potentiale besitzen die gestrichelt gezeichneten Äquipotentialflächen. Sie bilden eine Art optisches Diopter, und die Fokussierung ist nach Einzeichnung einiger Elektronenwege sofort ver-

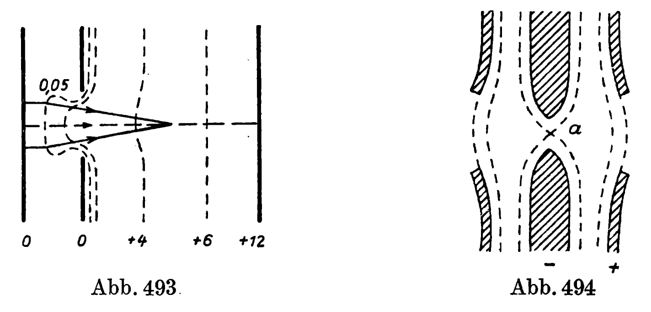


Abb. 493 Abb. 494

ständlich. Diese Linse besitzt übrigens eine doppelte Funktion, sie fokussiert und beschleunigt gleichzeitig.

2. Die Abbn. 492 und 493 zeigen, wie man mit Hilfe dreier ebener Elektroden divergente bzw. konvergente Linsen herstellen kann.

3. Es werden jedoch auch symmetrische Systeme, wie in Abb. 494 dargestellt, benutzt, bei denen a die Rolle eines Diaphragmas spielt. Man kann systematisch nach Analogien zu den aus der Optik bekannten Anordnungen suchen.

Magnetische Linse

Wir betrachten ein zu Oz axialsymmetrisches Magnetfeld, das sich nur in einem schmalen Intervall oberhalb der xOy-Ebene verändert. Die mit der Geschwindigkeit v von unten ankommenden Elektronen werden dabei in einem Brennpunkt fokussiert (Abb. 495). Die Divergenz des Feldes H ist zuerst Null, und wir haben

Abb. 495

$$H_r = -\frac{r}{2}\frac{\partial H_z}{\partial z}, \tag{5}$$

eine Formel, die Gleichung (1) entspricht.

Tritt das Elektron in einen Bereich, in welchem H_z zu existieren beginnt, so wird es nicht gegen die Achse, sondern *senkrecht* dazu abgelenkt. Dabei nimmt es eine Geschwindigkeit v_y an:

$$m\frac{dv_y}{dt} = H_r ev.$$

Diese Geschwindigkeit wächst also in der Zeit dt um den Betrag

$$H_r \frac{e}{m} v\,dt$$

an.

Nun ist jedoch $vdt = dz$, und man findet bei Berücksichtigung der Gl. (5)

$$dv_y = -\frac{r}{2}\frac{e}{m}\frac{\partial H_z}{\partial z}dz.$$

Sobald durch diesen Mechanismus v_y hervorgerufen wird, wirkt die Komponente H_z und ruft ihrerseits die geforderte Geschwindigkeitskomponente v_r hervor:

$$m\frac{dv_r}{dt} = H_z ev_y.$$

Dies kann man

$$md\left(\frac{dv_r}{dt}\right) = H_z e dv_y = -\frac{r}{2}\frac{e^2}{m} H_z \frac{\partial H_z}{\partial z} dz$$

umschreiben, woraus sich

$$\frac{dv_r}{dt} = -\frac{r}{4}\frac{e^2}{m^2} H_z^2$$

ergibt. Setzen wir nun $v\,dt = dz$, so erhalten wir

$$dv_r = -\frac{r}{4}\,\frac{e^2}{m^2}\,\frac{1}{v}\,H_z^2\,dz$$

und für die Ablenkung

$$\frac{v_r}{v} = -\frac{r}{4}\,\frac{e^2}{m^2 v^2}\int H_z^2\,dz.$$

Dieser Ausdruck läßt sich durch Einführung von

$$\frac{1}{2}\,m v^2 = e V$$

weiter umformen. Dabei ist V das Beschleunigungspotential des Teilchens. Wenn wir beachten, daß $v_r/v = r/f$ ist, dann erhalten wir für die Brennweite der magnetischen Linse den Ausdruck

$$\frac{1}{f} = -\frac{e}{8\,m V}\int H_z^2\,dz. \tag{6}$$

Das Integral ist dabei über den Bereich zu erstrecken, in dem sich das Magnetfeld entlang Oz verändert und eine Radialkomponente besitzt.

Es muß noch beachtet werden, daß bei dicken Linsen v während des Durchtritts verändert wird. Die gleiche Rechnung führt bei Berücksichtigung dieser Veränderung zu der Formel

$$\frac{1}{f_a} = -\frac{e}{8\,m\sqrt{V_a}}\int\frac{H_z^2\,dz}{\sqrt{V}}; \tag{7}$$

f_a ist dabei die Brennweite im Medium a, in welchem das Potential V_a existiert.

Beachtung ist dabei immer den *Einheiten* zu schenken. Unsere Formeln gelten in elektromagnetischen Einheiten, und sowohl e als V müssen in (6) und (7) in elektromagnetischen Einheiten eingesetzt werden.

Wir können also sagen:

1. Die Brennweite verändert sich mit dem *Quadrat* des magnetischen Feldes, wobei die Richtung des Feldes *ohne Bedeutung* ist.

2. Die Brennweite hängt vom Verhältnis $\frac{e}{m}$ des Teilchens ab: Sind Elektronen gut fokussiert, so trifft dies für Ionen mit großer Masse nicht zu.

3. *Das Bild ist gegenüber dem Objekt um einen bestimmten Winkel gedreht.* Diese Drehung resultiert aus der Existenz von v_y. Sie kann durch Anwendung einer aus zwei gleichen einfachen Linsen (deren Felder sich zueinander in umgekehrtem Sinn verändern) zusammengesetzten Linse *vermieden* werden.

4. Da

$$e_{\text{el. magn.}} = \frac{e_{\text{el. stat.}}}{c}; \quad V_{\text{el. magn.}} = c\,V_{\text{el. stat.}}$$

gilt, erhalten wir

$$\frac{1}{(f_a)_{\text{cm}}} = -\frac{e_{\text{el.stat.}}}{8\,mc^2} \cdot \frac{1}{\sqrt{V_a}_{\text{ el.stat.}}} \cdot \int \frac{H^2_{z\,\text{Gauss}}}{\sqrt{V}_{\text{el.stat.}}}\, dz.$$

Wir können also schreiben:

$$mc^2 = e V_0;$$

V_0 ist dabei das *Bildungspotential* des Teilchens (500000 V für ein Elektron), und daraus folgt

$$\frac{1}{(f_a)_{\text{cm}}} = -\frac{1}{8\,V_0\sqrt{V_a}} \int \frac{H_z^2}{\sqrt{V}}\, dz.$$

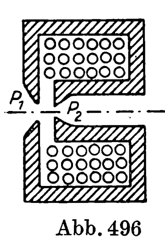


Abb. 496

Die V sind dabei in elektrostatischen Einheiten anzugeben. Setzen wir H_z in Gauß ein und die Spannungen in Volt, so erhalten wir

$$\frac{1}{f_a} = -\frac{90000}{8\,V_0\sqrt{V_a}} \int \frac{H_z^2}{\sqrt{V}}\, dz. \tag{8}$$

Beispiele für magnetische Linsen. Das Hauptproblem bei der Konstruktion magnetischer Linsen ist die Erreichung einer geringen Dicke und kleiner Dimensionen für bestimmte Verwendungszwecke (Objektive für Elektronenmikroskope). Dies erreicht man durch *abgeschirmte Spulen*, wie sie in Abb. 496 dargestellt sind. Eine solche Spule befindet sich in einem Weicheisengehäuse, welches in der Mitte ein Loch und einen runden Spalt besitzt. Die Konzentration des Feldes wird durch Verwendung großer Polschuhe P_1 und P_2 verbessert. Für Elektronen von 50 kV erreicht man Brennweiten in der Größenordnung von 1 bis 2 mm.

Das Hodoskop

Im Jahre 1946 hat J. Loeb festgestellt, daß ein leitender Draht (dessen Gewicht und dessen Steifigkeit vernachlässigt werden), an dem eine mechanische *Spannung* liegt, der sich in einem magnetischen Feld befindet und von einem Gleichstrom i durchflossen wird, im Raum die Lage einnimmt, die dem Weg eines geladenen Teilchens mit konstanter Geschwindigkeit im gleichen Feld entspricht.

Der Beweis dieser Behauptung ist leicht zu erbringen. Wir bezeichnen mit U (Abb. 497) die Spannung am Draht. Die von dem senkrechten Feld H_n hervorgerufene Laplace-Kraft steht in bezug auf den Draht mit der Komponente $U\,\frac{ds}{R_1}$, die senkrecht auf den Spannungen U, U an den Enden des Drahtelements ds steht, im Gleichgewicht. Es ist also

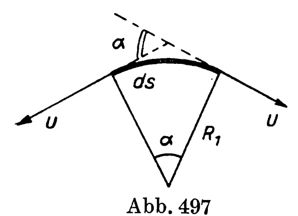


Abb. 497

$$H_n i\, ds = \frac{U\, ds}{R_1}$$

oder

$$R_1 = \frac{U}{i H_n}.$$

Für ein Teilchen mit der Masse m, der Geschwindigkeit v und der Ladung e findet man den Krümmungsradius seiner Bahn zu

$$R_2 = \frac{m v}{e H_n}.$$

Durch geeignete Wahl von U und i kann man also auf jeden Fall R_1 gleich R_2 erreichen, d.h., die Wege stimmen überein.

Diese Anordnung kann zur Untersuchung von magnetischen Linsen, verschiedenen magnetischen Fokussierungsanordnungen usw. benutzt werden.

Das Elektronenmikroskop

Die beste, jedoch nicht die einzige Anwendungsmöglichkeit der Elektronenoptik bietet zweifellos das Elektronenmikroskop.

Wir wollen annehmen, daß ein beliebiges Objekt im Vakuum Elektronen aussende. Dann können wir diese Elektronen beschleunigen und ein vergrößertes Bild des Objekts auf einem Fluoreszenzschirm oder einer photographischen Platte erzeugen. Dies ist das Prinzip des Elektronenmikroskops. Es wird angewendet auf Emissionskathoden oder auf Körper, die eine Sekundäremission aufweisen, d. h. außerordentlich „günstige" Objekte darstellen. Man kann jedoch auch ein Objekt mit einem feinen Elektronenstrahl abtasten und die dabei elastisch reflektierten Elektronen beobachten oder dünne Objekte durchstrahlen und die mehr oder weniger starken Schatten untersuchen, die beim Durchgang der Elektronen auftreten.

Auflösungsvermögen. Der Vorteil des Elektronenmikroskops gegenüber dem optischen Mikroskop ist sein Auflösungsvermögen, das sehr hoch sein kann. In einem *gut konstruierten* Mikroskop ist das Auflösungsvermögen *einzig* durch die *Beugung* begrenzt. Der noch aufzulösende Abstand auf dem Objekt ist durch die klassische Formel $d = \frac{1{,}22\,\lambda}{2 n \sin\alpha}$ gegeben, in der α der halbe Öffnungswinkel, λ die Wellenlänge des verwendeten Lichts und n der Brechungsindex des Mediums, in dem sich das Objekt befindet, sind. Durch diese Formel wird die tatsächliche Grenze des Auflösungsvermögens eines optischen Mikroskopes bestimmt. Für eine Wellenlänge $\lambda = 6 \cdot 10^{-5}$ cm und $2n \sin\alpha = 1{,}4$ für Immersionsobjektive erhält man im Grenzfall ein Auflösungsvermögen, das in der Größenordnung eines Mikrons liegt. Die unter günstigsten Bedingungen errichbare Vergrößerung beträgt 2000. Man kann also mit diesem Mikroskop Punkte auflösen, die weiter als $0{,}2\,\mu$ voneinander entfernt sind.

Für das Elektronenmikroskop berechnen sich die Beugungseffekte nach den gleichen Formeln wie in der Optik, wenn für die Wellenlänge λ die de-Broglie-Wellenlänge eingesetzt wird (siehe das vorige Kapitel). Beschleunigt man die Elek-

tronen mit 100000 V, so errechnet sich λ zu ungefähr $4 \cdot 10^{-10}$ cm. Sind alle anderen Bedingungen die gleichen, so ergibt sich für das Elektronenmikroskop ein 150000mal so hohes Auflösungsvermögen wie für das optische Mikroskop.

Diesen großen Vorteil kann man jedoch nicht vollständig ausnutzen, da die Elektronenlinsen *Aberrationen* aufweisen, die man nicht korrigieren kann. Dadurch wird man gezwungen, die numerischen Öffnungen zu verkleinern, und ein Verhältnis von $2n \sin\alpha = \frac{1}{100}$ ist bereits als gutes Ergebnis zu bezeichnen. Das Auflösungsvermögen ist also tatsächlich nur 1500mal so groß wie das optische und beträgt etwa 0,6 mμ. Dies ist auch die Größenordnung, die zu erreichen möglich ist. Es wurde jedoch bereits von Auflösungen bis zu 0,2 mμ berichtet.

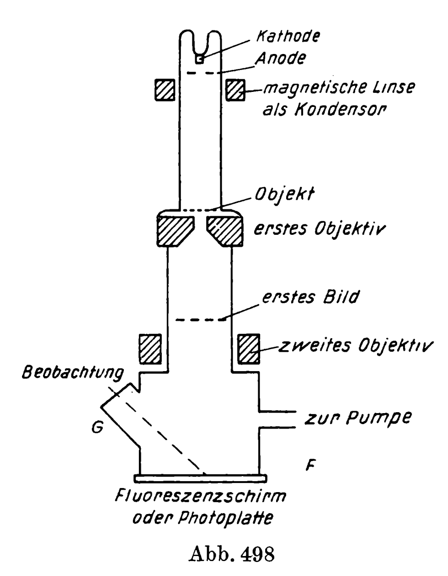


Abb. 498

Die Beschreibung des Aufbaus ergibt sich aus unseren bisherigen Betrachtungen. In Abb. 498 ist ein *Mikroskop mit magnetischen Linsen* dargestellt. Nacheinander sind dabei eine thermoionische Kathode (z.B. ein Wolframdraht), eine durchbrochene Anode und eine als Kondensor dienende erste Spule angeordnet. Diese richtet einen Elektronenstrahl durch magnetische Fokussierung auf ein bestimmtes Objekt O. In einer Entfernung von 1 bis 2 mm von O befindet sich eine magnetische Anordnung, die ein Objektiv darstellt und in der Abbildung durch eine einzige Linse schematisiert ist. Dieses Objektiv liefert ein vergrößertes elektronisches Bild, das man bereits auf einem Fluoreszenzschirm genau untersuchen kann (wodurch eine Vorwahl des zu untersuchenden Bereiches gewährleistet wird). Eine weitere magnetische Linse dient als Okular. Durch sie wird ein reelles Bild des Objekts in F, z. B. auf einem Fluoreszenzschirm, erzeugt. Dieses Bild beobachtet man mit einer Lupe durch eine Glasscheibe G. An Stelle des Fluoreszenzschirmes kann man auch eine photographische Platte anbringen. Schließlich ist zur Erzeugung und Aufrechterhaltung eines Hochvakuums eine Pumpe angeschlossen.

Die Photoplatte wird durch die schnellen Elektronen belichtet, indem diese eine gewisse Fluoreszenz von Röntgenstrahlen hervorrufen, die ihrerseits auf das Silberbromid wirken. Es ist vorteilhaft, Platten mit sehr feinem Korn zu verwenden.

Das *elektrostatische Mikroskop* besitzt im allgemeinen einen ähnlichen Aufbau, bei dem nur die magnetischen Linsen durch elektrostatische Linsen ersetzt sind.

Man kann selbstverständlich eine *Vergrößerung* des Elektronenmikroskops definieren. Man hat dabei Werte in der Größenordnung von 100000 angegeben, die jedoch täuschen können, da durch Beobachtung des Fluoreszenzschirms oder der Platte zu leicht eine bestimmte Vergrößerung errechnet werden kann. Bei einer Vergrößerung von 100000 war man in der Lage, große Moleküle mit Dimensionen von 100 Å zu „sehen" (sie hatten die Form von 1 mm langen Stäbchen). Man konnte

auch durch scharfe Punkte die Lage der Radikale in den gebräuchlichen chemischen Formeln finden. Ganz abgesehen sei hier von den biologischen Entdeckungen, die das Elektronenmikroskop gestattete.

Es ist nach allem besser, die Güte eines Elektronenmikroskops durch sein Auflösungsvermögen zu charakterisieren. Wie wir bereits erwähnten, ist eine Auflösung von 0,4 bis 0,2 mμ erreicht worden (40–20 Å). Bei diesen starken Vergrößerungen kommt jedem Fehler eine enorme Bedeutung zu: Die geringste Unregelmäßigkeit bei der Fabrikation der elektrostatischen bzw. magnetischen Linsen, ein Staubkörnchen auf dem Rand einer elektrostatischen Elektrode rufen neue Fehler hervor, die sehr viel größer sind als die klassischen Aberrationen.

Indessen sind auch die Aberrationen sehr lästig: Zur Korrektion der „chromatischen“ Aberration, die durch die ungleichen Geschwindigkeiten der Elektronen (die zwar alle durch das gleiche Potential beschleunigt werden, jedoch ursprünglich ungleiche thermische Geschwindigkeiten besaßen) hervorgerufen wird, benutzt man zusammengesetzte Linsen. Die *sphärische Aberration* kann man jedoch nicht vollständig korrigieren, da man keinen Einfluß auf die Gesetzmäßigkeit hat, nach der sich die radialen Felder H_r und E_r als Funktion des Radius verändern.

Analogien zwischen geometrischer Optik und Elektronenoptik

Einem jeden Problem der Elektronenoptik entspricht ein Problem der geometrischen Optik. Sie sind durch das Gesetz $\sqrt{V} = n$ verbunden. Umgekehrt entspricht jedoch nicht jedem Problem der geometrischen Optik ein Problem der Elektronenoptik, da eine Verteilung $n(x, y, z)$, um einem Potential $V = V(x, y, z) = n^2$ zu entsprechen, die Gleichung

$$\Delta V = 0$$

befriedigen müßte, d.h., es wäre $\Delta n^2 = 0$, was im allgemeinen nicht der Fall ist.

Es ist also natürlich, daß es in der Elektronenoptik an Möglichkeiten mangelt, die Aberrationen wie in der klassischen Optik zu korrigieren.

Wegen der Proportionalität der Aberration mit der Brennweite und der dritten Potenz des Öffnungswinkels hat man bis heute in der Elektrostatik keine Möglichkeit gefunden, die Öffnung größer als einige Hundertstel zu machen.

Es ist klar, daß man dadurch an *Tiefenschärfe* gewinnt, und trotz der angewandten starken Vergrößerungen treten in den Elektronenmikroskopen wegen der geringen Öffnungen von dieser Seite keine Schwierigkeiten auf.

Das Elektronenmikroskop muß gut gegen magnetische Nebenfelder abgeschirmt werden, die z.B. durch Wechselstromleitungen verursacht werden und unzulässige Ablenkungen der Elektronen verursachen können. Man sichert dies durch eine vollständige magnetische Abschirmung.

Weitere Begrenzungen der Elektronenmikroskopie

Folgende wichtige Bemerkungen zu diesem Problem wurden 1946 von L. de Broglie veröffentlicht: Die Öffnung des Elektronenstrahls gestattet dem Elektron, *schräg* auf das zu untersuchende Objekt zu fallen. Durch diesen Aufprall kann das Objekt seitlich verschoben werden, so daß das folgende Elektron eine veränderte

Lage vorfindet. Dadurch würde das Bild verfälscht, und wir müssen eine weitere Begrenzung des Auflösungsvermögens feststellen. Die Teilchen dürfen also keine zu große Energie besitzen. Wegen dieser Tatsache kommt der *Mikroskopie mit Protonen* weniger Bedeutung zu, die sonst von anderen Gesichtspunkten sehr interessant wäre (geringere Beugung; die Teilchen besitzen eine 2000mal so große Masse). Sind die auffallenden Teilchen nämlich sehr energiereich, so können sie das zu untersuchende Objekt zerstören, es ionisieren oder zersetzen. Eine weitere Begrenzung ist die, wenn auch geringe, thermische Bewegung des zu untersuchenden Objektes.

III. KAPITEL

Photoelektrischer Effekt. Photokathoden. Photoemissionsröhren

Im Jahre 1887 stellte H. HERTZ bei seinen Experimenten mit Resonatoren fest, daß bei einem Empfangsresonator bereits bei größeren Elektrodenabständen ein Funken überspringt, wenn er von den Funken des Erregers beleuchtet wird. Dies ist ein photoelektrischer Effekt, wie HERTZ bewies, als er mit einer ultravioletten Lichtquelle das gleiche Ergebnis erhielt. Er stellte fest, daß der Effekt empfindlicher war, wenn die *Kathode* beleuchtet wurde.

Die HERTZschen Ergebnisse kann man den 1888 von HALLWACHS ermittelten gegenüberstellen, nach denen ein isolierter Leiter unter dem Einfluß von Licht seine Ladung verliert. HALLWACHS benutzte dazu eine Zinkelektrode, die er ultraviolettem Licht aussetzte. Diese verlor ihre Ladung, wenn sie negativ war, behielt sie jedoch bei positiver Ladung.

1889 entdeckten ELSTER und GEITEL den gleichen Effekt an Kalium und Natrium und konstruierten die erste photoelektrische Vakuumzelle mit einer Kathode und einer Anode: Legt man zwischen Kathode und Anode eine Spannung, so fließt bei Beleuchtung der Kathode ein Strom.

Durch die Entdeckung des Elektrons im Jahre 1897 durch J. J. THOMSON und durch die EINSTEINsche Quantenbeziehung (1905) wurde dieses Phänomen erklärt.

Grundlagen und die EINSTEINsche Theorie

Wir betrachten eine von ELSTER und GEITEL konstruierte Zelle (Abb. 499), in der K die Kathode und A die Anode bedeuten. Trifft auf die Kathode ein Lichtstrom, der eine Frequenz ν größer als eine bestimmte Grenzfrequenz ν_0 enthält, so sendet die Kathode Elektronen aus. Diese werden durch die Anode gesammelt, die ihrerseits auf einem positiven Potential liegt. Die *Anzahl* dieser Elektronen ist dem auffallenden Lichtstrom proportional. Die Energie eines jeden Elektrons ist jedoch der *Qualität* und nicht der *Quantität (oder Intensität)* des einfallenden Lichtes proportional. Tatsächlich verlassen die Elektronen die Kathode mit einer Geschwindigkeit v. Sie besitzen also eine kinetische Energie $\frac{1}{2}\,mv^2$, und es gilt

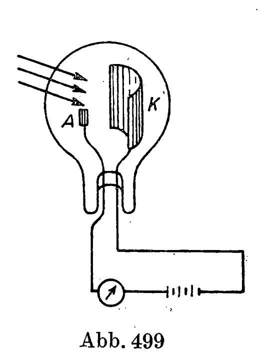


Abb. 499

$$\frac{1}{2}\,mv^2 = h\nu - h\nu_0;$$

h ist dabei die in der Quantentheorie eine große Rolle spielende PLANCKsche Konstante und $h\nu$ die Energie des einfallenden Lichtquants der Frequenz ν. Der Wert von h beträgt $6{,}622 \cdot 10^{-27}$ CGS-Einheiten.

Wir können also sagen, daß die einfallende Energie $h\nu$

1. eine bestimmte Arbeit $h\nu_0$ im photoelektrischen Körper leistet, um das Elektron abzulösen. Dies ist die sogenannte *Austrittsarbeit.*

2. dem Elektron eine kinetische Energie erteilt, die gleich der restlichen Energie $h\nu - h\nu_0$ ist.

Wir werden noch sehen, daß diese Tatsachen mit der EINSTEINschen Theorie in guter Übereinstimmung sind.

Man hätte annehmen können, daß das Quant $h\nu$ nicht seine gesamte Restenergie dem Elektron übermittelt, sondern eine Größe $h\nu_1$ mit einer viel niedrigeren Frequenz ν_1 wie beim COMPTON-Effekt verbliebe. Ein solcher Effekt wurde jedoch nicht gefunden.

Ebenso kann man auch die den Energien entsprechenden Potentialdifferenzen einführen.

Wir setzen

$$\frac{1}{2}\, m v^2 = e\, V,$$

wobei e die Ladung des Elektrons ist. Es ist V die Potentialdifferenz, die ein ursprünglich in Ruhe befindliches Elektron durchfallen muß, um die kinetische Energie $\frac{1}{2}\, m v^2$ zu erlangen. Diese Potentialdifferenz V hat eine physikalische Bedeutung (Abbn. 500 und 501). Beleuchten wir die Kathode K, dann treten die Elektronen mit der Geschwindigkeit v aus. Liegt jetzt ausnahmsweise an der Anode ein gegenüber der Kathode negatives Potential $-V_1$, dann stößt die Anode besonders die Elektronen ab, deren Geschwindigkeitskomponente in Richtung A klein ist. Bei Vergrößerung des Potentials V_1 werden immer mehr Elektronen abgestoßen. Ist $V_1 = V$, dann werden alle Elektronen abgestoßen, und in der Zelle fließt kein Strom. Bei positivem V_1 dagegen werden alle Elektronen von der Anode aufgefangen, und der Strom bleibt konstant. Man stellt also fest, daß der Strom dem auf die Kathode fallenden Lichtstrom Φ_1, Φ_2 usw. proportional ist. *Die negative Potentialschwelle* $-V$ *hängt jedoch nicht von dem Lichtstrom* Φ *ab.* Diese Resultate sind in Abb. 501 dargestellt.

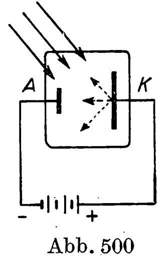


Abb. 500

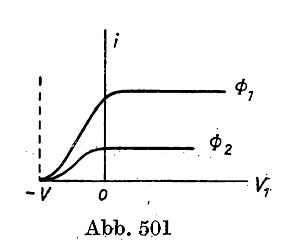


Abb. 501

Vom gleichen Standpunkt aus definiert $e V_0 = h\nu_0$ eine andere Potentialdifferenz V_0, die der Austrittsarbeit entspricht. Dabei ist V_0 die Schranke bzw. *Potentialschwelle,* die das Elektron beim Austritt überwinden muß.

Selbst wenn das Elektron im Metall frei beweglich ist, kann man sich die Notwendigkeit dieser Schranke leicht klarmachen. Verläßt ein Elektron das ursprünglich neutrale Metall, so erhält dieses eine gleich große positive Ladung. Dadurch wird das Elektron, wenn es sich in der Entfernung a befindet, durch das Potential $\frac{e}{a}$ angezogen. Numerisch beträgt der Wert von V_0 etwa 3 V, d. h. $\frac{1}{100}$ elektrostatische Einheiten. Da e in elektrostatischen Einheiten $4{,}805 \cdot 10^{-10}$ beträgt, ist also $\frac{e}{a} = \frac{1}{100}$, wenn $a = 4{,}8 \cdot 10^{-8}$ cm beträgt. Diese Entfernung ist kaum größer als die Atomdimension. Wir können also einfach annehmen, daß das Austrittspotential V_0 durch die Notwendigkeit gegeben ist, das Elektron von einer positiven Ladung, die an der Austrittsstelle aus dem Metall liegt, abzutrennen.

Handelt es sich nicht um ein freies Elektron, wenn es also in der Elektronenhülle eines Atoms sitzt, muß das Ionisationspotential dieses Atoms übertroffen, also gegen die Bindungskräfte, die es im Atomverband halten, Arbeit geleistet werden. Man findet jedoch niemals, daß das Austrittspotential V_0 einer metallischen Kathode das Ionisationspotential erreicht. Nebenbei bemerkt, ist dies ein Beweis für die Existenz von freien Elektronen im Metall.

In der folgenden Tabelle I sind für eine Anzahl von Elementen die Austrittspotentiale V_0 und die Ionisationspotentiale V_i angegeben. Die Anordnung der Elemente in Gruppen entspricht dem Periodischen System.

Tabelle I

	V_i	V_0		V_i	V_0
Li	5,4	—	Zn	9,4	3,4
Na	5,1	2,5	Fe	7,9	4,8
K	4,3	2,3	Ni	7,6	5,0
Rb	4,2	2,1	Mo	7,4	4,1
Cs	3,9	1,8			
			He	21,5	
Mg	7,6	2,4	Ar	15,7	
Ca	6,1	2,3	Kr	14,0	
			Xe	12,1	

Aus dieser Tabelle können wir entnehmen, daß bei den Alkalimetallen die Austrittspotentiale V_0 ziemlich genau den halben Ionisationspotentialen entsprechen. Dieser Erscheinung kann man eine sehr einfache Erklärung geben, die darauf beruht, daß die freien Elektronen im metallischen Zustand der FERMI-Statistik gehorchen, auf die wir hier nicht weiter eingehen wollen.

In Tabelle II geben wir einen Zusammenhang zwischen den Spannungen V und den dazugehörigen Wellenlängen im Vakuum[1]), die die entsprechende Energie des Quants angeben:

$$e V = h\nu; \quad \nu = \frac{c}{\lambda}; \quad \lambda = \frac{hc}{eV}.$$

[1]) Diese Tabelle ist entnommen aus C. G. BEDREAG, Comptes rendus de l'Académie des Sciences **19**, Seite 354, 1946.

Tabelle II

$V = 1$ Volt	$\lambda = 12394$ Å
2	6297
3	4131
4	3098,5
5	2475
6	2066
7	1770

Man findet $\frac{h\,c}{e} = 12394$, wenn V in Volt und λ in Ångström (10^{-8} cm) angegeben werden. Die Grenze des sichtbaren Lichts gegen das Ultraviolette liegt bei 4000 Å[1]). Dies entspricht gerade 3,1 V. Besitzt eine Kathode ein größeres Austrittspotential als 3,1 V, so kann sichtbares Licht kein Elektron ablösen. Dies gilt z.B. für Zink mit $V_0 = 3{,}4$ V, das nur für ultraviolettes Licht photoelektrisch ist (vgl. H. Hertz).

Das Austrittspotential wird auch *Arbeitsfunktion* genannt.

Aus unseren bisherigen Betrachtungen ersieht man einige Bedingungen, denen der Körper genügen muß, um einer starken Photoemission fähig zu sein:

a) Er muß das Licht absorbieren, d.h., er darf weder ein durchsichtiges Dielektrikum noch ein gut leitendes Metall sein, in welches das Licht nicht eindringt.

b) Er muß schwach gebundene Elektronen, d.h. ein niedriges Ionisationspotential, besitzen, was einem geringen Austrittspotential entspricht.

c) Er darf kein Isolator sein, da sonst ein ausgesandtes Elektron nicht zurückgezogen wird. Dadurch entstünde auf dem Körper ein Potential, das einer neuen Elektronenemission entgegenwirken würde. Da nun der Körper kein extrem guter Leiter sein darf (weil das Licht in einen solchen nicht eindringt), können wir erwarten, daß die *Halbleiter* zu den photoelektrisch günstigen Substanzen gehören.

Photowiderstandszellen

Wir wollen nun einen Halbleiter wie Thalliumsulfid, Bleisulfid oder Bleiselenid betrachten. Dabei werden wir feststellen, daß der Widerstand dieser Körper in starkem Maße von der Art ihrer Herstellung abhängt. Das Bleisulfid, PbS, wird ein Isolator sein, wenn Pb und S im stöchiometrischen Verhältnis stehen (wenn also nur PbS-Moleküle existieren). Ist dagegen ein geringer Überschuß an Blei oder an Schwefel vorhanden, so wird dadurch ein Gitter freier Elektronen oder entsprechend ein Gitter von positiven „Löchern" gebildet, wodurch dieses Bleisulfid zum Leiter wird. Sind mehrere dieser Körper in dünnen Schichten angeordnet, so machen Regularität des Aufbaus und die Art, in der die kleinen Kristalle aneinanderliegen, sowie die gleiche Größe der Kristalle diese Gitter mehr oder weniger beweglich.

---

[1]) Wir erinnern uns daran, daß das sichtbare Licht zwischen 4000 Å und 7600 Å, d.h. zwischen 3 V und 1,5 V, liegt. Das infrarote Gebiet entspricht größeren Wellenlängen, also kleineren Potentialen als 1,5 V.

Ein „Halbleiter“ ist nun hauptsächlich dadurch charakterisiert, daß sein Widerstand sehr schnell mit der Temperatur abnimmt. Bei einer Temperaturerhöhung um 20° kann sich z. B. der Widerstand bereits auf die Hälfte verringern, während der Widerstand von Metallen mit der Temperatur anwächst.

Besitzt die thermische Energie einen solchen Einfluß auf das Gitter der Leitungselektronen eines Halbleiters, so braucht ohne Zweifel nur eine sehr geringe Energie aufgewandt zu werden, um ein gebundenes Elektron in das freie Gitter zu überführen. Tatsächlich ist die Energie $\frac{1}{2}\frac{RT}{N}$ eines molekularen Freiheitsgrades bei 300° K gerade gleich eV. Mit $V = \frac{1,2}{100}$ Volt entspricht dies einem Quant im äußersten Infrarot, d. h. einer Wellenlänge von ungefähr $100\,\mu$. Dies läßt uns annehmen, daß *der Widerstand der Halbleiter durch die Beleuchtung selbst mit sehr großen Wellenlängen verändert* wird.

Tatsächlich ist dies oft der Fall. In Abb. 502 ist eine *Bleisulfidzelle* dargestellt. In dem luftleeren Glasgefäß (das Vakuum sichert die Unveränderlichkeit der Schicht und ist außerdem für die Empfindlichkeit notwendig) befindet sich eine dünne PbS-Schicht AB (die durch Aufdampfen, chemische Anlagerung usw. erzeugt wurde). Eine Fläche von 1 cm² entspricht ungefähr einem Widerstand von 100000 Ω bei Zimmertemperatur. Zwei Elektroden dienen zur Stromzuführung. Mit Hilfe einer Batterie von etwa 50 V wird über einen großen Widerstand R (der in Größenordnung des Zellenwiderstandes liegt) eine Potentialdifferenz angelegt. Beleuchtet man nun die Schicht, so verringert sich ihr Widerstand, und die Potentialdifferenz an den Klemmen von R verändert sich. Diese Veränderung kann man verstärken und hat, mit anderen Worten, so eine *Photowiderstandszelle*.

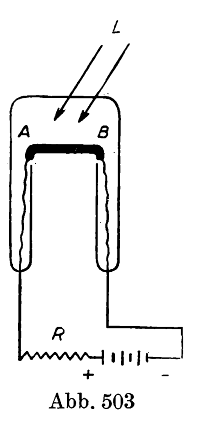


Abb. 503

Es gibt keinen Zweifel über die photoelektrische Wirkung des Lichtes auf die Schicht. Tatsächlich beträgt die Anzahl der Lichtquanten, die ein Elektron auslösen, nur 1 bis 2% der gesamten einfallenden Lichtquanten, d. h. die gleiche Größenordnung wie beim sogenannten photoelektrischen Effekt. Weiterhin ist der Effekt nicht lokalisierbar: Bilden wir auf einer 1 cm² großen PbS-Schicht in einer Zelle eine Lichtquelle punktförmig ab, dann tritt das gleiche elektrische Signal auf, als fiele der gleiche Lichtstrom auf die gesamte Schicht. Mit anderen Worten, es wird eine bestimmte Anzahl Photoelektronen befreit und in das Leitungsgitter überführt. Hätte es sich um irgendeine lokale Strukturveränderung des Widerstandes gehandelt, so wäre die geometrische Verteilung des Lichts von Bedeutung gewesen. Dagegen ist eine bedeutend höhere Energie als $^1/_{100}$ Volt notwendig, um diesen Effekt zu erhalten. Man findet Werte von ungefähr $^1/_5$ bis $^1/_6$ V, wodurch die Grenze der Empfindlichkeit bei Wellenlängen von $6\,\mu$ liegt. Dies kann mit Hilfe der Quantenmechanik sehr gut erklärt werden, die tatsächlich Energieniveaus dieser Größenordnung für die Strukturen kristalliner Leiter liefert. In der Praxis stellt man Zellen her, deren Empfindlichkeitsgrenze bei 3–$5\,\mu$ liegt. Es existiert eine genaue Vorstellung über den Mechanismus ihrer Arbeitsweise, die wir hier jedoch nicht entwickeln wollen.

Quantenausbeute

Die EINSTEINsche Theorie führt uns sofort auf die folgende Frage: wieviel Elektronen werden ausgelöst, wenn 100 Quanten auf eine photosensible Schicht fallen? Für eine graphische Darstellung wählen wir als Abszisse die Wellenlänge λ des einfallenden Lichtes. Bei einer einfallenden Energie von 1 Watt wird es eine Anzahl n Quanten geben, die pro Sekunde einfallen. Diese Anzahl ist gleich $\frac{10^7}{h\nu}$, d.h. proportional zu λ. Würde nun jedes einfallende Quant ein Elektron aus der Kathode ablösen, so erhielten wir aus dieser einen Strom i pro Watt einfallender Energie, der selbst proportional zu λ wäre. Tatsächlich gilt

$$n = \left(\frac{10^7}{h\nu}\right)_{\text{CGS-Einh.}}, \quad \nu = \left(\frac{c}{\lambda}\right)_{\text{CGS-Einh.}} = \frac{3 \cdot 10^{10} \cdot 10^8}{\lambda_{\text{Å}}}, \quad i = \left(\frac{ne}{3 \cdot 10^9}\right)_{\text{A}}$$

mit

$$e = 4{,}805 \cdot 10^{-10}.$$

Der numerische Wert von i ergibt sich zu

$$i = \frac{\lambda_{\text{Å}}}{12500}.$$

Die Kurve der theoretischen Ausbeute (siehe Abb. 503) ist eine Gerade (a), die durch den Ursprung von η verläuft. Aus bisher noch unbekanntem Grunde besitzen jedoch alle reellen Photokathoden eine Ausbeute in Ampere pro Watt, die nur einige Hundertstel oder sogar nur einige Tausendstel der theoretischen Quantenausbeute beträgt. In der Kurve (b) sieht man eine solche tatsächliche Quantenausbeute angegeben. Es ist eine der größten Hoffnungen der Physiker, die Quantenausbeute von Photokathoden zu verbessern. Nebenbei bemerkt ist die Photoemission in starkem Maße von dem Zustand der Oberfläche und besonders von durch die Oberfläche adsorbierten Verunreinigungen abhängig.

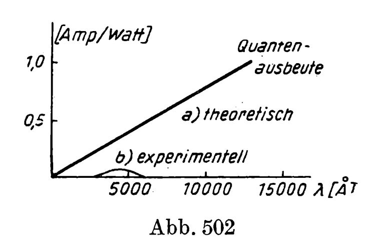


Abb. 502

Photokathoden

1. Die Grenze des sichtbaren Lichtes gegen das Ultraviolette liegt bei 4000 Å, d.h., sie entspricht ungefähr 3,1 V. Daher werden alle Metalle, deren Austrittspotential höher als 3,1 V ist, im Bereich des sichtbaren Lichtes keine photoelektrischen Effekte zeigen. Dies ist bei den meisten Metallen der Fall, wie wir aus Tabelle I ersehen können.

2. Die *Alkalimetalle* wurden zur Konstruktion der ersten Photokathoden im Bereich des sichtbaren Lichtes verwendet, sie waren jedoch sehr wenig empfindlich. Die Quantenausbeute liegt dabei in der Größenordnung von 10^{-4} bis 10^{-5}, d.h., etwa 10000–100000 einfallende Photonen lösen nur ein einziges Elektron aus.

Wir betrachten zum Vergleich das menschliche Auge: Seine maximale Empfindlichkeit liegt im grünen Bereich des Spektrums. Das Auge ist in der Lage, etwa 50 Photonen in der Sekunde noch wahrzunehmen. Da es in 0,1 Sekunde „sehen" kann, sind nur *sehr wenig* Photonen erforderlich, um ein Signal zu geben.

Als Besonderheit der Alkalimetalle ist die Tatsache zu erwähnen, daß für die maximale Empfindlichkeit die Wellenlänge oft nicht genau definiert werden kann (wegen der Verunreinigungseffekte usw.). Die Wellenlänge ist in Tabelle III angegeben und verschiebt sich gegen größere Wellenlängen, wenn man von leichteren zu schwereren Metallen übergeht.

Tabelle III

Lithium	3000—4000 Å
Natrium	3400—4250 Å
Kalium	4100—4560 Å
Rubidium	4600—4800 Å
Cäsium	4800—5500 Å

3. *Die Alkalihydride.* In der Literatur sind viele Möglichkeiten zur „Sensibilisierung" von Kathoden beschrieben worden. Die beste besteht darin, die Photozelle mit Wasserstoff zu füllen und eine Entladung einzuleiten, bei der das Alkalimetall als Kathode wirkt. Die Oberfläche der Kathode verliert ihren metallischen Glanz, und die Empfindlichkeit wächst beinahe um den Faktor 10. Durch den Entladungseffekt tritt eine Bildung von Alkalihydrid auf (HNa, HLi, usw.). Geht jedoch das gesamte Alkalimetall in Alkalihydrid über, dann verschwindet die photoelektrische Empfindlichkeit vollständig.

Heute ist bekannt, daß diese Alkalihydride keine eigene photoelektrische Empfindlichkeit besitzen. Auf ihnen lagert sich jedoch eine Schicht adsorbierter Alkalimetalle an, deren Austrittspotential unter diesen Bedingungen abnimmt, d.h., die Empfindlichkeitskurve wird zum Vorteilhaften verschoben.

4. *Silber-Sauerstoff-Alkalimetall-Photokathoden.* In allen zusammengesetzten Photokathoden ist die Anwesenheit eines Alkalimetalls zur Erreichung einer Empfindlichkeit im sichtbaren Spektrum unerläßlich. Die Verschiebung erfolgt gegen höhere Wellenlängen beim Übergang von Lithium bis zum Cäsium. Wir brauchen also nur die Cäsium-Photokathoden zu beschreiben und zu beachten, daß Quantenausbeute und Wellenlänge der maximalen Empfindlichkeit, selbst bei verschiedenen Photozellen gleichen Typs, von der Vorbehandlung abhängig sind.

Herstellung einer Photokathode

Wir wollen nun die Herstellung einer Ag-O-Cs-Zelle, in der im Vakuum eine Ag-O-Cs-Photokathode enthalten ist, wie sie etwa 1928–1930 gebaut wurde, beschreiben.

1. In das Glasgefäß der Photozelle wird eine Silberplatte eingebracht oder ein Teil der inneren Oberfläche entweder durch eine chemische Methode oder durch Verdampfung eines Silberdrahtes versilbert. Wie bei allen Vakuumröhren wird abgepumpt und auf 400° C erwärmt.

2. Da Silber ein Edelmetall ist, wird es im allgemeinen durch gewöhnlichen Sauerstoff nicht angegriffen. Zu seiner Oxydation benutzt man eine Entladung in Sauerstoff bei einem Druck von 0,1 bis 1 cm Hg. Dabei dient die Silberschicht als Kathode und die normale Anode der Zelle als positive Elektrode. Man kann den Entladungsprozeß durch die Farbveränderungen der Silberoberfläche verfolgen. Diese wird zuerst gelb, dann purpurn, blau und schließlich grün. Jede Farbe entspricht einer bestimmten Oxydationstiefe. Im allgemeinen beendet man die Oxydation zwischen der Blau- und der Grünfärbung, wobei die Tiefe etwa 100 Silberoxydatomen entspricht, der Grad der Oxydation ist jedoch ohne großen Einfluß auf die Empfindlichkeit.

3. Nun evakuiert man von neuem und leitet bzw. führt Cäsium ein. In der Praxis muß man darauf achten, daß das metallische Cäsium beim Einführen in das Glasgefäß nicht mit dem Sauerstoff in Berührung kommt, da sonst eine sofortige Oxydation stattfände. Man verhindert dies, indem man das Cäsium in einer Kapsel durch eine der beiden Reaktionen

$$\mathrm{CsCl + Ca \rightarrow CaCl + Cs},$$

$$\mathrm{Cs_2Cr_2O_7 + Zr \rightarrow ZrCr_2O_7 + 2\,Cs}$$

erst in der Zelle selbst erzeugt.

Diese beiden Reaktionen sind von Interesse, da sie bei 400° C noch nicht beginnen. Zu ihrer Einleitung erwärmt man die Kapsel direkt durch Induktion auf 800–900° C. Der Vorteil dieser Methode ist, daß die Röhre selbst nicht erwärmt wird.

4. Cäsium, das bei tiefen Temperaturen verdampft, schlägt sich auf den kalten Teilen der Röhre und besonders auf der Silberoxyd-Kathode nieder. Dies ist der kritischste Teil der Operation, da das Resultat von einer guten Verteilung des Cäsiums abhängt, die gerade 0,25 mg pro cm^2 betragen muß. Den Vorgang kann man genau durch die Farbveränderungen der Kathode beobachten und die Menge des Materials zu begrenzen versuchen, aus dem das Cäsium gewonnen wird. Diese Verdampfung bleibt jedoch kritisch, und die Empfindlichkeit verändert sich stark von einer Zelle zur anderen. Das Cäsium kann auch in einem kleinen Glasballon erzeugt werden und langsam durch eine Kapillare in die Zelle einströmen. Auf diese Art ist es möglich, die eingeführte Menge zu dosieren.

5. Ist der Niederschlag des Cs beendet, so wird bei 150–250° C noch einmal erwärmt. Es hat sich übrigens als vorteilhaft herausgestellt, nach der Oxydation der Silberschicht oder sogar nach dem Einführen des Cs nochmals eine kleine Silbermenge zu verdampfen.

Die Eigenschaften einer Ag-O-Cs-Photokathode

Die im vorigen Abschnitt beschriebenen Photokathoden besitzen eine Charakteristik, wie sie in Abb. 504 dargestellt ist. Dabei ist jedoch zu beachten, daß die Eigenschaften von einer Zelle zur anderen variieren können. Die maximale Empfindlichkeit beträgt 2 mA pro Watt einfallenden Lichtes bei einer Wellenlänge des

einfallenden Lichtes von ungefähr $\lambda = 8400$ Å. Würde jedes Photon ein Elektron auslösen, dann müßte der Strom 700 mA erreichen, d.h., die Quantenausbeute beträgt nur $\frac{1}{350}$. Die Schwelle oberhalb von 12500 Å zeigt, daß die Austrittsarbeit also geringer ist als 1 Volt. Die etwas komplizierte Form der Kurve deutet auf einen verwickelten Emissionsmechanismus hin.

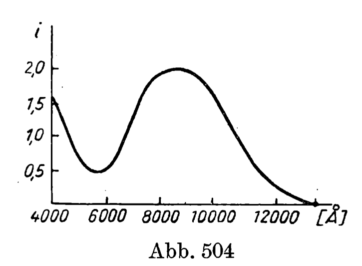


Abb. 504

Hier sei bemerkt, daß der letzte Glühvorgang bei der Fabrikation zur Auslösung der Reaktion

$$2\,Cs + Ag_2O = 2\,Ag + Cs_2O$$

durchgeführt wird.

Die Emission wird also schließlich aus der mit Silberatomen bedeckten Cäsiumoxydschicht erfolgen. In dieser Schicht verbleiben offensichtlich adsorbierte Cäsiumatome. Nimmt man nun an, daß diese Adsorption eine starke Polarisation dieser Atome verursacht, so ist es möglich, daß der Austritt eines Elektrons mit einer nur geringen Arbeit verbunden ist. Dies erklärt die Tatsache, daß die Grenze der photoelektrischen Emission bei nur 1 V liegt.

Die Antimon-Cäsium-Photokathode

Im Jahre 1936 entdeckte Görlich, daß die Alkalimetalle mit Antimon, Wismut, Thallium und Blei Legierungen mit interessanten photoelektrischen Eigenschaften bilden. Als beste derartige Kathode erwies sich die Cäsium-Antimon-Kathode, deren Fabrikation relativ einfach ist. (Zuerst wird eine Sb-Schicht aufgedampft, dann eine Cs-Schicht; bei nachfolgender Erwärmung auf 150–200° C bilden beide eine Legierung, die zur Erhöhung der Empfindlichkeit noch oberflächenoxydiert wird.)

Die Kurve der spektralen Empfindlichkeit für Sb-Cs ist in Abb. 505 dargestellt und günstiger als die einer Ag-O-Cs-Kathode. Die Quantenausbeute erreicht 20%.

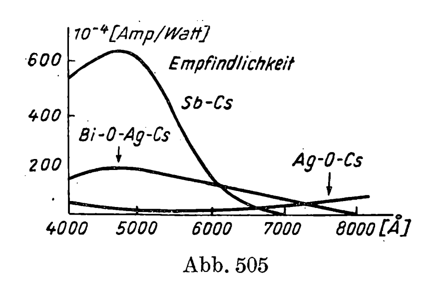


Abb. 505

In den Jahren 1943–45 stellte A. Sommer bei der Untersuchung der Sb-Cs-Kathoden folgendes fest:

1. die *Thermoionenemission* von Photokathoden kann zur Bestimmung ihrer Austrittsarbeit benutzt werden. Diese Emission ist bei Zimmertemperatur für Ag-O-Cs-Kathoden etwa 1000mal stärker als für Sb-Cs-Kathoden. Daraus ersehen wir, daß die Austrittsarbeit bei Sb-Cs-Kathoden größer und die Grenze daher zu 7000 Å verschoben ist.

2. Der spezifische Widerstand der Legierung Sb-Cs ist 10^6 mal größer als jener von Ag-O-Cs und 10^7mal größer als der metallischen Cäsiums. Dieser Widerstand entspricht dem eines Halbleiters. Außerdem ist die Sb-Cs-Schicht für Licht genügend transparent, und alle Umstände begünstigen den photoelektrischen Effekt.

3. Der optimale Cs-Zusatz entspricht der chemischen Formel $SbCs_3$ derart, daß man es nicht mit einer Legierung, wohl aber mit einer *definierten chemischen Zusammensetzung* zu tun hat. Letztere könnte wegen der Außenschicht adsorbierter Cs-Atome photoelektrisch sein.

4. Durch eine Oberflächenoxydation treten Antimon und Cäsiumoxyd auf, von denen ersteres günstig und letzteres ungünstig auf den photoelektrischen Effekt einwirkt. Trotzdem ist bei guter Dosierung die Oberflächenoxydation vorteilhaft.

Andere wichtige Photokathoden

Alle Kombinationen von Alkalimetallen mit Elementen der Reihe As, Bi, Ta, Pb, Au, Sb sind in der Literatur behandelt worden. Die Bevorzugung des Antimons könnte sich durch seinen in bezug auf die anderen Metalle elektronegativen Charakter erklären. Das Cäsium wird dadurch stärker polarisiert und verliert leichter sein Valenzelektron.

In Abb. 505 ist die Empfindlichkeitskurve einer Bi-O-Ag-Cs-Kathode angegeben, die sehr interessant, in der wissenschaftlichen Literatur jedoch nicht behandelt ist.

1955 entwickelte man aus Cs-Sb-Na-K zusammengesetzte Photokathoden mit bedeutsamen Eigenschaften. Ihre Empfindlichkeit erreicht die von Sb-Cs und vergrößert sich beträchtlich gegen gelbes und rotes Licht hin.

Anpassung der Photokathoden an die verschiedenen Beleuchtungsarten

Als bekannt wollen wir hier die Eigenschaften des schwarzen Körpers, der hauptsächlichsten Lichtquellen (Sonne, Bogenlampe, Wolframdrahtlampe, usw.) und die optischen Eigenschaften des Auges voraussetzen. Wir erinnern uns noch einmal des vom Auge wahrnehmbaren Bereiches, der zwischen 4000 Å (blau) und 7600 Å (äußerstes Rot) mit einem bei 5500 Å befindlichen Empfindlichkeitsmaximum liegt.

Nun wollen wir die Zahlen der Tabelle IV betrachten, die uns die Prozentsätze der in die verschiedenen Bereiche – ultraviolett, sichtbar, infrarot – fallenden Strahlung eines schwarzen Körpers (bei verschiedenen Temperaturen) angeben.

Tabelle IV

°K	ultraviolett %	sichtbar %	infrarot %
1 000 (dunkelviolett)		0,001	100
2 000 (orange)	0,0017	1,43	98,6
2 400 Wolframdraht	0,02	4,28	95,7
2 800	0,11	8,78	91,1
3 000	0,22	11,51	88,3
5 000	6,8	37,8	55,5
6 000 Sonne	14,2	43,4	42,5
10 000	48,3	35,7	16,0

Um den Einfluß der Leuchtstärke feststellen zu können, ist man übereingekommen, als Standardverteilung der Wellenlängen das Licht einer Glühlampe bei einer Farbtemperatur von 2848° K zu benutzen. Mit dieser Übereinkunft kann man jetzt

die Empfindlichkeit der Photokathoden in μA pro Lumen angeben und erhält dann die Tabelle V.

Tabelle V

Kathode	μA/Lm
Ag-O-Cs	10 bis 60
Sb-Cs	30 bis 100
Bi-O-Ag-Cs	10 bis 60
Ag-O-Rb	mehr als 30
alle anderen	weniger als 10

Wir können noch folgende Bemerkungen machen: Ag-O-Cs ist als Kathode dem Licht einer Quelle mit niedriger Temperatur schlecht angepaßt, da diese verhältnismäßig viel infrarotes Licht ausstrahlt. Die Verteilung der Sb-Cs-Kathode ähnelt der Empfindlichkeit des Auges. Man hat jedoch auch festgestellt, daß die Sb-Cs-Kathode die empfindlichste der bekannten Kathoden im Bereich bis etwa 2000 Å im Ultravioletten ist. Bi-O-Ag-Cs bietet dagegen den Vorteil einer genügenden Konstanz bei veränderlicher Wellenlänge.

Sättigungsspannung von Vakuum-Photozellen

Die von der Photokathode ausgesandten Photoelektronen bewegen sich in allen Richtungen mit Geschwindigkeiten, die 2 bis 3 V und mehr entsprechen. Umgibt die Anode die Kathode fast vollständig, so ist die „Sättigungsspannung" Null. Die geringste Potentialdifferenz zwischen Kathode und Anode reicht zum Auffangen aller Elektronen aus.

Diese Anordnung ist jedoch nicht wünschenswert, und man bildet oft die Anode als Draht aus, um das von allen Seiten ankommende Licht auf die Kathode fallen zu lassen.

In diesem Fall muß man beachten, daß eine geringe Potentialdifferenz die Elektronenwege nicht genügend krümmt (wegen der nicht zu vernachlässigenden Anfangsgeschwindigkeit) und eine höhere Spannung als die sogenannte Sättigungsspannung notwendig ist, um den von einer bestimmten Lichtstärke erzeugten Photostrom vollständig aufzufangen (Abb. 506).

V
30
0 50 100 [Volt]

Abb. 506

Laufzeit und Frequenzabhängigkeit einer Vakuumzelle

Existiert eine Potentialdifferenz zwischen Anode und Kathode, so benötigt das Elektron, um von der Kathode zur Anode zu gelangen, eine bestimmte Zeit, die sogenannte *Laufzeit*, die man leicht berechnen kann. Bei einer Potentialdifferenz von 100 V und einem Elektrodenabstand von 3 cm findet man diese zu etwa 10^{-8} sec. Daraus folgt, daß die Charakteristik der Zelle als Funktion der Frequenz bei einer gegebenen Lichtstärke waagerecht bis zu Frequenzen in der Größenordnung von 10^8 Hz verläuft.

Gasgefüllte Photozellen

Die Idee, gasgefüllte Photozellen herzustellen, ließ sich nicht ohne Schwierigkeiten realisieren.

Die Ionisationspotentiale der Gase liegen zwischen 10 und 25 V. Übersteigt die Anodenspannung diesen Wert, so sind in der Zelle „primäre" Elektronen (Photoelektronen) vorhanden, deren Beschleunigung zur Ionisation der Gase ausreicht. Vergrößert man die Anodenspannung weiter, so tritt eine Ionisierung auch durch Stöße zwischen positiven Restionen und anderen Molekülen auf, und schließlich weitere Elektronenbildung durch *Sekundäremission*, wobei letztere durch positive Ionen mit genügend hoher Energie beim Auftreffen auf die Kathode ausgelöst werden. Dieses letzte Phänomen muß jedoch genau überwacht werden, da es dabei zu einer Zerstörung der Kathode (durch Erwärmung, chemische Reaktion, usw.) kommen kann. Andere Effekte, wie z.B. Rekombination von Ionen und Elektronen, wirken in entgegengesetztem Sinne.

Die Verstärkung der Zelle hängt in starkem Maße von den Röhrenformen, der Art und dem Druck des Gases ab; der einflußreichste Faktor ist jedoch die Anodenspannung. Ist nämlich die Anodenspannung größer als das Ionisationspotential, so ist jedes Primärelektron fähig, durch Ionisierung ein weiteres Elektron auszulösen. Beträgt die Anodenspannung das Doppelte der Ionisationsspannung, dann kann dieser Prozeß zweimal stattfinden, und es werden bei jeder Emission 4 Elektronen ausgelöst. Von einer bestimmten Anodenspannung an lösen die positiven Ionen aus der Kathode mehrere Elektronen durch Sekundäremission aus. Daraus folgt eine selbsttätige Bogenentladung, die keine photoelektrischen Effekte gestattet. Wir wollen dabei die unter diesen Bedingungen beinahe immer auftretende Zerstörung der Kathode ganz außer acht lassen.

Die Füllgase der Röhren dürfen nicht mit den in den üblichen Kathoden stets enthaltenen Alkalimetallen reagieren. Deshalb müssen wir uns auf Edelgase beschränken, deren Ionisationspotentiale mit wachsendem Atomgewicht nach Tabelle I abnehmen. Man verwendet selten zur Füllung die Gase Krypton oder Xenon, sondern benutzt fast immer Argon. Der Druck liegt zwischen 0,1 und 1 mm Hg, und das Ionisationspotential führt dazu, Anodenspannungen zwischen 80 und 200 V zu verwenden.

Die Form der Zellencharakteristik (μ A/Lm als Funktion der für eine gegebene Beleuchtung angelegten Spannung) ergibt sich leicht aus dem Vorstehenden. Bei niedrigen Spannungen ($0 < V < 20$ V) tritt keine Ionisierung auf, d.h., entspricht Kurve (1) in Abb. 507. Bei einem bestimmten Gasdruck ergibt sich für höhere Spannung die Kurve (2), die bei höherem Druck in die Kurve (3) übergeht (Abb. 507).

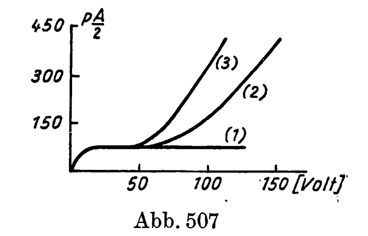


Abb. 507

Diese Kurven verlieren in dem Moment ihre Bedeutung, in dem eine Bogenentladung oder eine Entladung durch Beschuß der Kathode einsetzt. Im *Dunkeln* tritt diese Entladung bei einer Spannung V_0 auf (dem sogenannten „Dunkelentladungspotential") und wird durch thermoionische Elektronen ausgelöst, die beschleunigt werden, ionisieren, usw.

Wird die Zelle jedoch beleuchtet, so erfolgt die Zündung um so leichter, je stärker die Beleuchtung ist. Das Potential, bei dem die Entladung einsetzt, wird mit zunehmender Beleuchtungsstärke kleiner.

Dies ist in der Praxis zur Konstanthaltung des Potentials einer Zelle bei veränderlicher einfallender Beleuchtung von Bedeutung.

Ist die Beleuchtungsstärke einer gasgefüllten Zelle, wie es z.B. bei astronomischen Untersuchungen der Fall ist, nur sehr gering, so kann man das Potential so regulieren, daß diese Zelle gegenüber einer mit gleicher Kathode ausgerüsteten evakuierten Zelle den 100fachen Strom liefert.

Wenn man sicher ist, daß auf die Photozelle nur eine begrenzte Lichtintensität fällt und sie mit dieser geringen Beleuchtung arbeitet (z.B. eine Photozelle, die einen Tonfilm „liest“), dann kann man eine 15- bis 20fache Verstärkung erzielen.

Bei einer starken Beleuchtung der Zelle ist es bereits schwierig, eine 3fache Verstärkung zu erreichen, ohne daß die Gefahr einer Bogenentladung besteht.

Nach allem Gesagten ist es bei keinem Verwendungszweck nötig, den Strom in gasgefüllten Photozellen 10 bis 20 μA übersteigen zu lassen. Man kann auch experimentell feststellen, daß bei einer Spannung, die mehr als 30 V unterhalb des Dunkelentladungspotentials liegt, keine Bogenentladung auftritt, wie stark auch die Beleuchtung sei.

Das Funktionieren einer gasgefüllten Zelle ist natürlich von einem schwachen Leuchten begleitet, das von der Emission von Atom- und Ionenspektren des Gases während der Ionisierung und der Rekombination herrührt.

Frequenzabhängigkeit einer gasgefüllten Photozelle

Aus folgenden Gründen spielt die Frequenz bei einer solchen Zelle eine bedeutendere Rolle als bei einer evakuierten Zelle:

1. Ein Teil des Stromes wird durch die positiven Ionen transportiert. Da die Masse dieser Ionen 80000mal so groß ist wie die Elektronenmasse, besitzen sie eine Laufzeit, die $\sqrt{80000}$mal so groß ist, ohne dabei die zusätzlichen Verzögerungen durch die Molekülstöße zu berücksichtigen.

2. Während der Stöße im Gas stellen sich metastabile Anregungszustände ein, deren Zeitkonstante eine Rolle spielt.

3. Durch die positiven Ionen, die noch nach Beendigung der photoelektrischen Emission (durch Erlöschen des einfallenden Lichtes) auf die Kathode treffen, werden Sekundärelektronen ausgelöst, die die Emissionsdauer fälschlich verlängern.

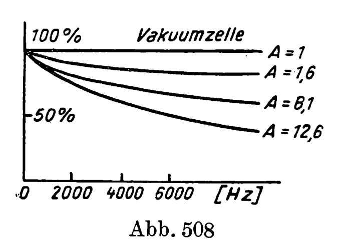


Abb. 508

Diese Effekte sind um so stärker, je weiter man die Ionisation verstärkt, d.h. je höher man die Anodenspannung zur Vergrößerung der Verstärkung wählt.

In Abb. 508 ist der aus einer gasgefüllten Zelle austretende Strom als Funktion der Frequenz aufgetragen, wobei als Parameter A die Verstärkung der gasgefüllten gegenüber der evakuierten Photozelle mit gleicher Kathode dargestellt ist.

Ermüdung

Die Tatsache, daß gasgefüllte Photozellen akustischen Frequenzen nicht zu folgen in der Lage sind, begrenzt natürlich in starkem Maße ihre Verwendungsmöglichkeiten.

Eine weitere Einschränkung wird durch die Kathodenabnutzung bzw. deren *Ermüdung* verursacht: Die quasieinatomige, sehr empfindliche Schicht, die für die Photoemission maßgeblich ist, wird von allen Effekten im allgemeinen negativ beeinflußt:

1. Auf der Kathode sammeln sich nach und nach Fremdatome, die aus den Wänden bzw. der Anode durch auftreffende Elektronen ausgelöst werden („Gifte"). Diese Gifte können besonders durch von der Kathode adsorbierte Gasatome gebildet werden, die infolge einer schlechten Evakuierung bei der Fabrikation in der Röhre verblieben.

2. Einen weiteren Nachteil stellt das Auftreffen positiver Ionen dar, von dem wir bereits gesprochen haben: Diese Ionen fallen natürlich auf die Kathode und zerstören diese, wenn ihre kinetische Energie dazu ausreicht. Man hat festgestellt, daß die Sb-Cs-Kathode besonders empfindlich gegenüber diesem Effekt ist.

Anwendung von Photozellen

Über diese Frage, deren Beantwortung sehr einfach ist, bleibt uns nur sehr wenig zu sagen.

In Abb. 499 war eine Photozelle dargestellt, die über ein in Reihe geschaltetes Galvanometer gespeist wurde. Besitzt das Galvanometer eine Empfindlichkeit von 10^{-8} A, dann kann man auf diese Weise noch Tausendstel Lumen des auf die Kathode fallenden Lichtes messen.

In Abb. 509 ist nun eine Photozelle schematisch dargestellt, die über einen in Reihe liegenden Widerstand R (der zweckmäßig einige MΩ beträgt) gespeist wird. Die Spannung an den Klemmen des Widerstandes verändert sich mit dem veränderlichen fließenden Strom, d.h. mit der einfallenden Beleuchtungsstärke. Diese Spannung gibt man zur Verstärkung auf das Gitter einer Triode. Dabei ist es angebracht, eine besonders gut evakuierte und speziell für diesen Zweck gebaute Röhre zu verwenden, deren Gitterwiderstand unendlich ist, damit vermieden wird, daß der hohe Widerstand R durch einen viel kleineren und unbestimmten Widerstand geshuntet wird.

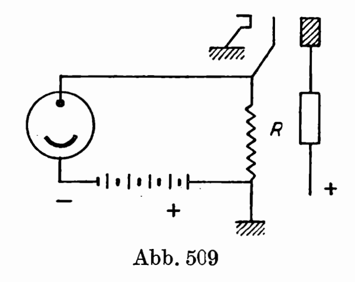


Abb. 509

Für diese Anwendungen hat man die sogenannten *Elektrometerröhren* entwickelt, deren Gitterwiderstand ohne weiteres einige 10^6 MΩ betragen kann. Dies wird auf folgende Weise erreicht:

1. Es wird jede Leitfähigkeit der Wände und der Elektrodenbefestigungen vermieden.

2. Die Röhren werden sorgfältig getrocknet und evakuiert.

3. Die Spannung wird bewußt niedrig gehalten (6 V), damit kein Elektron genügend Energie besitzt, um ein eventuell noch vorhandenes Gasmolekül zu ionisieren. Dieses Molekül würde durch seine Umwandlung in ein positives Ion das Gitter entladen.

Die Verwendung dieser Röhren wird jedoch noch durch zwei weitere Effekte beschränkt: den Dunkelstrom und das Rauschen.

Der Dunkelstrom

Eine Photozelle, an der eine Spannung liegt, liefert auch bei absoluter Dunkelheit einen geringen Strom, der zum Teil durch die Leitfähigkeit der Wände (die wegen der bei der Fabrikation unvermeidlich auftretenden Metalldämpfe kaum zu vermeiden ist) und zum zweiten durch *thermoionische* Emission der Kathode verursacht wird. Allerdings kann man heute den durch die Leitfähigkeit hervorgerufenen Strom auf 10^{-12} A reduzieren, wenigstens unterhalb von 100 V, so daß dieser kein großes Problem mehr bietet.

Der Thermoionenstrom ist bei der gewöhnlichen Temperatur nicht zu vermeiden. Er erreicht bei einer Ag-O-Cs-Kathode etwa 10^{-9} A/cm^2 und bei einer Sb-Cs-Kathode 10^{-13} A/cm^2. Diese, wenn auch geringen Ströme reichen aus, um bei gasgefüllten Photozellen das Dunkelentladungspotential hervorzurufen. Sie können nur durch Abkühlung der Zelle verringert werden. Diese Maßnahme ist trotz der damit verbundenen Schwierigkeiten bisweilen angebracht. Die Thermoionenemission einer Ag-Cs-Schicht verringert sich bei einer Abkühlung um 15° bereits auf ein Achtel.

Durch die Existenz eines Dunkelstroms wird eine evakuierte Photozelle nicht mehr proportional der einfallenden Beleuchtungsstärke arbeiten, wie die Vakuumzelle, sondern durch ein lineares Veränderungsgesetz beschrieben werden.

Das Rauschen

Das Rauschen einer Photozelle ist ein *veränderliches* Signal. Es wird dadurch verursacht, daß der Strom aus einer Aufeinanderfolge der Ladungen e besteht, die nicht unendlich klein sind und in endlicher Anzahl pro Sekunde eintreffen, und daß diese Ladungen aus der Quelle mit möglichen Fluktuationen austreten. Der Ausdruck „Rauschen" rührt von dem tatsächlich mit einem Kopfhörer oder einem Lautsprecher wahrnehmbaren Geräusch her.

Der erste Gedanke bei einer solchen Überlegung ist folgender: Wird ein aus der Kathode n Elektronen auslösender Lichtstrom vergrößert, so wird er *plötzlich* ein Elektron mehr auslösen. Der plötzliche Zusatzstrom e fließt durch R und ruft dort ein Signal hervor, das verstärkt wird usw. Setzen wir jedoch für e den Zahlenwert $e = \frac{4,8}{3} \cdot 10^{-19}$ Coulomb ein, so stellen wir fest, daß dieser Effekt vernachlässigt werden kann.

Wir haben aber bereits gesehen, daß die Quantenausbeute bei photoelektrischer Emission sehr gering ist (etwa 1000 einfallende Photonen lösen z. B. nur 1 Elektron aus). Nun ist es klar, daß diese Quantenausbeute Fluktuationen aufweisen kann, die wir nicht zu berechnen wissen. Handelt es sich um eine gas-

gefüllte Photozelle, so können Ionisierung und durch das Gas bedingte Phänomene natürlich ein so starkes Rauschen erzeugen, daß die Verwendung einer solchen Zelle zur Aufnahme sehr schwacher veränderlicher Signale wegen der Gefahr einer Überdeckung durch das Rauschen nicht zweckmäßig ist.

Bei einer Vakuumzelle dagegen ist das durch den Dunkelstrom verursachte Rauschen zu beachten. Wenn der Strom rein thermischen Ursprungs ist, d.h., rührt er von einer zufälligen Elektronenemission der Kathode her, so ist die mittlere Anzahl dieser Elektronen durch die RICHARDSONsche Formel (siehe folgendes Kapitel) gegeben, die allerdings keine Wechselwirkungen zwischen ihnen berücksichtigt. Für diesen Fall hat bereits W. SCHOTTKY angegeben, daß der Durchgang eines Stromes i_0 von einem Rauschstrom begleitet ist, dessen mittleres Quadrat $\overline{(\Delta i)^2}$ zwischen den Frequenzen ν und $\nu + \Delta\nu$ den Wert[1])

$$\overline{(\Delta i)^2} = 2\, e\, i_0\, \Delta\nu$$

hat, wenn e die Ladung des Elektrons ist. Fließt der Strom Δi in dem Widerstand R, so erzeugt er eine Spannung $\Delta_1 U = R\,\Delta i$, deren mittleres Quadrat

$$\overline{(\Delta_1 U)^2} = 2\, e\, i_0 R^2 \Delta\nu$$

beträgt.

Lassen wir jetzt einen Lichtstrom auf die Zelle fallen, dann können wir, ohne auf die exakte Begründung des Quantenstroms einzugehen, den Rauscheffekt nicht mehr erklären. Es scheint jedoch, als wären die Fluktuationen in der Photonenanzahl und im photoelektrischen Mechanismus nicht bedeutender für das Rauschen als die zufällige Emission der Elektronen des Stromes i. Wenn wir jetzt die vorstehende Formel auf den *gesamten* Strom i anwenden, so finden wir eine obere Grenze für das Rauschen:

$$\overline{(\Delta_2 U)^2} = 2\, e\, i\, R^2 \Delta\nu.$$

In dem Widerstand R ist auch mit der thermischen Bewegung der Elektronen zu rechnen, die ihrerseits eine Rauschspannung erzeugt:

$$\overline{(\Delta_3 U)^2} = 4\, R\, k\, T\, \Delta\nu.$$

k ist dabei die BOLTZMANNkonstante (siehe Seite 617).

Es wird also kein störendes Rauschen auftreten, wenn

$$2 e i R^2 \ll 4 R k T$$

und damit

$$i < \frac{2}{e} \cdot \frac{kT}{R}$$

ist.

Bei einer *numerischen* Berechnung erhält man $\Delta_2 U$ in Volt, wenn man e in Coulomb, i in Ampere und R in Ohm einsetzt. Wählen wir dagegen CGS-Einheiten, so erhalten wir $\frac{\overline{(\Delta_3 U)^2}}{R}$ in erg. Wenn wir diesen Ausdruck in Watt schreiben

---

[1]) Siehe „Mathematische Betrachtungen", Seite 554. Dabei wird angenommen, daß eine hinter der Zelle liegende Anordnung nur die zwischen ν und $\nu + \Delta\nu$ liegenden Frequenzen verstärkt.

wollen, müssen wir ein zweites Glied 10^{-7} hinzufügen. Ist dann R weiterhin in Ω eingesetzt, so erhalten wir

$$i_A < \frac{2}{e} \cdot \frac{kT \cdot 10^{-7}}{R}$$

oder

$$i < \frac{6 \cdot 10^{-2}}{R_\Omega}.$$

Obgleich dieses letzte Resultat keine Gleichung darstellt, gestattet es uns, den Widerstand R zu wählen.

Gilt

$$\overline{(\Delta_2 U)^2} \gg \overline{(\Delta_3 U)^2},$$

dann sind sowohl das Quadrat des Rauschens als auch das Quadrat des Signals proportional zu R^2 ($U = Ri$; $U^2 = R^2 i^2$. Das Verhältnis Rauschen zu Signal ist also von R unabhängig, d. h., man hat kein Interesse, R zu vergrößern).

Ist dagegen

$$\overline{(\Delta_2 U)^2} \ll \overline{(\Delta_3 U)^2},$$

dann ist das Verhältnis Signal zu Rauschen proportional zu R, d. h., eine Vergrößerung von R ist zweckmäßig. Man wird also versuchen, sich der Bedingung

$$\overline{(\Delta_2 U)^2} = \overline{(\Delta_3 U)^2}$$

oder

$$i = \frac{6 \cdot 10^{-2}}{R_\Omega}$$

zu nähern.

Handelt es sich darum, 10^{-4} Lumen mit einer 20 μA pro Lumen liefernden Photozelle zu messen, wir also einen Strom von $5 \cdot 10^{-9}$ A erhalten, so müssen wir einen Widerstand R von ungefähr $10^7\,\Omega$ wählen, an dem das Gitter liegt. Unter diesen Bedingungen kann man bei diesem gegebenen Wert jede kleine Lichtstromveränderung mit größtmöglicher Empfindlichkeit gegenüber dem Rauschen messen.

Photozellen mit Elektronenvervielfacher

Betrachten wir noch einmal die Phänomene der Sekundäremission: Fällt ein durch eine Spannung von 200–300 V beschleunigtes Elektron auf eine Metallscheibe (oder eine dielektrische Scheibe), so ruft es die Emission von n sogenannten Sekundärelektronen hervor. Dabei liegt n zwischen einer Zahl < 1 und ≈ 10, je nach dem Material der Scheibe. Außerdem hängt n von der angelegten Spannung ab. Abb. 510 zeigt eine solche Abhängigkeit für n von der Beschleunigungsspannung. Eine starke Sekundäremission besitzen besonders die eine gute Photoemission zeigenden Schichten Ag-O-Cs und Sb-Cs. Aber auch andere Verbindungen, wie die Legierung Ag-Mg (speziell oxydiert), zeigen diesen Effekt sehr ausgeprägt.

Nun hatte man die Idee, eine beträchtliche Verstärkung der photoelektrischen Ströme auf diesem Effekt zu begründen. Die Elektronen einer Photokathode, die den Strom i bilden, fallen mit entsprechender Beschleunigung auf eine erste Scheibe und lösen dort Sekundärelektronen aus. Diese bilden den Strom ni, werden erneut beschleunigt und fallen auf eine zweite Scheibe, wo sie die den Strom $n^2 i$ bildenden Elektronen auslösen usw. Sind in der Photozelle p solcher Scheiben

angeordnet, die eine gemeinsame Anode besitzen, so fällt auf diese ein Strom $n^p i$. Beträgt n ungefähr 5 und p etwa 10, so erreicht man auf diese Art eine enorme Verstärkung.

Auf dieser Grundlage hat man Elektronenvervielfacher (Multiplier) entwickelt, deren Aufbau mit fortschreitender Technik bedeutend vereinfacht wurde.

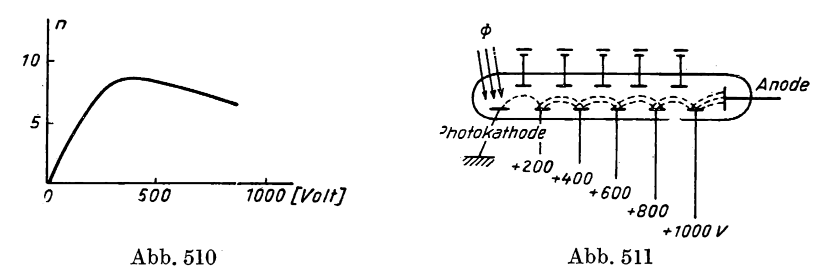


Abb. 510 Abb. 511

In Abb. 511 ist das Schema eines solchen Elektronenvervielfachers mit einer durch ein zur Zeichenebene senkrechtes Magnetfeld erfolgenden magnetischen Fokussierung dargestellt. Dabei sind 5 Sekundäremissionselektroden und 5 negative Ablenkelektroden sowie eine Anode eingezeichnet.

In der Praxis ist es sehr schwierig, alle Elektronen durch ein einziges Magnetfeld zu fokussieren. Es ist jedoch gelungen, durch besondere geometrische Formen der

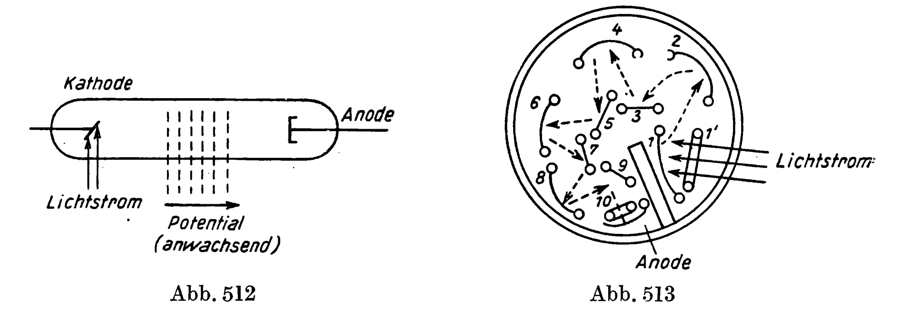


Abb. 512 Abb. 513

Elektroden jede Fokussierung mit Ausnahme der einfachen elektrostatischen Anziehung durch aufeinanderfolgende Elektroden zu vermeiden.

In Abb. 512 ist eine solche relativ einfache Anordnung dargestellt. Die Sekundäremissionselektroden sind als Gitter ausgebildet, und die von den Gittern ausgehenden Elektronen treten durch diese hindurch, um zum nächsten Gitter zu gelangen. Ohne Schwierigkeiten kann man eine große Anzahl solcher Gitter hintereinander anbringen. Um eine gewünschte Verstärkung zu erreichen, ordnet man mehrere Gitter hintereinander und kann dann die Spannung zwischen den einzelnen Gittern herabsetzen. Dadurch wird auch die Gesamtspannung bedeutend erniedrigt.

Einen Schnitt durch eine andere Röhre zeigt die Abb. 513. Eine günstige Anordnung der Elektroden sichert eine 9malige Verstärkung, wobei der von der Anordnung eingenommene Raum nicht größer als eine gewöhnliche Photozelle ist.

Die Anwendung eines Elektronenvervielfachers erscheint für die Praxis sehr interessant. Es darf dabei jedoch nicht vergessen werden, daß keine hohen Austrittsströme zu erreichen sind, da die auftretende Wärme und die dem Anwachsen des Stromes entgegenwirkenden Raumladungseffekte usw. dies verhindern. Wir können solche Röhre also nur für geringe Lichtströme anwenden, was durchaus nicht in allen Fällen vorteilhaft ist. Dagegen entspricht ihre Frequenzabhängigkeit etwa der einer einfachen Vakuumzelle, und es wird kein gegenüber dem Eigenrauschen der Photokathode beträchtliches Rauschen auftreten.

Verstärkungen von 10^6 sind mit diesen Elektronenvervielfachern ohne Schwierigkeiten zu erreichen, so daß man dazu übergangen ist, in wenig lichtstarken Apparaten, wie z. B. Spektrographen, die photographische Platte durch diese Vervielfacher zu ersetzen.

Zur Bildübertragung dienende Röhren mit Photokathoden

Elektronenteleskop

Ein Elektronenteleskop ist eine Anordnung, in der ein sogenannter „Bildwandler" benutzt wird. Es enthält ein Objektiv, mit welchem das zu untersuchende Objekt auf eine *halbdurchlässige* Photokathode abgebildet wird. Diese Photokathode liegt auf der Eingangsfläche des Bildwandlers. Die so erzeugten Photoelektronen werden dann nach Beschleunigung durch eine elektrostatische Linse auf einen für Elektronen halbdurchlässigen Fluoreszenzschirm projiziert, auf dem sie wieder ein elektronisches Bild entwerfen, wobei ihr Weg durch die Fluoreszenz des Schirms sichtbar gemacht wird. Das Fluoreszenzbild kann mit einem Okular betrachtet werden.

Verwendet man sichtbares Licht, so ist dieses Teleskop offensichtlich nicht von Interesse, obwohl man damit ein schärferes Bild als bei direkter Beobachtung erhielte.[1]) Reagiert die Photokathode jedoch auf infrarotes Licht – wie z. B. eine Ag-O-Cs-Kathode – so kann man mit einem Projektor durch ein Infrarotfilter mit *unsichtbarem Licht* das Objekt *beleuchten* und es ohne äußere Anzeichen beobachten. Dieser Vorteil wurde während des Krieges 1939–45 für militärische Zwecke ausgenutzt.[2])

Über die Herstellung dieser Teleskope ist wenig zu sagen. Die Photokathode entspricht der einer Photozelle, abgesehen davon, daß die Silber-Grundschicht halbdurchlässig ist. Der Fluoreszenzschirm besteht aus Willemit, wenn die Beschleunigungsspannung etwa 5000 V beträgt, und aus Zinksulfid bei einer Spannung von etwa 15000 V. Die elektronische Linse ist am zweckmäßigsten elektrostatisch zu wählen und zur Erreichung eines großen Feldes besonders gebaut. In den

---

[1]) Diese Eigenschaften wurden mit Erfolg in der *Radioskopie* ausgenutzt, wo eine Anordnung mit Elektronenteleskop die Beobachtung eines viel schärferen Bildes als mit dem üblichen Fluoreszenzschirm gestattet. Entsprechende Versuche wurden im Westinghouse Laboratory durchgeführt.

[2]) Beim Beginn der Ardennenoffensive (Ende 1944) waren bestimmte deutsche Panzer mit einem Elektronenteleskop ausgerüstet. Auch englische Fahrzeuge benutzten zur Orientierung in der Dunkelheit Bildwandler und Infrarot-Beleuchtung. Die amerikanische Armee rüstete einzelne Soldaten mit Ferngläsern aus, die ein Elektronenteleskop enthielten, um die Erfolge ihrer Operationen gegen die Japaner zu beobachten.

vereinfachten Modellen ist der Fluoreszenzschirm eben und sehr nahe an der ebenfalls ebenen Kathode angeordnet. Dadurch erreicht man bereits ein grobes Bild durch Beschleunigung der Elektronen ohne irgendeine Fokussierung.

Die in Abb. 514 dargestellte Anordnung ist bereits befriedigender und besitzt eine aus 2 Elektroden bestehende Linse. Sie erfordert eine ziemlich hohe Arbeitsspannung.

Betrachten wir nun noch die Leistung von Elektronenteleskopen:

Das maximale Bildauflösungsvermögen gut durchkonstruierter Anordnungen entspricht etwa dem des menschlichen Auges. Beleuchtet man mit weißem Licht, so entspricht die Schärfe des Bildes der Betrachtung mit dem bloßen Auge. Bei Zwischensetzung eines Infrarotfilters sinkt die Schärfe wegen der Absorption der Strahlung, bleibt jedoch noch durchaus befriedigend. Die Anwendungsgrenzen dieser Anordnung sind durch einen auftretenden Kontrastmangel gegeben: Die Elektronen des „Dunkelstroms“ und andere im Raum vorhandene Elektronen können in ungeordneter Weise auf den Fluoreszenzschirm fallen und das Bild in einen nichts erkennen lassenden Nebel verwandeln. Bis heute gelang eine Vermeidung dieser Effekte nur teilweise.

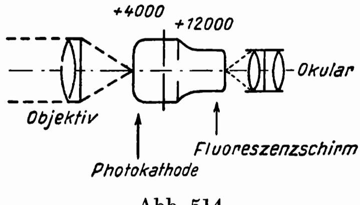


Abb. 514

Der Bildzerleger nach Farnsworth (1934)

Mit Hilfe des Bildzerlegers wurden Übertragungsröhren für Lichtsignale konstruiert, wie sie beim Fernsehen verwendet werden. Es ist recht schwierig, sich vorzustellen, daß beim modernen Fernsehen das Bild Punkt für Punkt nacheinander übertragen wird. Dabei ist eine synchrone Abtastung mit dem Strahl beim Sender und auch beim Empfänger zur Reproduktion notwendig. Die Schärfe des Bildes kann durch eine Vergrößerung der Punktzahl pro Bild, von denen dann jeder Punkt einer kleineren Fläche des Objektes, d.h. einem geringeren Lichtstrom entspricht, gesteigert werden. Da für das gesamte Bild nur ein Zeitraum von etwa $^1/_{25}$ sec zur Verfügung steht, muß das Signal von jedem einzelnen Punkt schneller ausgehen. Obwohl man weiß, daß durch bestimmte mechanische Anordnung das Bild jedes Punktes nacheinander über die gleiche Photozelle gesendet werden kann, wendet man heute modernere Methoden an.

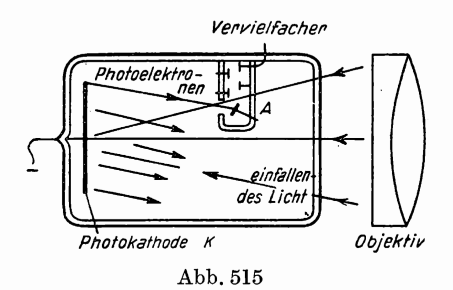


Abb. 515

In einem *Bildzerleger* (Abb. 515) projiziert man das Bild auf eine ebene Photokathode K. Durch *magnetische Fokussierung* (hervorgerufen durch eine nicht dargestellte koaxiale Spule) wird in einer Ebene ein elektronisches Bild der ausgesandten Photoelektronen erzeugt. Durch Ablenkungen (die durch nichtdar-

gestellte magnetische Spulen, analog den Ablenkplatten in einem Kathodenstrahloszillographen, erfolgen) kann dann jeder Punkt dieses elektronischen Bildes nacheinander in einem bestimmten Rhythmus auf eine kleine Anode *A* abgebildet werden. Diese Anode hat die Größe eines Punktes und wird zur Vermeidung einer Störung durch einfallendes Licht seitlich angeordnet (über die magnetische Fokussierung siehe Seite 499).

Zur Verstärkung dieses Signals ist die Anbringung eines Elektronenvervielfachersystems zu empfehlen. Nun ist jedoch das ursprüngliche Signal außerordentlich schwach; der Bildzerleger funktioniert jedoch nur bei sehr starker Beleuchtung, z. B. bei strahlender Sonne, und ist daher auf bestimmte Anwendungen beschränkt (Übertragung von Filmen, die man sehr stark beleuchten kann usw.).

Das Ikonoskop nach Zworykin (1934)

Das *Ikonoskop* (Abb. 516) besitzt durch die hier benutzte *Lichtakkumulation* einen beträchtlichen Vorteil. Es enthält nicht eine der üblichen Photokathoden, sondern eine große Anzahl kleiner lichtempfindlicher Kathoden *C*, die voneinander isoliert auf einer im allgemeinen aus gewöhnlichem Glimmer bestehenden Isolierplatte *I* angebracht sind. Diese kleinen Kathoden werden von Silberkügelchen gebildet, und mehrere zehn von ihnen entfallen auf einen „Punkt". Photoelektrisch sensibel werden diese Kugeln dadurch, daß sie der gleichen Behandlung wie die Ag-O-Cs-Kathode ausgesetzt werden. Hinter der Scheibe *I* befindet sich eine metallische Platte *M* mit einer nach außen geführten Elektrode.

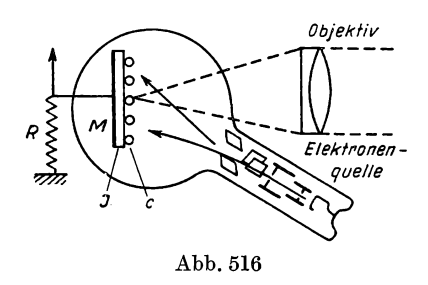


Abb. 516

Die Herstellung eines solchen Mosaiks ist ein sehr einfacher Vorgang. Man bringt auf dem Glimmer eine dünne Silberschicht an, die bei einer Erwärmung auf ungefähr 600° C rissig wird.

Auf die so gebildete Scheibe, die *Mosaik* genannt wird, projiziert man nun ein Bild. Es ist leicht einzusehen, daß durch photoelektrischen Effekt jedes kleine Silberkügelchen eine bestimmte Anzahl Elektronen verlieren wird. Dadurch erhält jede Kugel ein Potential, das durch ihre positive Ladung und ihre Kapazität mit der Scheibe *M* (*die relativ groß ist*) bestimmt wird. Daraus folgt, daß selbst bei großen Ladungen ihr Potential klein bleibt (gegenüber dem von *M*).

Die Röhre wird nun durch eine *Elektronenquelle* vervollständigt, die wie bei einem Kathodenstrahloszillographen einen Elektronenstrahl erzeugt. Dieser Strahl kann auf die Mosaikplatte fokussiert werden und diese abtasten. Trifft er dabei auf eine der kleinen Silberkugeln, so wird diese neutralisiert, da der Strahl die fehlenden negativen Ladungen zuführt. Dieser Vorgang hat keine bemerkbare Rückwirkung auf den Strahl, da sich das Potential der Kugel nur wenig verändert. Die plötzliche Ladungsübertragung führt jedoch zu einem Signal in *R* (dem mit der Scheibe *M* in Reihe liegenden Widerstand), das durch die Kapazität *C-M* verläuft. Dieses Signal wird an das Gitter einer Röhre gelegt und verstärkt und ist das beim Fernsehen ausgenutzte Signal.

Man sieht, daß *im Prinzip* eine *Lichtakkumulation* auftritt. Das Licht hat eine gewisse Zeit zur Verfügung, um die Ladungen jeder einzelnen Kugel hervorzurufen. Diese einzelnen Ladungen verschwinden dann plötzlich beim Abtasten des Mosaiks mit dem Strahl. Man erhält also ein sehr viel stärkeres Signal als beim Bildzerleger und kann annehmen, daß diese Verstärkung gleich der Zahl n ist, die die Anzahl der Bildpunkte bedeutet ($n = 441^2$ entspricht beim Fernsehen 441 Linien und 441 Zeilen). Das ist genau das, was sich ereignet, wenn Licht auf einen photoelektrischen isolierten Körper fällt. Durch den photoelektrischen Effekt wird ein andauernder beträchtlicher Elektronenstrom hervorgerufen. Nun wirkt jedoch das Potential der positiv geladen bleibenden Kugeln auf die ausgesandten Photoelektronen anziehend. Dadurch, daß von dem Elektronenstrahl beim Abtasten des Mosaiks Sekundärelektronen ausgelöst werden, wird dieser Effekt noch verstärkt. Außerdem werden die kleinen Elementarkondensatoren beim Abtasten nur unvollständig entladen. Schließlich ist auch die Akkumulation des Lichtes nur gering. Sie bedeutet jedoch immerhin noch einen großen Gewinn.

Beim Fernsehen benutzte Ikonoskope geben bei einer Beleuchtungsstärke von 300 Lux noch gute Bilder. (300 Lux entsprechen etwa der Beleuchtungsstärke in der Nähe eines Fensters, wenn diese außerhalb des Raumes 10000 Lux beträgt. Das senkrecht auffallende Licht der Sonne liefert 10^5 Lux.)

Weiterentwicklungen des Ikonoskops

Obwohl die Sekundäreffekte einer Akkumulation des Lichtes entgegenwirken, tragen sie trotzdem zur Aussendung eines Signales bei, dessen Erzeugung nicht unbedingt von der Existenz dieses sogenannten Mosaiks abhängt. Ersetzt man das Mosaik durch eine beliebige dielektrische Schicht, so treten bei der Abtastung mit einem Elektronenstrahl ebenfalls Sekundärelektronen aus. Die Projektion eines stark beleuchteten Bildes liefert beim Abtasten wegen der (wenig bekannten) Wechselwirkungen ein schwaches Signal. Die dabei erhaltenen Resultate, die schlechter sind als beim Ikonoskop, sind von Zworykin selbst beschrieben worden.

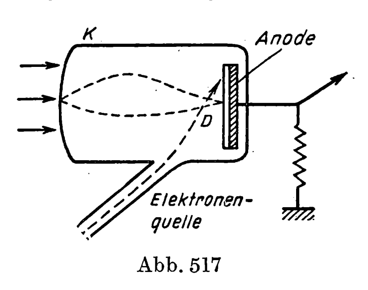


Abb. 517

Ikonoskope, in denen die Abtastung mit einem Strahl langsamer Elektronen erfolgt, nennt man *Orthikons*. Bei diesen Apparaten kann eine Sekundäremission des Mosaiks fast vollständig vermieden werden. Man findet ebenfalls eine Lichtakkumulation, und die auf diesem Prinzip beruhenden Apparate können bereits für einige Lux empfindlich sein (die Beleuchtungsstärke bei Vollmond beträgt etwa 0,2 Lux). Die Schärfe des erreichten Bildes ist jedoch etwas weniger gut als bei den Ikonoskopen.

Bei dem in Abb. 517 dargestellten *Superikonoskop* wird eine Verstärkerstufe der Sekundäremission vor dem Abtasten mit dem Elektronenstrahl eingeschaltet. Aus der halbdurchlässigen Photokathode K ausgelöste Photoelektronen werden fokussiert und geben auf einer dielektrischen Schicht D, die auf einer metallischen Scheibe M angebracht ist, ein elektronisches Bild. Durch die Abtastung

dieses Dielektrikums mit einem Elektronenstrahl wird ein verstärktes Signal ausgesandt, das durch die Sekundäremission jedes Punktes der dielektrischen Schicht unter der Wirkung der primären Photoelektronen entsteht. Mit diesen Superikonoskopen erreicht man noch bei 30 Lux gute Bilder.

Bedeutende Verbesserungen werden in der Zukunft noch möglich sein, wenn man die Prinzipien der verschiedenen Abarten kombiniert.

Dafür liefert bereits das *Bildorthikon* den Beweis (Abb. 518):

Das Bild des Fernsehobjektes wird auf eine halbdurchlässige Photokathode abgebildet. Es sei M ein Punkt dieses Bildes. Von diesem Punkt gehen Photoelektronen aus, die nach Fokussierung und entsprechender Beschleunigung ein elektronisches Bild von M erzeugen. Dieses Bild entsteht auf einer sehr dünnen ($2{,}5\,\mu$

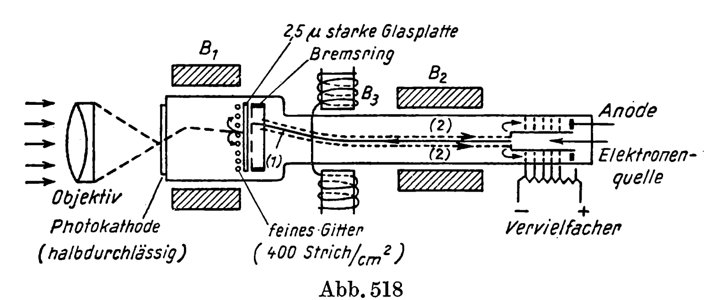


Abb. 518

dicken) isolierten Glasplatte. Vor dieser Platte ist ein besonders feines metallisches Gitter angeordnet (400 Striche pro cm). Die Striche des Gitters sind so dünn, daß von ihnen kein Schatten auf die Glasplatte fällt. Unter der Wirkung der einfallenden Elektronen treten aus der Glasplatte Sekundärelektronen aus, die sofort durch das Gitter aufgefangen werden. Die Glasplatte ist sehr dünn, und die auf ihr entstehenden positiven Ladungen werden durch den von der rechts in der Abbildung dargestellten Elektronenquelle ausgehenden Strahl *langsamer* Elektronen (1) beim Abtasten neutralisiert. Um diesen Effekt zu gestatten, muß die Glasplatte in Richtung ihrer Dicke eine gewisse Leitfähigkeit besitzen. Dies ist durch die geringe Dicke gewährleistet. Die *überschüssigen* Elektronen des Abtaststrahles haben keine andere Möglichkeit, als auf einem von (1) nur wenig verschiedenen Weg (2) in Richtung zur Anode zurückzulaufen. Dort werden sie auf eine Elektrode treffen, die den Primärstrahl ausgeblendet hat und deren Potential zur Auslösung einer Sekundäremission ausreicht. Die entsprechenden Elektronen durchlaufen dann die Stufen eines Elektronenvervielfachers, und der aus der Anode austretende Strom wird zur Übertragung verwendet.

Eine zusätzliche Elektrode bildet der „*Bremsring*", der die auf der Glasplatte auftreffenden Elektronen vorher abbremst. Auf diese Weise können sowohl Fokussierung als auch Ablenkung bei noch schnelleren Elektronen angewendet werden, wodurch die Konstruktion erleichtert wird.

In Abb. 518 ist eine schematische Darstellung eines Bildorthikons angegeben. Dabei bedeuten B_1 eine Fokussierungsspule für die Photoelektronen, B_2 eine Spule, die den Strahl auf der Glasplatte fokussiert, und B_3 ist eine der magnetischen Ablenkspulen, die die Abtastung gewährleisten.

Das auf der Technik ZWORYKINS entwickelte Bildorthikon (Radio Corporation of America) übertrifft alle anderen Geräte an Empfindlichkeit. Die Helligkeit einer glühenden Kohle reicht aus, um eine ganze Szene zu übertragen. Dabei muß man jedoch einen gewissen Verlust in bezug auf die Schärfe in Kauf nehmen.

Sperrschichtzellen

Wenn wir einen *Kontakt* Halbleiter-Metall beleuchten, so stellen wir die Existenz einer elektromotorischen Kraft fest. Enthält das auftreffende Licht den infraroten Teil des Spektrums nicht, so wird diese elektromotorische Kraft bedeutend geringer. Außerdem stellt man fest, daß sich diese Kraft nur langsam einstellt und ebenso langsam verschwindet, also eine große zeitliche Trägheit aufweist.

Es ist ganz klar, daß es sich bei diesen Experimenten um einen thermoelektrischen Effekt handelt, d.h., der Kontakt erwärmt sich und wirkt wie eine Lötstelle, die eine elektromotorische Kraft erzeugt usw.

Nun sind aber eine Reihe spezieller Kontakte bekannt, deren elektromotorische Kraft eine nur sehr geringe Trägheit aufweist, wobei die spektrale Verteilung des Effekts nicht mit dem Energiespektrum des einfallenden Lichtes koinzidiert. Man hat es in diesen Fällen also mit einem beträchtlichen *photoelektrischen Effekt* zu tun. Das Kupfer(I)-oxyd, das Selen, das Thalliumsulfid fallen in diese Gruppe. Aus ihnen kann man sogenannte *Sperrschichtzellen* konstruieren, die *ohne Benutzung einer Spannungsquelle* einen beträchtlichen Strom in der Größenordnung von 250μA pro Lumen liefern. Dies stellt sich bei einigen Anwendungen als sehr wertvoll heraus.

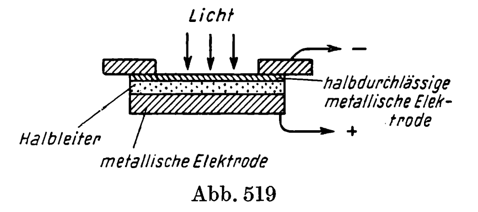


Abb. 519

In allen diesen Zellen verschieben sich die Elektronen im Inneren in Richtung Halbleiter → Metall. Diese Tatsache gestattet, die *Polarität* zu erkennen, die die Elektroden unter dem Einfluß des einfallenden Lichts annehmen. In Abb. 519 ist die Konstruktion einer solchen Sperrschichtzelle dargestellt. Der Name rührt daher, daß das Licht durch eine halbdurchsichtige metallische Elektrode hindurchtreten muß, bevor es auf den eigentlichen „aktiven" Kontakt der gleichen Elektrode mit dem Halbleiter fällt und durch den Halbleiter selbst absorbiert wird. Die Polarität der Elektroden ergibt sich aus der Regel, die wir für die Elektronenbewegung gegeben haben, und ist in der Abbildung angegeben.

Konstruktion einer Kupfer(I)-oxyd-Zelle. Eine Schicht elektrolytischen Kupfers wird acht Stunden lang in einem Ofen bei 1025° C oxydiert. Um eine gute Kristallisation des sich dabei bildenden Cu_2O zu gewährleisten, beläßt man die Schicht für weitere vier Stunden bei 180° C im Ofen. Die vordere Elektrode wird dann durch Kathodenbestäubung mit Gold hergestellt.

Konstruktion einer Selen-Zelle. Auf einer Eisenscheibe bringt man eine dünne Schicht amorphen Selens an, welches sich bei der darauf folgenden längeren Erwärmung auf 200° C in metallisches Selen umwandelt. Dann wird ein Silberfilm durch Kathodenzerstäubung oder durch andere industrielle Methoden aufgebracht.

Arbeitsweise. Empfindlichkeit

Von besonderem Interesse sind als Funktion des einfallenden Lichtes

1. der Kurzschlußstrom, der auftritt, wenn man die beiden Anschlüsse der beleuchteten Zelle durch einen widerstandslosen Draht kurzschließt (Abb. 520);

2. die Potentialdifferenz des offenen Stromkreises (Abb. 521).

In den Abb. 520 und 521 sind diese beiden Funktionen für eine Selenzelle von 10 cm² Oberfläche dargestellt, wie sie von G. LIANDRAT [1]) in einer bedeutenden zu-

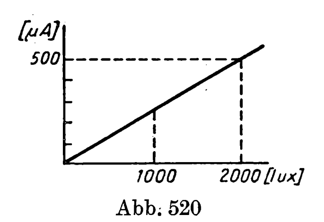


Abb. 520

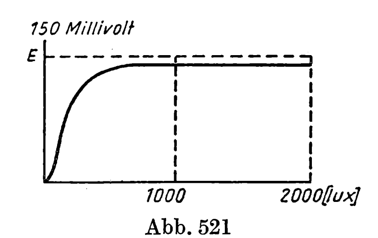


Abb. 521

sammenfassenden Arbeit über dieses Problem angegeben worden sind. Wir sehen, daß der Kurzschlußstrom dieser Zelle proportional der einfallenden Lichtintensität ist (bei dieser Zelle betrug die Empfindlichkeit 250 μA pro Lumen). Die elektromotorische Kraft steigt schnell auf einen von der Beleuchtung unabhängigen Sättigungswert an.

Ein weiterer wichtiger Parameter ist der *Kontaktwiderstand* zwischen Metall und Halbleiter. Er gehorcht dem Gesetz

$$R = R_0 \, e^{\frac{W}{kT}},$$

d.h., die Leitfähigkeit, die sich mit $e^{-\frac{W}{kT}}$ verändert, hängt von der Anzahl der durch die thermische Bewegung gegen eine Austrittsarbeit W befreiten Elektronen ab. Der Widerstand einer Selenzelle liegt bei Zimmertemperatur in der Größenordnung von 1000 Ω, der einer Kupfer(I)-oxyd-Zelle bei 100 Ω.

Das Verhalten einer solchen Zelle in einem Stromkreis, die Veränderung ihrer Parameter mit der Temperatur usw., läßt sich von den oben angegebenen Phänomenen ausgehend grundsätzlich verstehen. Für ihre Arbeitsweise erhalten wir folgende Erklärung:

1. Aus dem Material des Halbleiters werden von dem einfallenden Licht eine dem Lichtfluß proportionale Anzahl von Elektronen pro Sekunde durch Photoeffekt ausgelöst.

2. Diese Elektronen, deren kinetische Energie durch die EINSTEINsche Gleichung

$$h\nu = h\nu_0 + \frac{1}{2} m v^2$$

[1]) Siehe G. LIANDRAT, Revue Générale d'Électricité, März 1934, Seite 417.

beschrieben wird, durchdringen die Sperrschicht und liefern in Richtung Halbleiter → Metall einen vom äußeren Stromkreis unabhängigen Strom i_0.

3. Zwischen den Klemmen der Zelle tritt also eine Potentialdifferenz auf, die im äußeren Scheinwiderstand R (über den die Zelle geschlossen ist) einen Strom i_1 erzeugt. Der Reststrom $i_2 = i_0 - i_1$ muß in der Zelle über ihren Widerstand R_1 in Richtung des leichteren Stromdurchganges fließen. Dieser Widerstand R_1 ist durch die Kapazität C der Sperrschicht geshuntet. Schließlich wird sich auch der äußere Strom i_1 über den Widerstand r schließen, der vom Halbleiter gebildet wird und nicht vernachlässigt werden kann.

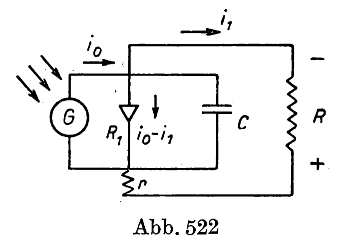


Abb. 522

In Abb. 522 ist ein entsprechendes äquivalentes Schema dargestellt. Die Pfeile geben die Richtung des Elektronenflusses an, der umgekehrt zur üblichen Richtung des Stromes verläuft. Das elektrische Schema erklärt,

1. daß sich der Kurzschlußstrom, der gleich dem photoelektrischen Strom ist, proportional zum einfallenden Lichtfluß verändert.

2. daß die Zelle eine große Trägheit besitzt. Die Kapazität C verhindert alle Stromveränderungen, wenn die Frequenz der Lichtunterbrechung sehr groß ist.

Die Kapazität C liegt bei den gebräuchlichen Zellen etwa zwischen 1000 und 10000 μF. Die Dicke der Sperrschicht ergibt sich zu ungefähr 10^{-6} bis 10^{-5} cm.

Der photoelektrische Charakter dieses Effektes wurde von G. Liandrat bewiesen. Er legte an eine Zelle eine negative Spannung, die er bis auf einen bestimmten Wert V_m, bei dem der Photostrom verschwand, erhöhte. Es stellte sich heraus, daß der Wert von V_m, der der Energie der erzeugten Photoelektronen entspricht, der Einsteinschen Gleichung

$$e V_m = h\nu - h\nu_0$$

genügt.

Trägt man in einem Diagramm auf der Abszisse die Frequenz ν der einfallenden Strahlung und auf der Ordinate die gemessenen Werte von V_m auf, so ergibt sich tatsächlich die Einsteinsche Gerade.

Die Bewegung der Elektronen in Richtung Halbleiter → Metall bei der Überwindung der Sperrschicht war Objekt einer Quantentheorie, die auf den Werten der verschiedenen Energieniveaus der Elektronen beruht.

1. Im Metall findet man Energieniveaus mit großer negativer Energie, die an Ionen gebundenen Elektronen entsprechen, während die Niveaus geringer negativer Energie (Bindungsenergie) den Elektronen zuzuschreiben sind, die den Strom bilden.

2. Im Halbleiter besitzen die an die Moleküle des als Isolator angesehenen Halbleiters gebundenen Elektronen sehr hohe Energieniveaus. Dagegen finden sich keine Energieniveaus, die schwach gebundenen Elektronen entsprächen (es ist keine metallische Leitfähigkeit vorhanden). Einige höhere Energieniveaus rühren von Elektronen her, die zu Verunreinigungsatomen gehören oder einem geringen stöchiometrischen Überschuß entsprechen, und sind für die Leitfähigkeit verantwortlich.

Nun zeigen die wenigen freien Elektronen des Halbleiters die Tendenz, auf ein niedrigeres Energieniveau zu fallen, d.h., sie erreichen das gleiche Niveau, das die freien Elektronen des

Metalls einnehmen. Dem entgegen steht die Sperrschicht, in der man die Abwesenheit solcher Niveaus annimmt. Dies führt dazu, *daß man sie als isolierend annimmt*, und dies ist auch wahrscheinlich, wenn man die Nähe des Metalls beachtet, das seine chemische Zusammensetzung und seine Ladungen stabilisieren muß.

Die Elektronen können sich also nur in Richtung Halbleiter→Metall bewegen (wegen des absoluten Niveauunterschiedes). Den Elektronen muß weiter eine zusätzliche Energie ($h\nu - h\nu_0$ vom photoelektrischen Effekt) zugeführt werden, damit sie die Sperrschicht überwinden können. Die ihnen verbleibende *kinetische* Energie verursacht die auftretende Potentialdifferenz.

Alterung und Ermüdung der Sperrschichtzellen

Wie alle Apparate, in denen Halbleiter verwendet werden, zeigen auch diese Zellen Alterungs- und Ermüdungserscheinungen als Funktion der Zeit oder der Beleuchtung. Erstere sind reversibel, letztere dagegen nicht.

Anwendung

Obwohl diese Zellen für kurze Lichtzeichen und für Präzisionsmessungen nicht verwendet werden können, sind sie trotzdem, z.B. bei der Steuerung von Relais, von Interesse, da sie keine Spannungsquelle benötigen. In der Phototechnik werden sie zur Konstruktion von Belichtungsmessern verwendet.

Mathematische Betrachtungen. Formel von W. Schottky

1. Ein Strom i kann Schwankungen unterworfen sein, da die ihn bildenden Elektronen nicht nach einer Gesetzmäßigkeit ausgesandt werden. Im Mittel, d.h. nach einer sehr langen Zeit, stellt man fest, daß er den Wert i_0 besitzt und von N Elektronen pro Sekunde gebildet wird: $i_0 = Ne$. Während der Zeit τ scheint der Strom jedoch einen von i_0 etwas verschiedenen Wert i_τ zu haben ($i_\tau = \bar{i}$ während der Zeit τ). Die Anzahl der in der Zeit τ fließenden Elektronen beträgt n_τ, wobei jetzt n_τ etwas von $N \cdot \tau$ verschieden ist. Man kann also eine Schwankung Δn_τ derart definieren, daß

$$\Delta n_\tau = n_\tau - N\tau$$

gilt.

Das *mittlere Quadrat* dieser Schwankung ist durch die Wahrscheinlichkeitsrechnung gegeben, wenn die Emission tatsächlich unregelmäßig erfolgt, d.h., wenn die einzelnen Emissionsvorgänge voneinander unabhängig sind. Dann kann man annehmen, daß

$$\overline{\Delta n_\tau^2} = N\tau .$$

Ist Δi_τ die Stromschwankung $i_\tau - i_0$, dann gilt

$$\Delta i_\tau = e \frac{\Delta n_\tau}{\tau}$$

und folglich

$$\overline{(\Delta i_\tau)^2} = \frac{e^2}{\tau^2} \overline{\Delta n_\tau^2} = \frac{e^2 N}{\tau} .$$

Da jedoch $i_0 = eN$ ist, können wir

$$\overline{(\varDelta i_\tau)^2} = \frac{i_0 e}{\tau}$$

schreiben.

2. Dies ist jedoch nicht das uns interessierende Resultat. Wir suchen das mittlere Quadrat der Amplitude des Stromes, der in einem zwischen den Frequenzen $\nu = \nu_1$ und $\nu = \nu_2$ arbeitenden Apparat fließt, d.h. im Frequenzband $\varDelta\nu = \nu_2 - \nu_1$. Dieses Quadrat interessiert bei der Lösung praktischer Probleme (z.B. beim Rauschen einer aus Photozelle, Verstärker, Lautsprecher usw. bestehenden Tonfilmapparatur).

Wir zerlegen nun den Strom i, der als veränderlich angenommen wird, in eine FOURIER-Reihe, wobei wir von einer langen Periode T und folglich einer sehr kleinen Grundschwingung $\omega = \frac{2\pi k}{T}$ ausgehen. Nun sei $k = 1, 2, 3, 4, \ldots; \nu_1 = \frac{k_1}{T}$ und $\nu_2 = \frac{k_2}{T}$ liegen sehr nahe beieinander. Dann erhalten wir

$$i = \sum_{k_1}^{k_2} a_k \sin(k\omega t + b_k \cos k\omega t).$$

Jede Amplitude a_k ist durch die FOURIERsche Formel

$$a_k = \frac{2}{T}\int_0^T \varDelta i \sin k\omega t \, dt,$$

$$b_k = \frac{2}{T}\int_0^T \varDelta i \cos k\omega t \, dt$$

gegeben, wenn wir $i = i_0 + \varDelta i$ setzen und beachten, daß nur $\varDelta i$ beiträgt.

Wir suchen nun unter diesen Bedingungen das *mittlere Quadrat* von $\varDelta i$. Dazu benutzen wir nur die Komponente, für die unser Apparat empfindlich ist, d.h. von k_1 bis k_2. Wir finden dafür den Ausdruck

$$\sum_{k_1}^{k_2} a_k^2 = \frac{4}{T^2}\sum_{k_1}^{k_2}\int_0^T\int_0^T \varDelta i \, \varDelta i' \sin k\omega t \sin k\omega t' \, dt \, dt'.$$

In dieser Formel ist $\varDelta i'$ der Wert von $\varDelta i$ zur Zeit t'.

Sind die Zahlen k_1 und k_2 sehr groß und enthalten die Zeitintervalle $\varDelta t$ und $\varDelta t'$ viele Elementarprozesse, dann kann man ohne großen Fehler das Doppelintegral durch eine zweifache Summation ersetzen und schreiben

$$\sum_{k_1}^{k_2} a_k^2 = \frac{4}{T^2}\sum_{k_1}^{k_2}\sum_0^T\sum_0^T (\varDelta i \, \varDelta t)(\varDelta i' \varDelta t') \sin k\omega t \sin k\omega t'.$$

Die Doppelprodukte des Sinus verschwinden bei der Summation über T, so daß nur die Quadrate übrigbleiben. Daraus folgt

$$\sum_{k_1}^{k_2} a_k^2 = \frac{4}{T^2} \sum_{k_1}^{k_2} \sum_{0}^{T} (\Delta i \Delta t)^2 \sin^2 k\omega t.$$

3. Nun ist jedoch

$$\overline{(\Delta i \Delta t)^2} = e i_0 \Delta t,$$

wenn man beachtet, daß Δt dem τ des § 1 entspricht. Weiterhin gilt

$$\sum_{0}^{T} \Delta t = T$$

und

$$\overline{\sin^2} = \frac{1}{2},$$

so daß gilt

$$\sum_{0}^{T} \cdots = \frac{e i_0 T}{2}.$$

Dieses Resultat hängt nicht mehr von der Zahl k ab, und es ergibt sich

$$\sum_{k_1}^{k_2} \sum_{0}^{T} \cdots = \frac{e i_0 T}{2} (k_2 - k_1)$$

und

$$\sum_{k_1}^{k_2} a_k^2 = \frac{4}{T^2} \frac{e i_0 T}{2} (k_2 - k_1).$$

Diesen Ausdruck kann man auch in der Form

$$\Delta i^2 = \sum \frac{a_k^2 + b_k^2}{2} = \sum a_k^2 = 2 e i_0 (\nu_2 - \nu_1) = 2 e i_0 \Delta \nu$$

als sogenannte SCHOTTKYsche Formel darstellen.

IV. KAPITEL

Thermoionenemission. Dioden und Gleichrichter

EDISON-Effekt

Gegen 1880, kurz nach seiner Erfindung der elektrischen Glühlampe, stellte EDISON folgenden Effekt fest:

Gegenüber dem Glühdraht einer gut evakuierten Glühlampe (Abb. 523) möge eine metallische Elektrode angeordnet sein, die über eine Spannungsquelle U und ein Galvanometer A mit dem Glühdraht, wie es in der Abb. 523 gezeigt ist, ver-

bunden wird. Liegt die Elektrode gegenüber dem Draht auf einem positiven Potential, dann fließt in Pfeilrichtung ein Gleichstrom. Besitzt die Elektrode dagegen ein negatives Potential, so fließt keinerlei Strom.

Es scheint also, als würde sich der in A angezeigte Strom über den Zwischenraum Scheibe – Glühdraht schließen, jedoch nur dann, wenn der Strom von der Elektrode (Anode) zum Draht (Kathode) fließt. Der auftretende Strom erreicht ohne weiteres eine Stärke von einigen hundert μA.

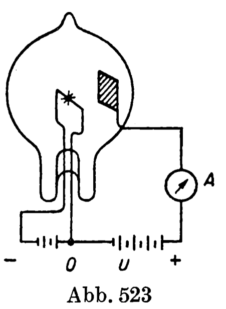


Abb. 523

Zu der damaligen Zeit war dieser Effekt völlig unerklärlich. Erst später, etwa 1895, fand man, daß dieser Strom auf der Eigenschaft des Glühdrahtes beruht, Elektronen in das Vakuum auszusenden (Thermoionenemission). Diese Elektronen werden von der Anode nur dann angezogen, wenn diese gegenüber der Kathode ein positives Potential besitzt. Sie bilden den beobachteten Strom, dessen übliche Richtung vom + Pol zum − Pol entgegengesetzt zur Richtung des Elektronenflusses verläuft.

Bemerkungen über die Thermoelektronenemission

Vergrößern wir in der in Abb. 523 dargestellten Anordnung die Potentialdifferenz U zwischen Anode und Draht, so stellen wir fest, daß der Thermoelektronenstrom mit U anwächst, bis er einen bestimmten von U unabhängigen Wert i_s annimmt, den sogenannten Sättigungsstrom. Dieser Sättigungsstrom, der natürlich der emittierenden Oberfläche der Kathode proportional ist, hängt außerdem von der Art der Kathode und deren Temperatur ab. Eine Vergrößerung des Heizstromes bringt auch eine Vergrößerung von i_s mit sich. *A priori* geben wir an, wie man das Gesetz zwischen i_s und der Temperatur finden kann: Um ein Elektron aus dem Metall der Kathode abzulösen, muß eine bestimmte Arbeit W geleistet werden. Die Elektronen, die fähig sind, die auf einer absoluten Temperatur T liegende Kathode zu verlassen, müssen also eine kinetische Energie besitzen, die größer als W ist. Nach der kinetischen Gastheorie (die auf die freien Elektronen in einem Metall angewendet werden kann) wissen wir, daß das Verhältnis dieser Elektronen zu der Gesamtzahl der Elektronen gegeben ist durch $e^{-\frac{W}{kT}}$, wobei k die BOLTZMANN-Konstante ($k = \frac{R}{N}$, $N = 6{,}02 \cdot 10^{23}$ = LOSCHMIDTsche Zahl und $R = 8{,}32 \cdot 10^7$ CGS-Einheiten = ideale Gaskonstante) ist. Den Strom erhält man, wenn man die Anzahl der austretenden Elektronen mit der Austrittsgeschwindigkeit multipliziert. Auf den ersten Blick sieht man, daß die Austrittsgeschwindigkeit proportional zu $\sqrt{T}$ sein muß, da die mittlere kinetische Energie proportional zu T ist. Tatsächlich ist jedoch die exakte Beschreibung komplizierter, da die durch die Austrittsarbeit W bedingte Verringerung der Elektronengeschwindigkeit und die Anwesenheit der Metallmoleküle noch berücksichtigt werden müssen. Eine genaue Berechnung auf der Grundlage der Quantenstatistik führt uns auf die DUSHMAN-RICHARDSONsche Formel

$$i_s = A T^2 e^{-\frac{W}{kT}};$$

A ist dabei eine Universalkonstante in der Größenordnung von 120, wenn i_s in Ampere/cm^2 eingesetzt wird und die Emission durch ein reines homogenes Metall behandelt wird.[1])

Die Messung von i_s und seine Veränderung mit der Temperatur gestattet uns also, die Austrittsarbeit eines Elektrons zu bestimmen. Bezeichnen wir die Ladung eines Elektrons mit e, dann ist $W = e\varphi$. Dabei ist φ die Austrittsarbeit pro Ladungseinheit und kann in Volt gemessen werden. Nun ist es interessant, auf diese Weise φ zu berechnen, da die Austrittsarbeit W auch in anderen physikalischen Phänomenen eine Rolle spielt, so z. B. bei der photoelektrischen Emission, bei der die Energie $h\nu$ eines einfallenden Lichtquants offensichtlich W übersteigen muß, damit ein Elektron ausgesandt werden kann. Mit dieser Kenntnis können wir die untere Grenzfrequenz ν_0, bei der eine Thermoionenemission eines gegebenen Metalls erfolgt, berechnen:

$$h\nu_0 = e\varphi .$$

Ein weiteres Phänomen, bei dem die Austrittsarbeit auftritt, ist der sogenannte VOLTA-Effekt oder die Kontaktpotentialdifferenz: Sind zwei Metalle (1) und (2) vorhanden, so beträgt ihre Kontaktpotentialdifferenz offensichtlich $\varphi_1 - \varphi_2$.

Zur Erreichung einer starken Emission ist es vorteilhaft, φ möglichst klein zu halten.

In der folgenden Tabelle sind einige Werte für φ angegeben:

Reine Metalle

Pt	$\varphi = 6{,}27$ Volt
W	$= 4{,}54$
Mo	$= 4{,}15$
Ta	$= 4{,}1$
Ba	$= 2{,}11$
Cs	$= 1{,}81$

Zusammengesetzte Kathoden

W (thoriert)	$\varphi = 2{,}63$ Volt
Mo (thoriert)	$= 2{,}59$
W + Ba	$= 1{,}56$
W (oxydiert) + Ba	$= 1{,}34$
W + Cs	$= 1{,}36$
BaO, SrO auf Pt oder Ni Ag + CsO_2 + Cs	$= < 1$

[1]) Versucht man, die DUSHMAN-RICHARDSONsche Formel genau zu verifizieren, so findet man fast niemals einen Wert $A = 120$. Man weiß jedoch jetzt, daß die Austrittsarbeit auch von den Kristallflächen abhängt, aus denen die Emission erfolgt. Auf einer Kathode müssen wir also sehr viele unregelmäßig zueinander liegende Kristallflächen annehmen.

Nach dieser Tabelle sind Platin, Wolfram, Molybdän usw. weniger gut emittierende Stoffe, dagegen sind Cäsium- und Wolfram-Kathoden, die mehr oder weniger stark oxydiert und mit Barium oder Cäsium bedeckt sind, bedeutend wirkungsvoller. Die beste Kathode besteht aus Silber, welches mit einer Cäsiumoxydschicht bedeckt ist und als letzte Außenschicht eine mehr oder weniger monomolekulare Schicht metallischen Cäsiums trägt. Die Austrittsarbeit dieser Kathoden, die als Kathoden sehr empfindlicher Photozellen Anwendung finden, ist außerordentlich gering.

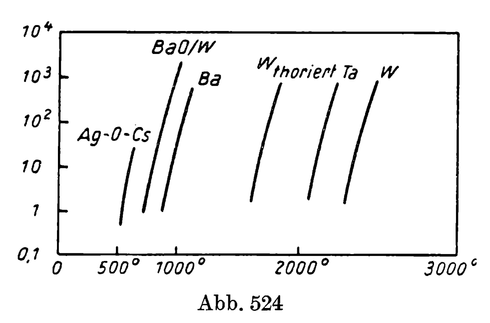


Abb. 524

Nun müssen wir noch den Einfluß der Temperatur untersuchen. Ein Metall, das eine große Austrittsarbeit besitzt, kann trotzdem gute Kathoden liefern, wenn man diese auf verhältnismäßig hohe Temperaturen erhitzt. Dies ist bei den hitzebeständigen Metallen, in erster Linie bei Wolfram, der Fall. Man kann höchstens sagen, daß diese Kathoden eine weniger gute Energieausbeute besitzen, da man zur Heizung mehr Watt benötigt. Tatsächlich kann jedoch die Emissionsdichte i_s den gleichen oder sogar höhere Werte als bei Kathoden aus z.B. BaO, SrO annehmen, die bei tieferen Temperaturen arbeiten.

Im Diagramm der Abb. 524 ist log i_s über der Temperatur T für einige charakteristische Kathoden aufgetragen. In der Praxis verwendet man zwischen 2500 bis 2700° K reine *Wolfram*-Kathoden, während zwischen 1600–1700° K *thorierte Wolfram*-Kathoden und bis etwa 1000° K *Erdalkali*-Kathoden (Ba oder Sr auf oxydiertem Wolfram oder BaO und SrO auf Pt oder Ni) benutzt werden. In jedem dieser Fälle erreicht man 300 mA bis 1,2 A pro cm². Dagegen war es bisher nicht möglich, industriell Kathoden aus Cäsium zu verwenden, da deren Emission eine zu starke Temperaturabhängigkeit besitzt, um ein einwandfreies Funktionieren bei geringen Schwankungen der Raumtemperatur zu gewährleisten.

Die Wirkung einer Kathode aus thoriertem Wolfram beruht auf einer monomolekularen Schicht aus Thorium, die auf die Wolframoberfläche diffundiert (siehe die Arbeiten von LANGMUIR). Wird die Thoriumschicht durch zu große Erhitzung verdampft, so kann durch eine längere Erwärmung auf eine etwas oberhalb der Arbeitstemperatur liegende Temperatur die Schicht wieder gleichmäßig erneuert werden.

Die Kathoden aus BaO und SrO, die sogenannten *Oxydkathoden*, erfordern ein *gutes Vakuum*, um ihre Emissionseigenschaften zu bewahren. Während des Evakuierens überzieht man die metallische Kathode mit Karbonaten ($BaCO_3$, $SrCO_3$ in kolloidalem Zustand). Dann wird beim weiteren Abpumpen der Röhre diese Kathode auf eine oberhalb der Arbeitstemperatur liegende Temperatur erhitzt, um die Karbonate wieder in Oxyde umzuwandeln. Gleichzeitig legt man an die anderen Elektroden positive Spannungen, um die Emission von Elektronen anzuregen.

Flemmingsches Ventil. Seine Verwendung als Detektor

Der Edison-Effekt wurde lange Zeit nicht ausgenutzt. Schließlich wurde jedoch von Flemming die in Abb. 523 dargestellte Anordnung vorgeschlagen, die unter dem Namen Flemmingsches Ventil zum Nachweis von in Empfängerantennen induzierten Hochfrequenzströmen bekannt ist. In Abb. 525 ist eine solche Antenne dargestellt. Sie ist über eine Selbstinduktion geerdet, an der durch den Stromdurchgang eine (schnell wechselnde) Spannung auftritt. Diese Spannung wird direkt zwischen Anode und Kathode (oder Heizdraht) des Ventils gelegt. Ist durch den Wechselstrom die Anode positiv, so geht von der Kathode ein Elektronenfluß aus. Während der anderen Halbperiode ist der Stromfluß unterbrochen (die Anode ist negativ geladen). Im Mittel beobachtet man einen in einem Galvanometer meßbaren Gleichstrom i, durch dessen Fluß und dessen Stärke Existenz und Amplitude der auftretenden Wellen nachgewiesen werden können. Durch die Ausschläge des Galvanometers ist eine bedeutend größere Genauigkeit als bei der Messung des effektiven Wechselstromes in der Antenne mit einer thermischen Meßanordnung A (Thermokreuz) gegeben, deren Anzeige nur dem Quadrat der Stromstärke proportional ist. Letztere Meßanordnung ist also für geringe Stromstärken unvorteilhaft und kann auch wegen der zum Nachweis von Morsezeichen zu großen Zeitkonstanten nicht verwendet werden.

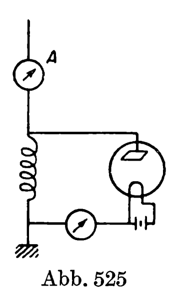


Abb. 525

Stromverlauf im Flemmingschen Ventil. Raumladung und Langmuirsche Formel

Der im Ventil fließende Strom ist nicht gleich dem Sättigungsstrom, da die durch die Antenne gelieferte Spannung U nicht groß genug ist, um eine Sättigung zu erreichen. Wenn wir nun den von dem Ventil ausgesandten Strom als Funktion von U betrachten, so werden wir auf die Definition der *Charakteristik* des Ventils geführt. Wir tragen die Spannung U auf der Abszisse auf und variieren sie zwischen Null und einigen zehn Volt. Auf der Ordinate tragen wir die Stromstärke auf, wie es in Abb. 526 gezeigt ist. Wird die Kathode nun auf eine bestimmte Temperatur T_1 gebracht, dann wächst i mit U (oder auch schneller) bis auf einen bestimmten Wert i_1 an. Bei weiterem Spannungsanstieg bleibt dann der Strom konstant. Den Strom i_1 nennt man dann den Sättigungsstrom bei der Temperatur T_1. Bei einer etwas kleineren Temperatur T_0 stellt man fest, daß der Sättigungsstrom i_0 bedeutend kleiner ist als i_1 (da nach der Dushman-Richardsonschen Formel i_s stark mit der Temperatur ansteigt). *Bis die Kurve, die i als Funktion von U angibt, umbiegt, ist sie (für eine gegebene Röhre) für alle Temperaturen gleich, d.h. unabhängig vom Sättigungsstrom.*

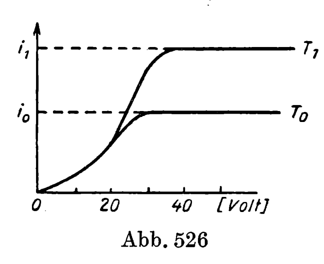


Abb. 526

Mit anderen Worten: solange die Sättigung nicht erreicht ist, zieht die Anode pro Sekunde eine bestimmte Anzahl von Elektronen an, die durch die Geometrie

des Systems und durch U genau bestimmt ist. Dabei ist es gleichgültig, ob die Kathode viel oder wenig Elektronen aussendet, so lange es nur genügend sind. Die überschüssigen Elektronen treffen nicht auf die Anode.

Wir kommen nun zu dem Begriff des *durch die Raumladung begrenzten Stroms*, der von LANGMUIR eingeführt wurde. Dazu nehmen wir sowohl Kathode als auch Anode als parallele Platten im Abstand l an (Abb. 527) und finden zwischen diesen Platten eine Elektronenwolke, deren gegen A gerichtete Geschwindigkeit v von $x = 0$ bis $x = l$ anwächst. Vernachlässigt man die Geschwindigkeit ihrer thermischen Bewegung (wir erinnern uns, daß die kinetische Energie, die die Elektronen in der Kathode besaßen, klein war gegen $^1/_2 mv^2$), so sieht man, daß die Geschwindigkeit v von Null für $x = 0$ anwachsen muß nach der Energiegleichung

$$\frac{1}{2} m v^2 = e U(x). \tag{1}$$

K A 0 x l

Abb. 527

$U(x)$ ist dabei die Potentialdifferenz zwischen der Ebene x und der Kathode. Andererseits ist der Strom i pro Flächeneinheit der Anode bzw. der Kathode konstant, also ist er auch in jeder Ebene x konstant. Bezeichnen wir mit $\varrho(x)$ die Gesamtladung der in einem Kubikzentimeter über der Abzisse x enthaltenen Elektronen, dann ist die pro Sekunde an der Stelle x durch einen cm^3 tretende Ladung gegeben zu $\varrho(x)v(x)$. Dies ist aber nach der Definition des Leitungsstroms gerade die Dichte des Stroms i pro cm^2. Daraus folgt

$$\varrho v = i = \text{const.} \tag{2}$$

Schließlich wird das Potential U durch die POISSONsche Gleichung

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} = -4\pi\varrho = \frac{d^2 U}{d x^2} \tag{3}$$

bestimmt, da U nur von x abhängt.

Als Konsequenz der Gleichung (2) ergibt sich, daß in der Nähe der Kathode (wo $v = 0$, da die Elektronen wegen der kurzen Beschleunigungsdauer nicht beschleunigt werden) die Stromdichte sehr groß, quasi unendlich ist. Sie reicht gerade aus, um alle von der Kathode emittierten Elektronen von dieser abzustoßen. Dies ist der Effekt der *Raumladung*. Die drei Gleichungen (1), (2) und (3) bilden also ein kohärentes Gleichungssystem, das die Stromdichte als Funktion der zwischen Anode und Kathode herrschenden Potentialdifferenz beschreibt. Dies gilt, solange die Kathode eine Emission i_s größer als i liefern kann.

Aus den Gleichungen (1), (2), (3) eliminieren wir nacheinander v und ϱ und erhalten dann

$$v = \frac{i}{\varrho} \rightarrow \frac{1}{2} m \frac{i^2}{\varrho^2} = e U \rightarrow$$

$$\rightarrow \frac{1}{2} m i^2 = \frac{e U}{16\pi^2}\left(\frac{d^2 U}{d x^2}\right)^2 = \text{const.} \tag{4}$$

Dies ist eine Differentialgleichung nur in U, die leicht zu integrieren ist und eine Lösung der Form $B x^n$ liefert, die den Grenzbedingungen genügen muß. Die Substitution ergibt dann

$$n = \frac{4}{3}; \quad B = \left(\frac{81\,\pi^2\, m\, i^2}{2\,e}\right)^{1/3}.$$

Unsere Grenzbedingungen lauten: $U_{x=0} = 0$ an der Kathode und $U_{x=l} = U$ an der Anode. Die erste dieser Bedingungen ist von vornherein erfüllt. Die zweite bedingt folgende Gleichung:

$$B\, l^{4/3} = \left(\frac{81\,\pi^2\, m i^2}{2\,e}\right)^{1/3} l^{4/3} = U \tag{5}$$

in kohärenten elektrostatischen Einheiten.

Sind uns l und die Konstanten e und m des Elektrons bekannt, dann bestimmt Gl. (5) i als Funktion der Potentialdifferenz U. Löst man Gleichung (5) nach i auf, dann erhält man

$$i = \frac{1}{9\,\pi} \sqrt{\frac{2\,e}{m}} \cdot \frac{U^{3/2}}{l^2}. \tag{6}$$

Der Strom ergibt sich also proportional zu $U^{3/2}$. CHILD und LANGMUIR, die Autoren der Gleichungen (5) und (6), haben auf diese Tatsache bereits 1913 hingewiesen. Die Gleichung (6) beschreibt den Teil der Abb. 526, der allen Strömen bei allen Temperaturen gemeinsam ist. Kommt man überein, in Gl. (5) U in Volt, i in Ampere und l in Zentimetern auszudrücken, so findet man numerisch

$$U_{\text{Volt}} = 5700\; i_{\text{Amp}}^{2/3} \cdot l_{\text{cm}}^{4/3}.$$

Die Lösung von LANGMUIR für ebene Elektroden führt uns auf das folgende Ergebnis: Das Feld $\frac{d\,U}{d\,x}$ (absolut genommen), verändert sich mit $x^{1/3}$ und ist an der Kathode Null. Dies erklärt die Existenzmöglichkeit von Elektronen mit der Geschwindigkeit Null auf der Kathodenoberfläche. Nun kann man auch $\left(\frac{d\,U}{d\,x}\right)_{x=0} = 0$ als zweite Grenzbedingung für die Integration der Gleichung (4) ansehen und genauer sagen, daß Gl. (5), in der U willkürlich gegeben ist, zur Bestimmung des Parameters i als Funktion der Anodenspannung dient.

Das für ebene Elektroden lösbare Problem läßt sich bei zylindrischen Elektroden unter Verwendung von Zylinderkoordinaten ebenfalls lösen. Gleichung (3) muß dann ersetzt werden durch

$$\frac{d^2 U}{d\,r^2} + \frac{1}{r}\,\frac{d\,U}{d\,r} = -4\,\pi\,\varrho,$$

(wie man durch eine direkte Berechnung des durch einen kleinen Zylinder tretenden Flusses des elektrischen Feldes feststellen kann). Die Gleichung (2) wird ersetzt durch

$$2\,\pi\, r\,\varrho\, v = i = \text{const},$$

wobei i diesmal den Strom pro cm Höhe bedeutet.

Die Integration ist dann möglich und führt uns wieder auf eine Gesetzmäßigkeit in $U^{3/2}$. Trotzdem ist die Bedingung $\frac{dU}{dr} = 0$ für $r = 0$ in diesem Fall schwieriger zu erklären.

Tatsächlich treten die Elektronen jedoch mit einer Anfangsgeschwindigkeit aus der Kathode aus, und wir wollen die sich daraus ergebenden Folgerungen untersuchen: Es ist klar, daß die Raumladung eine Auswahl zwischen den Elektronen, die den Strom bilden, trifft und daß nur solche Elektronen zur Anode gelangen können, deren Geschwindigkeit größer als eine bestimmte Grenzgeschwindigkeit ist. Es ist also notwendig (Abb. 528), daß sich die Elektronen in einer bestimmten Entfernung $x + x_1$ von der Kathode anhäufen und dort ein Potentialminimum $U_{\min}$, das negativ in bezug auf die Kathode ist, hervorrufen. Dadurch wird ein mit einer zu geringen Geschwindigkeit austretendes Elektron (1), für dessen Energie also $^1/_2\, m v_1^2 < e\, U_{\min}$ gilt, zur Kathode hin zurückgezogen, während ein Elektron (2) mit der Geschwindigkeit v_2 und einer kinetischen Energie $^1/_2\, m v_2^2 > e\, U_{\min}$ die Potentialmulde überwinden kann. Diese Elektronen werden mehr und mehr beschleunigt und bilden den Anodenstrom. $U_{\min}$ ist dabei ein neuer Parameter, der sich so einstellt, daß der fließende Strom gerade i beträgt.

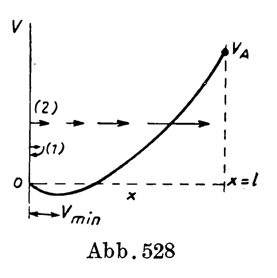


Abb. 528

Anwendung von Dioden. Gleichrichtung von Wechselstrom

Die praktische Verwendung der Dioden ergibt sich aus dem in Abb. 525 angegebenen Prinzipschema. In der Praxis vermeidet man nach Möglichkeit mit Gleichstrom zu arbeiten, wenn die Gleich*spannung* hinterher noch verstärkt werden soll. Die meist benutzte Schaltung ist in Abb. 529 angegeben, wobei der Heizkreis der Kathode nicht dargestellt ist. Der gleichgerichtete Strom fließt über einen Widerstand R, an dem er eine Spannung aufbaut. Gleichzeitig werden die dem Gleichstrom überlagerten Hochfrequenzwellen über einen Kondensator C abgeleitet. Dieser Kondensator bildet für die hochfrequenten Wechselströme einen Kurzschlußkreis, während er den Gleichstrom oder die niederfrequenten Ströme nicht ableitet. An den Klemmen des Widerstandes tritt also schließlich eine Gleichspannung bzw. eine niederfrequente Spannung auf. Der Kondensator C wirkt so als gutes Hochfrequenzfilter. Tritt links eine modulierte hochfrequente Welle ein, dann bildet die in Abb. 529 gezeigte Schaltung einen Gleichrichter, wie er z. B. in Radioempfängern enthalten ist. Die überlagerte Niederfrequenz wird nach der Verstärkung auf den Lautsprecher gegeben.

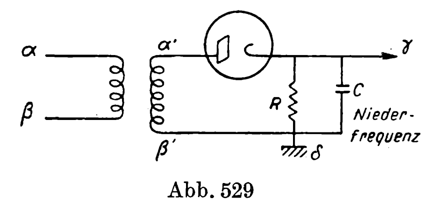


Abb. 529

Die Anordnung in Abb. 529 wird auch dann verwendet, wenn nur eine Wechselstromquelle zur Verfügung steht, man jedoch einen Gleichstrom benötigt. Die

Wechselspannung wird dabei zwischen den Klemmen α und β angelegt, die Gleichspannung kann dann zwischen γ und δ entnommen werden. In diesem Falle spielen jedoch alle die Leistung der Apparatur betreffenden Eigenschaften eine Rolle. In erster Linie strebt man einen bestimmten Wirkungsgrad bei der Umwandlung des Wechselstroms in Gleichstrom an. Weiterhin versucht man, eine möglichst gute Filterwirkung zu erreichen, damit die zwischen γ und δ auftretende Spannung so wenig wie möglich von irgendwelchen Wellen überlagert ist.

Wir wollen daher also nun den Mechanismus eines eine Gleichspannung liefernden Gleichrichters etwas genauer untersuchen. Die Kurve (1) der Abb. 530 gibt die Veränderung der Wechselspannung an, wie man sie am Ausgang des Transformators zwischen α' und β' findet. Die ausgezogene Kurve (2) stellt die an den Klemmen des Widerstandes R auftretende Spannung dar, wenn keine Kapazität C vorhanden ist. Eine der beiden Halbwellen ist verschwunden, während die andere einen kleinen Spannungsverlust erleidet, da an den Klemmen von R nur die Spannung $E - U$ auftritt. U ist dabei die Potentialdifferenz zwischen Anode und Kathode des Ventils, wenn der Strom i fließt. Diese Potentialdifferenz ist z.B. durch Gl. (7) gegeben. Die so gleichgerichtete Spannung besitzt eine Gleichstromkomponente, deren Amplitude E_1 beträgt. Ist in einem Spezialfall U gegenüber E vernachlässigbar, dann kann man E_1 sehr einfach zu $\frac{E_0}{\pi}$ errechnen. E_0 ist dabei die Amplitude der Wechselspannung.

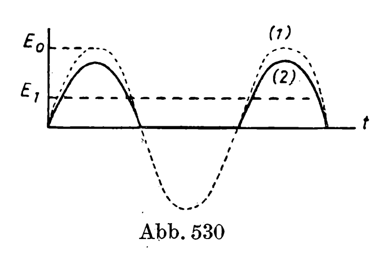


Abb. 530

Nun bringen wir eine Kapazität C an: Die auftretenden Phänomene werden sich bedeutend verändern. Wir gehen von dem Augenblick aus, in dem die Scheitelspannung erreicht ist. Das Ventil läßt einen Strom passieren, der zu einem Teil in den Widerstand R fließt und zum anderen die Kapazität mit einer positiven Spannung auflädt. Die Spannung an den Klemmen des Transformators fällt rasch ab, während der Abfall an den Klemmen von R und C wegen der großen Zeitkonstanten der Entladung von C über R nur langsam abnimmt (Abb. 529). Es tritt nun ein Zeitpunkt ein, in dem die Kathode des Ventils in bezug auf die Anode positiv geladen ist, dies sei z.B. im Punkt B der Fall. Die Spannung E an den Klemmen von R, C verläuft nun entlang BA_1 nach dem exponentiellen Entladungsgesetz (mit $e^{-\frac{t}{RC}}$) für E. Während dieser Zeit ist die Anode des Ventils in bezug auf die Kathode immer negativ, und es fließt kein Strom. Dieser Bereich ist größer als eine Halbperiode (von B bis A_1), und man kann nicht mehr feststellen, daß der Stromkreis R, C von einer Wechselstromquelle gespeist wurde. Danach steigt die Spannung der Anode schnell an und erreicht im Punkt A_1 einen Wert, der höher ist als der der Kathode. Dabei öffnet sich das Ventil wieder, und es folgt ein Bereich der Aufladung des Kondensators, der während der Zeit T den größten Teil des durch das Ventil fließenden Stromes aufnimmt usf. Die *gleichgerichtete Spannung* besitzt also die Form $BA_1B_1A_2B_2$. Wir sehen (Abb. 531), daß der Wellencharakter dieser Spannung viel geringer ist als bei *Abwesenheit des Kondensators* (Abb. 530). Der Kondensator verursacht also tatsächlich eine Glättung der Schwankungen. Außer-

dem liegt der mittlere Wert der gleichgerichteten Spannung E_1 sehr viel höher. Schließlich hängt der Spannungsverlauf stark vom Verhältnis der Zeitkonstanten RC zur Periode des Wechselstroms oder, was das gleiche ist, vom Produkt $RC\omega$ ab (ω ist dabei die Kreisfrequenz des Wechselstroms). Ist $RC\omega \ll 1$, dann hat der gleichgerichtete Strom die in Abb. 530 gezeigte Form; ist dagegen $RC\omega \gg 1$, dann hat er die Form der Abb. 531. Vergrößert man nun C unendlich, dann wird die Neigung der Entladungskurve B_1A_1 gegen Null gehen, und der Punkt A_1 nähert sich dem Punkt B_1. Beim folgenden Stromwechsel wird der Kondensator noch aufgeladen, so daß B_2 ebenfalls größer wird. Schließlich kann sich der Kon-

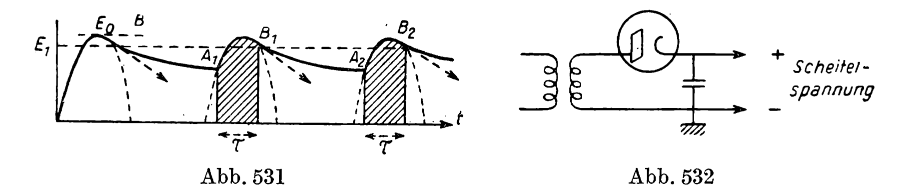


Abb. 531 Abb. 532

densator nicht mehr entladen, *und die gleichgerichtete Spannung ist konstant gleich der Scheitelspannung.* Gleichzeitig geht die Zeit τ, bei der das Ventil geöffnet ist, bei jedem Stromwechsel gegen Null.

Diese Feststellungen führen uns auf eine Methode zur Messung der Scheitelspannung bei Wechselstrom mit Hilfe eines Ventils und eines Elektrometers (Abb. 532).

Bei den in der Praxis erforderlichen Gleichrichtungen wünscht man trotz allem eine bestimmte Leistung, d.h., der nicht vernachlässigbare Strom i darf nicht andauernd über den Widerstand R abfließen. Da dieser Strom gleichfalls vom Ventil

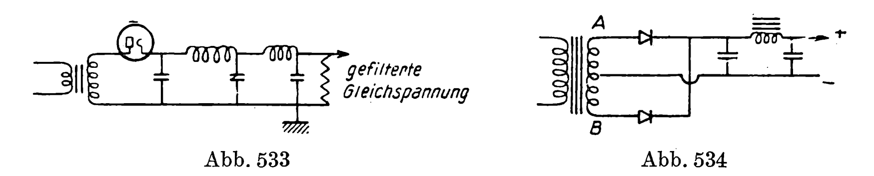


Abb. 533 Abb. 534

geliefert wird, ergibt sich eine um so kürzere Betriebszeit, je größer die entnommene Leistung ist (das Ventil erwärmt sich usw.). Wird die Kapazität des Siebkondensators zu groß bemessen, so ergeben sich einige Nachteile, und es ist zweckmäßiger, eine etwas wellige Spannung in Kauf zu nehmen. Um in der Praxis über eine gut gleichgerichtete Spannung verfügen zu können, bringt man eine aus einem, zwei oder drei Gliedern bestehende Siebkette an.

Ein solcher Stromkreis ist in Abb. 533 dargestellt.

Gleichrichtungen werden in der Praxis mit Hilfe vieler verschiedener Schaltungen durchgeführt. In den üblichen Schemata wird das Ventil meist durch eine Pfeilspitze in Richtung des Stromdurchganges dargestellt.

In Abb. 534 ist das Schema einer Doppelweg-Gleichrichtung angegeben. Die beiden Ventile (1) und (2) arbeiten abwechselnd, je nachdem, ob A oder B positiv in bezug auf die Masse ist. Eine *Brückengleichrichtung,* wie sie bei Meßapparaturen

häufig verwendet wird, ist in Abb. 535 dargestellt. Der Strom fließt dabei, je nach der Halbwelle, entlang 1–2–3–4 oder 4–2–3–1, so daß der Zweig 2–3 stets in gleicher Richtung durchflossen wird. Legen wir in diesen Zweig ein Gleichstromgalvanometer, so wird sein Ausschlag eine zu E und nicht mehr zu E^2 proportionale Stromstärke i anzeigen. Diese Meßmethode ist also vorteilhafter als thermische Methoden. Leider tritt bei diesen empfindlichen Apparaten der Nachteil auf, daß die Ventile einen nur geringen Widerstand besitzen und nicht linear arbeiten (daher ist stets eine Eichung erforderlich).

In Abb. 536 ist das Schema eines „Spannungsverdopplers" angegeben, der eine zweimal so große Spannung liefert wie die Scheitelspannung des speisenden Wechselstroms. Die abgegebene Leistung ist allerdings nur gering. Nach unseren bis-

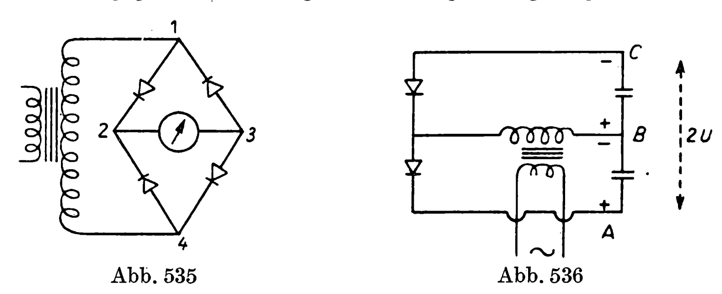


Abb. 535 Abb. 536

herigen Ausführungen ist also klar, daß man zwischen A und B dieselbe gleichgerichtete Spannung U findet wie zwischen negativem C und positivem B, da das mit C verbundene Ventil umgekehrt zu dem mit A verbundenen Ventil angeordnet ist. Zwischen C und A liegt also die Spannung $2\,U$.

Thermoelektrische Ventile finden besonders in Anordnungen Verwendung, die unter dem Namen Kenotron bekannt sind. Diese Kenotrons liefern Gleichspannungen von einigen 100 kV, wie sie z. B. zur Speisung von Röntgenröhren benötigt werden. Diese Röhren müssen so konstruiert sein, daß sie eine große Potentialdifferenz zwischen ihren Elektroden ertragen. Während des Stromflusses durch das Ventil liegen Kathode und Anode nahezu auf dem gleichen Potential. In der folgenden Halbwelle befindet sich nun die Anode auf einem Potential $-V$ in bezug auf die Masse, während die Kathode in bezug auf die Masse auf dem Potential $+V$ liegt. Dadurch muß die Röhre eine Potentialdifferenz von $2\,V$ ohne Durchschlag ertragen können.

Eine kleinere Ausführung der thermoelektrischen Ventile, die sogenannten Dioden, die eine gleichgerichtete Spannung von etwa 300–400 V liefern, werden z. B. zur Speisung von Radioapparaten benutzt, in denen noch kleinere Ausführungen zur Gleichrichtung der modulierten Hochfrequenzströme verwendet werden (Gleichrichterdioden).

Nun sind Ventile mit thermoelektrischer Emission nicht die einzigen zur Gleichrichtung geeigneten Geräte. Wir werden im folgenden, ohne uns dabei aufzuhalten, noch erwähnen:

die gutbekannten Quecksilberdampfgleichrichter,

die hauptsächlich in Meßapparaturen verwendeten Trockengleichrichter (Abb. 538).

In den Quecksilberdampfgleichrichtern bildet sich zwischen der Kathode aus flüssigem Quecksilber und der aus Eisen oder Kohle gebildeten Anode ein Bogen aus. Wenn sich die Elektroden umpolen, so verschwindet der Bogen, und wir erreichen folglich eine Gleichrichtung. Abb. 537 zeigt den Aufbau eines Dreiphasen-Gleichrichters. Die aufeinanderfolgenden Stromwechsel entsprechen Bogen, zu einer der drei Anoden.

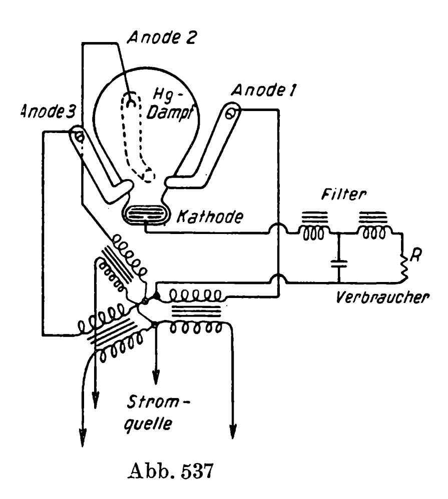


Abb. 537

Diese Anordnungen sind jedoch nur für sehr große Leistungen von Interesse. Wir wollen noch das *Ignitron* erwähnen, bei dem außer dem Quecksilberbogen eine kleine Zündentladung zwischen der Kathode und einer ihr angenäherten Spitze ausgenutzt wird. Letztere gewährleistet eine sichere Zündung und eine Steuerung der Bogenausbildung. Viel verwendet werden auch Quecksilberventile oder Neonventile mit einer Glühkathode. Diese weisen jedoch nur den einen Unterschied auf, daß der thermoionische Sättigungsstrom nicht überschritten werden darf.

Die Trockengleichrichter beruhen auf den Arbeiten der beiden Physiker Geiger und Grondhal (1926): Runde Kupferscheiben, die durch eine Erwärmung auf 1000–1200° auf einer Seite oxydiert wurden, werden mit Scheiben aus einem anderen Metall (z.B. Blei) abwechselnd aufgeschichtet (Abb. 538). Man kann dabei feststellen, daß der Strom in Richtung Pb → Cu_2O → Cu leicht, in umgekehrter Richtung dagegen (wo er einen 1000–10000mal so großen Widerstand zu überwinden hat) nur schwer Durchgang findet. Diese Scheiben vertragen eine Stromstärke von 0,1 bis 0,2 A/cm². Bei höheren Stromstärken erwärmen sie sich zu stark und lassen Ströme in beiden Richtungen hindurchtreten. Um diesen Effekt zu erklären, nimmt man an, daß die Energie der freien Elektronen des Kupfers die Austrittsarbeit nur unwesentlich zu übersteigen braucht, damit Elektronen in Richtung zum Oxyd geliefert werden (dies entspricht einem Strom in der Pfeilrichtung). Der Strom in der entgegengesetzten Richtung wird durch eine allerdings nur schwache Eigenemission der Elektronen des Cu_2O erklärt. Cu_2O ist im allgemeinen kein guter Leiter. Vernachlässigt man diesen geringen umgekehrten Strom, so sieht man, daß die Erklärung nicht ohne Analogien zu der Arbeitsweise von thermoelektrischen Ventilen ist.

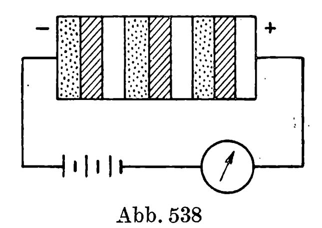


Abb. 538

Röntgenröhren

Obwohl die Betrachtung der Röntgenstrahlen nicht in den Rahmen dieses Buches paßt, wollen wir kurz die modernen Röntgenröhren behandeln. Seit der

Konstruktion von Coolidge (1913) handelt es sich bei diesen Röhren praktisch um Ventile, in denen von einer glühenden Wolframkathode (die durch einige Ampere bei etwa 10 V geheizt wird) Elektronen sehr heftig in das Vakuum geschleudert werden. An der Anode liegt eine Spannung von mindestens 20000 V, normalerweise jedoch 120–250 kV. Die Aufgabe der Anode ist es, unter dem Aufprall der Elektronen Röntgenstrahlen auszusenden. Man bezeichnet sie daher als *Antikathode*. Da die Energie der Röntgenstrahlen nur einen geringen Bruchteil der Gesamtenergie der einfallenden Elektronen darstellt, muß die Antikathode eine beträchtliche Energie aufnehmen. Aus diesem Grunde kann für die Antikathode nur hitzebeständiges Material verwendet werden (meist wählt man Wolfram, da jedoch die Art der ausgesandten Röntgenstrahlen von dem Material der Antikathode abhängt, zum Teil auch andere Metalle), das häufig von innen mit Öl gekühlt wird. In manchen Fällen läßt man auch die Antikathode rotieren, um nicht immer den gleichen Punkt dem Elektronenbombardement auszusetzen.

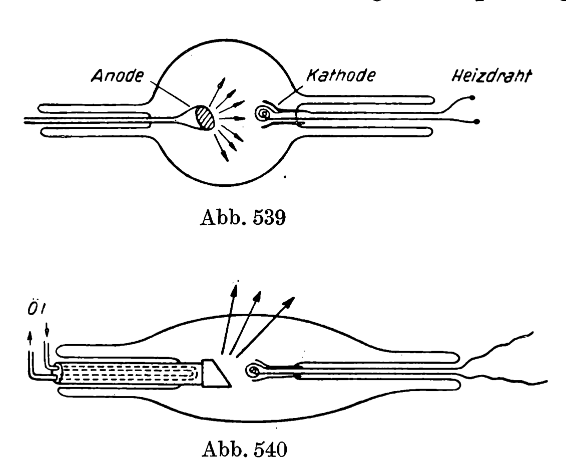


Abb. 539

Abb. 540

Rings um die Kathode ordnet man zweckmäßig eine speziell geformte Elektrode an, die auf dem gleichen Potential liegt, um eine solche Verteilung des elektrischen Feldes zu erreichen, daß die Elektronen mit Sicherheit auf die Anode gerichtet werden.

In Abb. 539 ist eine der von Coolidge entwickelten Standardröhren (Durchmesser 18 cm) dargestellt.

Die Abb. 540 zeigt dagegen eine modernere Röhre mit gekühlter Anode, deren kleinerer Durchmesser eine größere Annäherung an die Strahlungsquelle gestattet.

Es wurden auch zerlegbare Röntgenröhren entwickelt, in denen während des Arbeitens durch eine Pumpe ein Vakuum aufrechterhalten wird. Die Grenzwellenlänge der bei 250 kV ausgesandten Röntgenstrahlung beträgt 0,05 Å. Diese Wellenlänge verändert sich umgekehrt proportional zur Spannung. Für die üblichen Zwecke der Radiologie werden keine so kleinen Wellenlängen benötigt, und die am häufigsten verwendete (Standard-) Röhre arbeitet mit 120 kV. Diese Spannung wird durch eine speziell für diesen Zweck gewählte Kombination von Transformatoren und Gleichrichtern geliefert.

V. KAPITEL

Trioden. Pentoden. Moderne Elektronenröhren

Röhre mit drei Elektroden nach LEE DE FOREST

Im Jahre 1907 brachte der Amerikaner LEE DE FOREST zwischen der Kathode und der Anode des FLEMMINGschen Ventils ein metallisches Gitter an. Dabei stellte er fest, daß beim Anlegen eines bestimmten Potentials gegenüber der Kathode an das Gitter eine Steuerung des Anodenstroms erreicht wurde, so daß dieser sich bei einer gegebenen Anodenspannung den Werten des Gitterpotentials entsprechend veränderte. Ist dieses Gitterpotential *negativ* in bezug auf die Kathode, dann werden alle Elektronen vom Gitter abgestoßen. Es fließt kein Strom, und der speisenden Stromquelle des Gitters wird keine Energie entnommen. In diesem Fall erhält man ohne irgendeinen Energieverbrauch eine Steuerung des Anodenstroms. *Die Röhre mit drei Elektroden* (Kathode-Gitter-Anode) oder *Triode* stellt also ein ideales Relais dar.

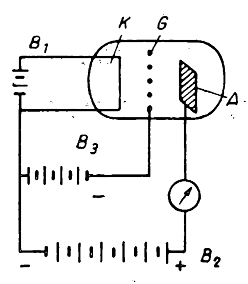


Abb. 541

Wir wollen nun die praktischen Bedingungen der Stromsteuerung im Aufbau der Abb. 541 betrachten: Die Batterie B_1 heizt die Kathode K. An der Anode A liegt eine konstante, in bezug auf die Kathode positive Spannung U, die von der Batterie B_2 herrührt. Mit einem Milliamperemeter wird der Wert des Anodenstroms i_a gemessen. Bei einer Veränderung der Gitterspannung, die durch die Batterie B_3 erzeugt wird, erhalten wir z. B. die folgenden Werte:

$$U_a = 300\text{ V} \qquad U_g = -3\text{ V} \quad i_a = 4\text{ mA}$$
$$U_g = -2\text{ V} \quad i_a = 6\text{ mA}$$
$$U_g = -1\text{ V} \quad i_a = 8\text{ mA}.$$

Bei einer Spannung von 300 V finden wir also eine lineare Veränderung von i_a mit U_g. Betrachten wir jetzt die gleiche Veränderung für eine andere Anodenspannung, z. B. 200 V:

$$U_a = 200\text{ V} \qquad U_g = -2\text{ V} \quad i_a = 2\text{ mA}$$
$$U_g = -1\text{ V} \quad i_a = 4\text{ mA}$$
$$U_g = 0\text{ V} \quad i_a = 6\text{ mA}.$$

Fällt die Gitterspannung auf -3 V, -4 V, ..., dann verändert sich i_a nicht mehr linear mit U_g, sondern verschwindet sehr schnell. Steigt U_g über Null zu positiven Werten an, so verändert sich i_a wieder nach dem gleichen Gesetz. Dabei tritt in dem Kreis Gitter-Kathode ein Strom auf, der sogenannte *Gitterstrom* (siehe Abb. 542).

Die in Abb. 542 dargestellten Ergebnisse wollen wir nun näher untersuchen: Um einen Strom i_a von 2 mA, der bei $U_a = 200$ V und $U_g = -2$ V fließt, auf 6 mA zu erhöhen, lassen wir entweder $U_g = -2$ V und erhöhen U_a auf 300 V oder lassen $U_a = 200$ V und erhöhen die Gitterspannung um 2 V auf 0 V. Eine Vergrößerung der Anodenspannung um 100 V ruft also die gleiche Vergrößerung des Anodenstroms i_a hervor wie eine Vergrößerung der Gitterspannung um 2 V. Der Einfluß dieser Veränderung der Gitterspannung auf i_a ist also 50 mal so groß wie der einer Veränderung der Anodenspannung. *Diesen Faktor K*, der in unserem Fall 50 beträgt, nennt man *Verstärkungsfaktor der Triode.* Nun definieren wir den inneren Widerstand R_i. Bei einer konstanten Gitterspannung ruft eine Vergrößerung $\delta U_a = 100$ V eine Vergrößerung des Gitterstroms $\delta i_a = \frac{4}{1000}$ A hervor. Man kann also schreiben

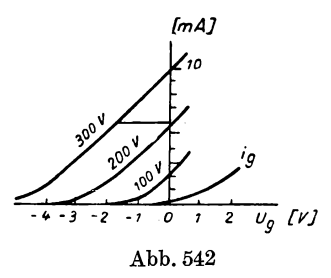


Abb. 542

$$\delta U_a = R_i \delta i_a$$

und erhält daraus

$$R_i = 25000\ \Omega .$$

Allgemein ruft ein Ansteigen der Anodenspannung U_a um δU_a eine Vergrößerung des Anodenstroms i_a um $\frac{\delta U_a}{R_i}$ hervor, während ein Ansteigen der Gitterspannung U_g um δU_g den Anodenstrom um $\frac{K \delta U_a}{R_i}$ erhöht. Da die Veränderung von i_a linear in bezug auf U_a und U_g ist, erhalten wir für gleichzeitige Veränderungen um δU_a und δU_g den Ausdruck

$$\delta i_a = \frac{\delta U_a + K \delta U_g}{R_i} .$$

Im allgemeinen wird diese Fundamentalgleichung der Trioden in der Form

$$R_i i_a = U_a + K U_g$$

angegeben. Dabei ist selbstverständlich, daß man U_a, U_g und i_a nur in einem bestimmten Bereich variieren kann.

Dehnt man tatsächlich diese Messungen über einen sehr großen Bereich aus, so verlieren die in Abb. 542 dargestellten Kurven, die sogenannten *Charakteristiken*, ihre Linearität. Man stellt fest, daß die Konstante K bedeutend besser definiert ist als der innere Widerstand R_i und daß tatsächlich gilt:

$$i_a = f(U_a + K U_g) .$$

Das Veränderungsgesetz von f nimmt eine Zwischenstellung zwischen einer Geraden und einem $e^{3/2}$-Gesetz ein, ähnlich der Gleichung von CHILD-LANGMUIR.

Elektrostatische Theorie der Trioden

Der Verstärkungsfaktor K des Gitters in bezug auf die Anode läßt sich durch folgende, rein elektrostatische Betrachtungen erklären und berechnen.

Nehmen wir – im Gegensatz zu den Verhältnissen bei der praktischen Anwendung – die Emission nur so weniger Elektronen an, daß ihre Anwesenheit das Feld in der Nähe der Elektroden nicht verändert. Das Feld wird also nur durch die Ladungen der Elektroden bestimmt. Beträgt die Potentialdifferenz zwischen Gitter und Kathode U_g, dann trägt die Kathode eine Elektrizitätsmenge

$$Q_1 = C_g U_g,$$

wobei C_g die Kapazität Gitter-Kathode ist. Dieser Größe Q_1 entsprechen eine Ladungsdichte σ_1 auf der Kathode und ein durch $4\pi\sigma_1$ bestimmtes Feld E_1 an der Kathode. Nun legen wir eine Spannung U_a zwischen Anode und Kathode und erhalten dadurch auf der Kathode eine zusätzliche Ladung Q_2, die gegeben ist zu

$$Q_2 = C_a U_a.$$

C_a bedeutet dabei die Kapazität Anode-Kathode *unter Berücksichtigung des Gitters und des dadurch bedingten Abschirmeffekts*, d.h. $C_a \ll C_g$.

Unter diesen Bedingungen ist $Q_2 \ll Q_1$, und das Zusatzfeld E_2, das von Q_2 aufgebaut wird, ist bedeutend schwächer als E_1. Wir wollen jetzt annehmen, daß der Anodenstrom von den beiden Feldern E_1 und E_2 hervorgerufen wird. Besitzt die Röhre einen definierten Innenwiderstand, so wird der Anodenstrom proportional zu dem in der Nähe der Kathode herrschenden Feld sein. Dieses Feld verändert sich wie $Q_1 + Q_2$, d.h. wie $C_g U_g + C_a U_a$ oder wie $U_a + \frac{C_g}{C_a} U_g$. Beziehen wir den Widerstand, wie wir es bei der empirischen Beschreibung der Charakteristiken getan haben, auf die Anodenspannung, so können wir sagen:

$$R_i i_a = U_a + \frac{C_g}{C_a} U_g.$$

Setzen wir dies gleich $U_a + K U_g$, so sehen wir, *daß der Verstärkungsfaktor K der Röhre gleich dem Verhältnis von Kapazität Gitter-Anode zu Kapazität Anode-Kathode ist, wobei bei letzterer der Abschirmeffekt des Gitters berücksichtigt werden muß.*

Bei Anwesenheit einer Raumladung wird diese Überlegung ungenau, da das Feld an der Kathode Null ist. Man kann sie jedoch ohne weiteres in der Nähe der Kathode für das Feld anwenden, welches die Elektronen aus der Raumladung herauszieht, um den Anodenstrom i_a zu bilden. Die von uns angegebene Berechnung von K ist also approximativ auch hier anwendbar. Experimentell ist sie übrigens gut bestätigt worden.

Berechnung des Verstärkungsfaktors K für einige einfache Fälle[1])

Wir legen in einer Triode an das Gitter die Spannung U_g und an die Anode die Spannung U_a in bezug auf die Kathode. Das Feld an der Kathode sei dann gleich dem, welches herrschen würde, wenn der Platz des Gitters von einem Zylinder mit

[1]) Dieser und der folgende Abschnitt können bei einer ersten Lektüre übergangen werden.

dem gleichförmigen Potential U eingenommen wäre. Dieses Potential wird wenig von U_g verschieden sein, so daß man setzen kann:

$$\frac{U_a - U_g}{U_a - U} = 1 + D$$

mit $D \ll 1$. Daraus folgt

$$U = \frac{U_g}{1 + D} + U_a \frac{D}{1 + D}.$$

Dies ist das resultierende Potential U, welches die Elektronen aus der Kathode ablöst. Nach dem vorigen Abschnitt können wir also schreiben

$$D = \frac{1}{K} = \frac{C_a}{C_g}.$$

Wir wollen nun die Berechnung von D für eine Triode vornehmen, die schematisch in Abb. 543 dargestellt ist. Das Gitter wird von n Längsdrähten mit dem Radius ϱ parallel zur Kathode gebildet. Kathode, Gitter und Anode sind als konzentrische Zylinder angeordnet. Der Radius der Anode sei r_a, der Radius des Gitterzylinders betrage r_g. Mit B bezeichnen wir die Ladung pro Längeneinheit auf einem Gitterstab. In einer Entfernung r von einem solchen Stab wird das Potential $2B \ln r$ (siehe Seite 33) existieren. Das Potential φ muß dann in der Mitte jedes Gitterstabes einen Pol besitzen und auf der Anode konstant sein: $r = r_a$. Diese zweite Bedingung realisiert man, indem man Pole in den den Gitterstäben zugeordneten Punkten (siehe die Theorie der elektrischen Abbildungen) in der Entfernung $\frac{r_a^2}{r_g}$ von der Kathode anbringt. Das Potential hat dann die Form

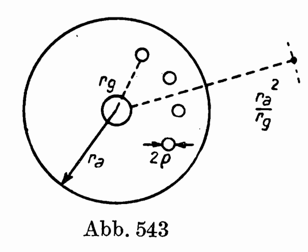


Abb. 543

$$\varphi = \sum_{m=0}^{n} 2B \ln r_m - \sum_{m=0}^{n} 2B \ln r'_m,$$

mit

$$r_m = Z - r_g e^{\frac{2\pi i m}{n}},$$

$$r'_m = Z - \frac{r_a^2}{r_g} e^{\frac{2\pi i m}{n}}.$$

Z ist dabei die Abbildung des Punktes, für den man das Potential φ angibt.

Für φ kann man auch noch schreiben:

$$\varphi = 2B \left[\ln \prod_{m=0}^{n} \left(Z - r_g e^{\frac{2\pi i m}{n}} \right) - \ln \prod_{m=0}^{n} \left(Z - \frac{r_a^2}{r_g} e^{\frac{2\pi i m}{n}} \right) \right]$$

$$= 2\,B \ln \frac{Z^n - r_g^n}{Z^n - \left(\frac{r_a^2}{r_g} \right)^n},$$

da $r_g e^{\frac{2\pi i m}{n}}$ tatsächlich die m-te Wurzel der Gleichung

$$Z^n - r_g^n = 0.$$

Betrachten wir nun den Realteil von φ, so finden wir als Potentialfunktion im Punkt (r, Θ):

$$\varphi = 2B \ln \sqrt{\frac{r^{2n} - 2r^n r_g^n \cos n\Theta + r_g^{2n}}{r^{2n} - 2r^n \left(\frac{r_a^2}{r_g}\right)^n \cos n\Theta + \left(\frac{r_a^2}{r_g}\right)^{2n}}}.$$

Den Wert des Gitterpotentials erhält man in diesem Fall, indem man einen Punkt auf der Oberfläche eines Gitterstabes betrachtet. Ist ϱ der Radius eines solchen Gitterstabes, so gilt

$$r = r_g + \varrho$$

oder

$$r = r_g + i\varrho.$$

Nehmen wir an, daß $n \gg 1$ und $\frac{n\varrho}{r_g} \ll 1$, dann ist

$$\varphi_g = U_g + \text{const} = 2nB \left[\frac{1}{n} \ln \frac{n\varrho}{r_g} - 2 \ln \frac{r_a}{r_g}\right].$$

Den Wert des Anodenpotentials erhält man für $r = r_a$ zu

$$\varphi_a = U_a + \text{const} = 2nB \ln \frac{r_g}{r_a}$$

oder durch Subtraktion:

$$U_a - U_g = 2nB \left[\ln \frac{r_a}{r_g} - \frac{1}{n} \ln \frac{n\varrho}{r_g}\right].$$

Nun ist nach der allgemeinen Formel $Q = CU$ der Wert der Gitterladung nB pro Längeneinheit gegeben zu

$$nB = \frac{U_a - U}{2 \ln \frac{r_a}{r_g}}.$$

Dabei ist $\frac{1}{2 \ln \frac{r_a}{r_g}}$ die Kapazität der beiden konzentrischen Zylinder pro Längeneinheit. Setzen wir nun $2\,Bn$ aus der letzten Gleichung in $U_a - U_g$ ein, so finden wir:

$$U_a - U = \frac{U_a - U_g}{1 + \frac{\ln \frac{r_g}{n\varrho}}{n \ln \frac{r_a}{r_g}}}.$$

Folglich ergibt sich aus dem Verhältnis

$$\frac{U_a - U_g}{U_a - U} = 1 + D$$

der Wert von D und schließlich der Wert des Verstärkungsfaktors K der Triode zu

$$K = \frac{1}{D} = n \frac{\ln \frac{r_a}{r_g}}{\ln \frac{r_g}{n\varrho}} .$$

Ebene Elektroden

Bei bestimmten Trioden erweist es sich als zweckmäßig, die drei Elektroden durch parallele ebene Platten zu approximieren. Die Berechnung des Verstärkungsfaktors K für diesen Fall ist eine gute Übung für die Potentialtheorie.

Betrachten wir den Ausdruck

$$\varphi = C \log \left(2 \sin \pi \frac{x + iy}{d}\right).$$

Wie im folgenden angegeben werden soll, kann man zeigen, daß dieser Ausdruck gerade das Potential darstellt, das von einem aus parallelen Stäben im Abstand d gebildeten Gitter, das auf Ox senkrecht steht, erzeugt wird (Abb. 544). Tatsächlich ist φ periodisch: für $x, x + d, x + 2d, \ldots$ nimmt der Realteil von φ wieder den gleichen Wert an:

$$C \log 2 \sqrt{\cosh^2\left(\frac{\pi y}{d}\right) - \cos^2\left(\frac{\pi x}{d}\right)} .$$

Abb. 544

In großem Abstand ($y \gg d$) findet man

$$\varphi = \frac{C \pi y}{d}$$

d.h. ein konstantes Feld $-\frac{\partial \varphi}{\partial y}$. Das entspricht gerade dem vorstehenden Fall, das Gitter erscheint aus großer Entfernung als gleichförmig geladene Platte. Sind schließlich x und y sehr klein, d.h. in der Nähe eines Stabes, so findet man durch die Entwicklungen

$$\cos^2\left(\frac{\pi x}{d}\right) = 1 - \frac{\pi^2 x^2}{2d^2}$$

und

$$\cosh^2\left(\frac{\pi y}{d}\right) = 1 + \frac{\pi^2 y^2}{2d^2}$$

für φ den Ausdruck

$$\varphi = C \log \left(\frac{2\pi r}{d}\right),$$

der gerade das Potential eines geladenen Stabes darstellt.

Wir wollen diese Resultate nun auf unsere Triode übertragen. Das Potential auf der Anode ist konstant. Dies führt uns zu der Annahme einer Gitterabbildung in der Entfernung $y - h$ von der Anode. Die Potentialfunktion hat dann die Form

$$\varphi = U_a + A \left\{ \log 2 \sin \frac{\pi}{d} [x + i(y - h)] - \log 2 \sin \frac{\pi}{d} [x + i(y + h)] \right\}.$$

Auf der Anodenfläche $y = 0$ verschwindet nach den obigen Angaben der Realteil der Klammer, und es bleibt übrig:

$$\varphi = U_a.$$

Auf der Oberfläche eines Gitterstabes, dessen Radius ϱ ist, betrachten wir z.B. den Punkt $z = \varrho + ih$ (wir nehmen $h \gg d$ – Entfernung der Stäbe –) und werden finden, daß

$$\varphi_g = U_g = U_a + A \left\{ \log 2 \sin \frac{\pi \varrho}{d} - \log 2 \sin \frac{2 \pi i h}{d} \right\}.$$

Da nun

$$2 \sin \frac{2 \pi i h}{d} = 2 \sinh \frac{2 \pi h}{d} \approx e^{\frac{2\pi h}{d}}$$

ist, folgt also

$$U_a - U_g = A \left\{ \frac{2 \pi h}{d} - \log 2 \sin \frac{\pi \varrho}{d} \right\}.$$

Um den Verstärkungsfaktor K zu erhalten, werden wir auf der Gitterebene das äquivalente Potential V berechnen. Dazu benutzen wir das Feld E an der Anode. Das reelle Potential oder der Realteil von φ hat nach dem allgemeinen Ausdruck für φ den Wert

$$U_a + A \log \sqrt{\frac{\sin^2 \frac{\pi x}{d} \cosh^2 \frac{\pi (y - h)}{d} + \cos^2 \frac{\pi x}{d} \sinh^2 \frac{\pi (y - h)}{d}}{\sin^2 \frac{\pi x}{d} \cosh^2 \frac{\pi (y + h)}{d} + \cos^2 \frac{\pi x}{d} \sinh^2 \frac{\pi (y + h)}{d}}}.$$

In der Nähe von $y = 0$ erhält man in der Annahme, daß

$$\frac{\pi h}{d} \gg 1$$

oder

$$\cosh^2 \approx \sinh^2,$$

den Ausdruck

$$R(\varphi) = U_a + A \log \sqrt{\frac{e^{\frac{2\pi(h - y)}{d}}}{e^{\frac{2\pi(h + y)}{d}}}} = U_a - A \frac{2 \pi y}{d}.$$

Für das Feld gilt daher

$$E = -\left(\frac{\partial \varphi}{\partial y}\right)_{y = 0} = \frac{2 \pi A}{d}.$$

In dieser Gleichung kann A noch eine Funktion der bereits gefundenen Formel für $U_a - U_g$ sein.

Nun gilt nach Definition

$$U_a - U = Eh = \frac{(U_a - U_g)h}{\frac{d}{2\pi}\ln\frac{1}{2\sin\frac{\pi\varrho}{d}} + h} = \frac{U_a - U_g}{1 + D}.$$

Daraus erhält man den Verstärkungsfaktor $K = \frac{1}{D}$ für eine Triode mit ebenen Elektroden zu

$$K = \frac{2\pi h}{d} \cdot \frac{1}{\ln\frac{1}{2\sin\frac{\pi\varrho}{d}}}.$$

Veränderung der Äquipotentiallinien in einer Triode bei Variation des Gitterpotentials

In der untenstehenden Abb. 545 ist die Kathode durch die untere Horizontale K dargestellt. Die auf einem konstanten, gegenüber der Kathode positiven

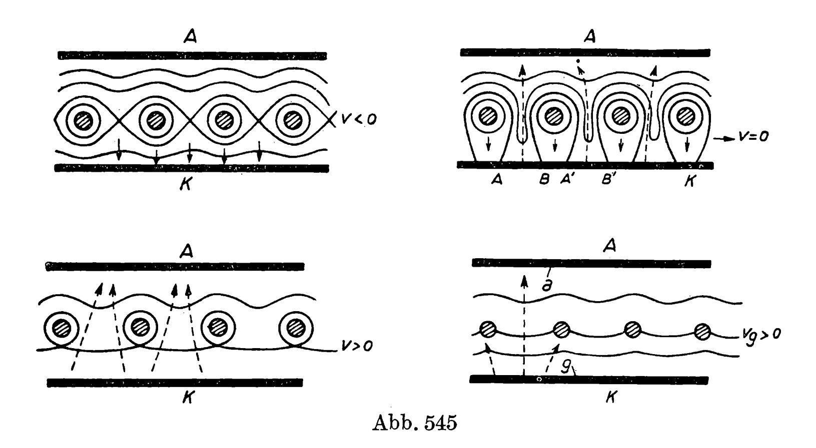


Abb. 545

Potential liegende Anode sei die obere Horizontale A. Das Gitter besitze zuerst ein negatives Potential V, das von Abbildung zu Abbildung größer und schließlich positiv wird. Die jeweils charakteristischen Potentiallinien sind ausgezogen. Die die Kathode erreichenden Linien sind die Linien des Potentials Null.

Durch ausgezogene Pfeile sind die Richtungen der Kraftlinien, durch gestrichelte Pfeile die der Elektronenwege dargestellt.

Verwendung einer Triode als Spannungsverstärker

Obgleich die verschiedenen Anwendungsmöglichkeiten der Triode das Thema eines besonderen Kapitels sein müssen, ist zum Verständnis des folgenden die Kenntnis der Triode als Spannungsverstärker unbedingt notwendig.

Wir schalten einen Widerstand R mit der Anode (Abb. 546) in Reihe. Bezeichnen wir mit E_0 die Spannung der Speisebatterie, dann ist die Spannung an der Anode zu jedem Zeitpunkt gegeben zu[1])

$$U_a = E_0 - R i.$$

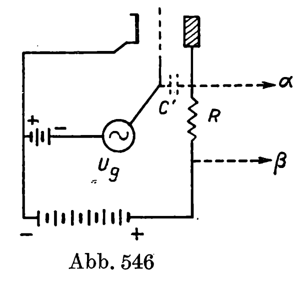


Abb. 546

Der veränderliche Teil der Anodenspannung ist also $-R i$. Verändert man die Gitterspannung U_g, dann sind die Veränderungen des Anodenstroms gegeben zu

$$R_i i = U_a + K U_g$$

oder

$$R_i i = -R i + K U_g;$$

$$i = \frac{K U_g}{R_i + R}.$$

Zwischen den Klemmen α und β des Widerstandes R findet man eine Spannung $-R i = U$, die proportional zu U_g ist und den Wert

$$U = -\frac{K R}{R_i + R} U_g$$

besitzt.

Die Spannung ist von entgegengesetzter Phase gegenüber U_g, in der Größe jedoch proportional dazu. Der Proportionalitätsfaktor bzw. Verstärkungsfaktor der Anordnung hat die Form

$$\mu = -\frac{K R}{R_i + R}.$$

Wir sehen also, daß μ nicht mit K übereinstimmt (K = Verstärkungsfaktor der Triode), immer kleiner ist und sich K nur für $R \gg R_i$ nähert. Bei einer solchen Wahl des Widerstandes R jedoch verursacht der Gleichstromanteil i_0 des Anodenstroms einen starken Spannungsabfall. Die mittlere Effektivspannung an der Anode $E_0 - R i_0$ nimmt ab, und R_i vergrößert sich so, daß selbst diese Bedingungen weniger vorteilhaft sind, als man annehmen könnte (die Charakteristiken haben eine stärkere Krümmung, siehe Abb. 542).

Eine weitere *Begrenzungsursache* liegt in der Existenz einer Kapazität C' zwischen Anode und Gitter in der Röhre selbst. Nehmen wir an, daß U_g eine sich mit $\sin \omega t$ verändernde Wechselspannung ist, dann verursacht die an C' liegende Spannung $U_a - U_g$ einen Strom

$$i_1 = j C' \omega (U_a - U_g).$$

[1]) Die Bestimmung der Vorzeichen von i und den Spannungen ist von großer Bedeutung. Der Anodenstrom geht vom +-Pol zur Anode und dann zur Kathode.

Dieser Strom, der im Scheinwiderstand des Gitterkreises fließt, ruft ein falsches Signal des Gitters hervor, das dann verstärkt wird usw. Wenn dieses falsche Signal des Gitters größer als das beabsichtigte Signal des Gitters ist, dann ergibt sich im allgemeinen eine unbegrenzte Verstärkung dieser Störung. Die in Abb. 546 gezeigte Anordnung wäre kein Verstärker mehr, sondern ein Oszillator.

Will man also die Leistungen der Verstärkertriode erhöhen, so muß man versuchen, K zu vergrößern und C' zu verkleinern, um diese *Rückkopplung* zu verringern.

Schirmgitterröhre

Ein einziger Kunstgriff gestattet diese beiden Bedingungen gleichzeitig zu erreichen: In den sogenannten Schirmgitterröhren bringt man zwischen Steuergitter und Anode einen elektrostatischen Schirm in Form eines sehr engen Gitters an (Abb. 547). Dieser Schirm umgibt im allgemeinen so gut wie möglich die Anode und liegt auf einem konstanten, gegenüber der Kathode beträchtlichen Potential. Für Empfängerröhren, wie sie in Radioapparaten verwendet werden, liegt diese Schirmgitterspannung zwischen 50 und 150 V. Von diesem Gitter werden Elektronen angezogen. Dadurch trägt das Schirmgitter zur Verringerung der Raumladung und damit indirekt zur Vergrößerung des Anodenstroms bei. Der Zweck dieses elektrostatischen Schirmes ist eine Verringerung bzw. Aufhebung der Kapazität C', und dabei geht gleichzeitig die Kapazität Anode-Kathode gegen Null. Diese letztere Kapazität steht immer im Nenner des den Verstärkungsfaktor K bestimmenden Ausdruckes. Dieser Ausdruck wird also daher gleichzeitig gegen Unendlich gehen. Da durch die Anwesenheit des elektrostatischen Schirms die Wirkung von U_g auf i nicht beeinflußt wird, weil der Schirm hinter dem Gitter liegt, wird auch die Proportionalität zwischen U_g und i, d.h. die Steilheit der Röhre $\frac{K}{R_i}$ nicht verändert. R_i geht dann ebenfalls gegen Unendlich.

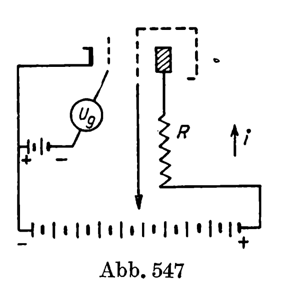


Abb. 547

In einer Schirmgitterröhre nimmt also die allgemeine Beziehung $R_i i = U_a + K U_g$ im Grenzfall (K und R_i unendlich) die Form

$$i = \frac{K}{R_i} U_g$$

an, d.h., sie wird unabhängig von U_a. Die beiden Begrenzungen der Verstärkung (K endlich und $C' \neq 0$) verschwinden also zugleich.

Die Schirmgitterröhre wurde um 1925 von Schottky und Hull entwickelt. Sie gestattet größere Verstärkungen (in der Größenordnung von 100, 200, ... pro Stufe) für hohe Frequenzen (bis 60, 100 und sogar 300 MHz).

Sekundäremission der Anode. Grenzen der Schirmgitterröhre. Pentode

Wir wollen nun eine Schirmgitterröhre nach Abb. 547 betrachten. Zuerst nehmen wir ihre Kennlinien auf ($R = 0$): Bei einer Veränderung von U_g für ver-

schiedene Werte von U_s haben diese Kennlinien die in Abb. 548 gezeigte Form: Sind jedoch sowohl U_g als auch U_s konstant und man verändert U_a, dann erhält man keine Veränderung des Anodenstroms i_a (mit Ausnahme des Falles, daß K und R_i unendlich sind). Dies gilt indessen nur, wenn U_a bedeutend größer als U_s ist, da man leicht sieht, daß für $U_a \rightarrow 0$ auch $i_a \rightarrow 0$ gehen muß. In Abb. 549 ist der Strom i_a als Funktion von U_a für U_g und U_s aufgetragen, und man kann vermuten, daß die Kennlinien horizontal auslaufen.

Das Experiment ergibt jedoch ein anderes Verhalten: Der Anodenstrom zeigt einen deutlichen Abfall, wenn die Anodenspannung auf einen Wert kleiner als die Schirmgitterspannung abfällt. Die Erklärung dieser Tatsache liefert die

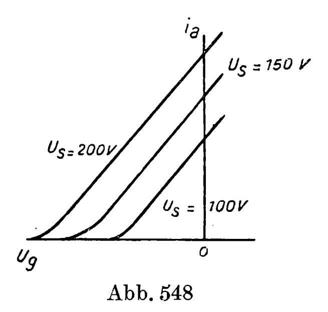


Abb. 548

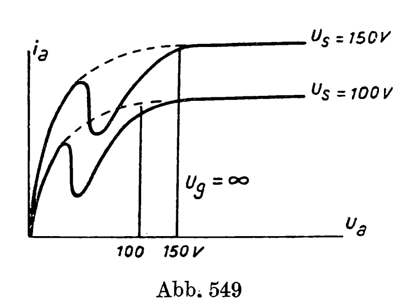


Abb. 549

Sekundäremission der Anode. Metalle, auf die Elektronen mit einer genügend hohen Geschwindigkeit auftreffen, emittieren selbst mehr Elektronen als einfallen. Das Verhältnis zwischen auftreffenden und emittierten Elektronen kann leicht einen Wert zwischen 3 und 6 erreichen. Diese sogenannten Sekundärelektronen können einen Strom bilden, indem sie sich gegen eine Elektrode auf höherem Potential (falls eine solche vorhanden) bewegen. Bei der Schirmgitterröhre liefert die Anode eine beträchtliche Anzahl von Sekundärelektronen. Diese können sich aber nicht von ihr entfernen, solange die Anodenspannung höher als die Schirmgitterspannung ist. Liegt dagegen an der Anode eine kleinere Spannung als am Schirmgitter, dann bewegen sich die Elektronen zum Schirmgitter hin, und es tritt ein zusätzlicher Anodenstrom auf, der jedoch in der zum eigentlichen Anodenstrom entgegengesetzten Richtung fließt. Auf diese Weise erklärt sich die Abnahme des Anodenstroms. Ist die Anodenspannung sehr niedrig, dann reicht die Energie der auftreffenden Primärelektronen nicht mehr aus, um Sekundärelektronen auszulösen, und der Effekt verschwindet.

Legen wir nun den Widerstand R in den Anodenkreis der Schirmgitterröhre (Abb. 547), dann hat die Anodenspannung zu jedem Zeitpunkt den Wert

$$E_0 - Ri = (E_0 - Ri_0) - \frac{KR}{R_i} U_g .$$

Besitzt U_g eine bestimmte Amplitude, dann kann diese Spannung bis unter die Schirmgitterspannung U_s abfallen. Daraus folgt eine starke Deformation des verstärkten Signals, die zu schnellen Veränderungen von K und R_i führt.

Dieser Nachteil wird bei Verwendung von Röhren mit drei Gittern, den *Pentoden*, vermieden, die eine Elektrode mehr als die Schirmgitterröhre enthalten (Abb. 550). Dieses dritte Gitter, das sogenannte Bremsgitter G_3, befindet sich zwischen Schirmgitter und Anode und liegt auf einem niedrigen Potential (im

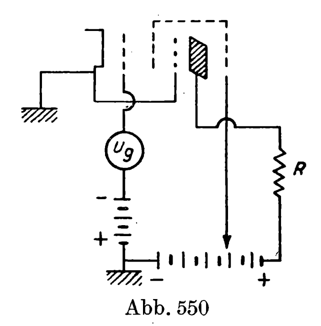


Abb. 550

allgemeinen ist das Bremsgitter mit der Kathode verbunden). Die Sekundärelektronen können also den Primärstrom nicht mehr verringern, und die in Abb. 549 dargestellten Kennlinien haben den gestrichelten Verlauf.

Die Pentode wurde 1928 von Tellegen in den Philips-Werken entwickelt.

Schwierigkeiten bei der Anwendung von Trioden bei sehr hohen Frequenzen

Obgleich man noch kompliziertere Röhren als die Pentoden hergestellt hat, die bis zu 7 und 8 Gitter mit verschiedenen Funktionen enthielten, kann man sagen, daß in allen diesen heute als klassisch zu bezeichnenden Röhren eine Steuerwirkung erzielt wurde, indem man die Anzahl der in einem gegebenen Augenblick durch eine bestimmte Elektrode (Steuergitter) tretenden Elektronen beeinflußt. Aus verschiedenen Gründen ist diese Steuerung um so schwieriger, je schneller die Elektronenfolge, d.h. je höher die Frequenz ist. Einer dieser Gründe ist, daß die *Laufzeit* der Elektronen zwischen Kathode und Anode bei sehr hohen Frequenzen (in der Größenordnung von 100 MHz) vergleichbar wird mit der Schwingungsdauer der Stromkreise. Diese Laufzeit, die man leicht größenordnungsmäßig berechnen kann, hängt ihrerseits von der Raumladung ab und wird daher durch die Schwingungen moduliert. Man sieht also, daß dieser Effekt zusammen mit dem Auftreten von Kapazitäten zwischen den Elektroden die Steuerwirkung des Gitters aufheben kann.

Tatsächlich liegt der oberste Verwendungsbereich von Trioden mit großer Leistung (man erreicht 500 kW) bei $20 - 30 \cdot 10^6$ Hz, bei Trioden mit mittlerer Leistung bei $100 - 200 \cdot 10^6$ Hz. Für Frequenzen von $300 - 400 \cdot 10^6$ Hz müssen sehr kleine Spezialtrioden verwendet werden. Pentoden, die wegen ihrer zahlreichen Gitter eine größere Laufzeit besitzen, funktionieren bereits bei Frequenzen nicht mehr, bei denen Trioden gleicher Leistung noch arbeiten.

Moderne Elektronenröhren

Die Scheibenröhre

Ein an sich nebensächlicher, bei hohen Frequenzen jedoch bedeutender Grund, der dann die Verwendung von Trioden bei sehr hohen Frequenzen verhindert, ist *die Länge der Zuführungen* im Röhreninneren. Die Zuleitung vom Sockelanschluß des Gitters bis zum Gitter selbst entspricht einer in Reihe liegenden Selbstinduktion $jL\omega$. Berücksichtigt man nun noch die von Gitter und Kathode gebildete Kapazität $\frac{1}{jC\omega}$, so liegt am Gitter nur der Bruchteil

$$\frac{\frac{1}{jC\omega}}{jL\omega + \frac{1}{jC\omega}}$$

der an den Klemmen angelegten Spannung. Man sieht aus dieser Formel sofort, daß dieser Bruchteil für hohe Frequenzen gegen Null geht.

Bei den 1940–41 in Amerika entwickelten *Scheibenröhren* sind die Sockelanschlüsse als *konzentrische Scheiben* ausgebildet, die vielen parallelen Drähten ent-

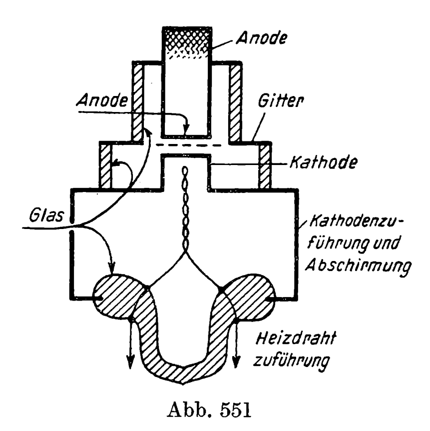


Abb. 551

sprechen und daher einen bedeutend geringeren Scheinwiderstand $jL\omega$ besitzen.

Durch die Konstruktion der Scheibenröhre ist es gelungen, eine Triode zu entwickeln, die bis zu 4000 MHz (an Stelle von 400 MHz bei gewöhnlichen Trioden) benutzt werden kann. In der Abb. 551 ist eine solche Röhre schematisch dargestellt. Man sieht, daß die verschiedenen Zuführungen ringförmig ausgebildet und Kathode, Gitter und Anode zur Verringerung der Laufzeit dicht beieinander angeordnet sind. Einzelheiten wurden, um die Übersicht zu wahren, nicht eingezeichnet. Selbstverständlich erfordert auch diese Röhre ein gutes Vakuum.

Laufzeitröhren

Seit 1938 hat man die verschiedensten Verfahren ausgearbeitet, um die Laufzeit als Leistungssteuerungselement in Elektronenröhren mit Glühkathode auszunutzen. Alle dabei entwickelten Röhren, die auf diesem Prinzip beruhen, kann man unter dem Begriff „Laufzeitröhren" zusammenfassen. Im folgenden sei ihr Prinzip angegeben.

Die Röhre enthält alle Elemente einer Elektronenquelle: *1* Kathode, *2* Wehnelt-Gitter, *3*, *4* ein oder zwei Fokussierungselektroden, *5* Auffangelektrode am Ende des Elektronenweges. Der Elektronenstrahl wird solchen Bedingungen unterworfen, *daß die Geschwindigkeit der Elektronen im Laufe der Zeit moduliert wird.* Im Elektronenstrahl werden die schnelleren Elektronen gegenüber den langsameren an Boden gewinnen und in bestimmten Punkten z.B. die bereits eine Halbperiode vorher ausgesandten langsameren Elektronen erreichen. Dadurch bilden sich in diesen bestimmten bevorzugten Punkten des Strahles (z.B. in A) Elektronenpakete, die sich danach selbstverständlich wieder auflösen. Diese Ladungspakete können in in der Nähe befindlichen Stromkreisen entsprechender Dimensionen (z.B. in Abb. 552 *8* Hohlraumresonator oder *9* aus Selbstinduktion und Kapazität gebildetem Stromkreis) durch Influenz und Induktion starke Schwingungen erzeugen, wenn die Stromkreise mit der Frequenz des Ladungspaketes in Resonanz stehen.

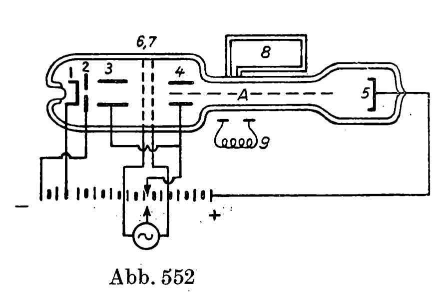


Abb. 552

Die Abb. 552 zeigt eine der Realisierungsarten dieses Prinzips. In ihr wird die Geschwindigkeitsmodulation durch zwei Gitter (*6* und *7*) erreicht, zwischen denen eine Wechselspannung liegt. Man sieht, daß die Elektronen je nach der Richtung dieser Potentialdifferenz in dem Augenblick beschleunigt bzw. verzögert werden, in dem sie sich zwischen den beiden Gittern befinden. Daraus ergibt sich im allgemeinen die erwähnte „Paketbildung".

Wir werden später noch andere Formen der Geschwindigkeitsmodulation angeben. Es ist jedoch notwendig, vorher die Hohlräume, die mit dem Ladungspaket in Resonanz treten, zu behandeln.

Bemerkung über die Hohlraumresonatoren

Ein metallischer Hohlkörper ist in der Lage, bei hohen Frequenzen in elektromagnetische Resonanz zu treten. Um dies zu zeigen, braucht nur eine Lösung der Maxwellschen Gleichung gefunden werden, die mit den durch die Anwesenheit des Körpers gegebenen Grenzbedingungen in Einklang steht.

Zwischen zwei leitenden parallelen Platten in der Entfernung d wird man natürlich einen Bereich mit ebenen stehenden Wellen finden. Die Felder E und H verlaufen parallel zu den Leiterebenen, und die Frequenz ist so, daß $\frac{\lambda}{2} = d$ oder $\frac{d}{n}$, wobei n eine beliebige ganze Zahl ist (tatsächlich erfordert die Grenzbedingung, daß

das Feld E in jedem Leiter verschwindet). Dieser Bereich ist in Abb. 553 dargestellt und entspricht bei einer Kugel natürlich einer komplizierteren Verteilung (siehe Abb. 554). Ein Hohlraumresonator wird z. B., wie es in Abb. 555a dargestellt wird, durch eine Koppelschleife angeregt. Das Auftreten eines Flusses des Feldes H durch die Schleife ist gleichbedeutend mit einem Koeffizienten der gegenseitigen Induktion zwischen dem Hohlraumresonator und dem Kreis, mit dem die Schleife verbunden ist. Die Anregung kann auch durch kleine Antennen (Abb. 555b) erfolgen.

Abb. 553

Wie wir weiter unten sehen werden, stellen die Hohlraumresonatoren sehr interessante Stromkreise dar.

Wir wollen als Beispiel eine hohle Kugel betrachten. Diese besitzt eine bestimmte Resonanz, wenn man sie mit einer Wellenlänge anregt, die das 1,15fache ihres Durchmessers beträgt.

Abb. 554

Sehr allgemein kann man sagen, daß die fundamentale Resonanzwellenlänge eines Hohlraums in der *Größenordnung seiner Lineardimensionen liegt*. Betrachten wir die Hohlräume oder andere Resonatoranordnungen im einzelnen, so werden wir für die Wellenlängen etwas *kleinere* Werte erhalten. Betrachten wir dagegen die üblichen Resonanzkreise, die aus einer Selbstinduktion mit zahlreichen Windungen und einer Kapazität bestehen, so zeigt sich, daß die Resonanzwellenlänge bedeutend größer als ihre Lineardimensionen ist. Diese einfache Bemerkung erklärt die Schwierigkeiten, die sich bei der Anordnung von Schwing-

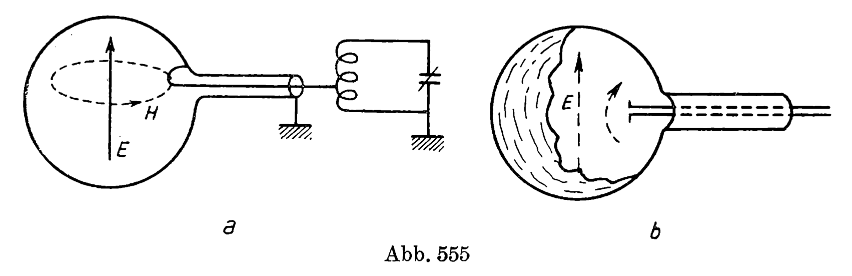


Abb. 555

kreisen aus Selbstinduktion und Kapazität bei sehr hohen Frequenzen ergeben. Man kann ihre Dimensionen nicht unbegrenzt verkleinern, da sie eine bestimmte Leistung abgeben sollen und da die mit ihnen verbundenen Röhren mit zunehmender Frequenz nur unwesentlich kleiner werden. Wir wollen noch darauf hinweisen, daß sich bei den relativ zu großen Stromkreisen die Strahlung sehr schnell vergrößert und sie folglich durch diese Strahlung gedämpft werden.

Die Hohlraumresonatoren werden also speziell als Stromkreis im Gebiet ultrakurzer Wellen verwendet. Will man sie in der Art von Stromkreisen behandeln, so müssen sie als *Stromkreise mit Selbstinduktion und entsprechender Kapazität* angesehen werden.

Man kann leicht erklären, wie man einen Hohlraum als Grenzfall eines Stromkreises betrachten kann: Die Selbstinduktion L einer einzelnen Schleife liege mit

einer Kapazität C in Reihe. Wenn wir viele Schleifen parallel legen, dann wird die äquivalente Selbstinduktion entsprechend kleiner (durch die Anzahl der Schleifen geteilt), während die Kapazität sich nur unwesentlich ändert (sie verteilt sich trotzdem etwas über die Drähte der Selbstinduktion). Die Resonanzfrequenz steigt sehr stark an. Im Grenzfall erreicht man, indem man die Schleifen um C herum anbringt, einen toroidalen Hohlraum. Man kann also anscheinend mit einer geringen Selbstinduktion und einer großen Kapazität dem Hohlraum eine geringe Kreisgüte zuschreiben. Dies ist jedoch nicht der Fall. Da zahlreiche Stromschleifen parallel geschaltet sind, ist auch der Ohmsche Widerstand sehr klein. Der Strahlungswiderstand verschwindet vollständig, da der Hohlraum geschlossen ist. Die auftretende Kreisgüte ist daher sehr gut.

Klystron

Im Jahre 1938 wurde an der Stanford-Universität von den Gebrüdern E. und H. Varian das Klystron entwickelt. Dabei handelt es sich um einen Oszillator, der nach dem Prinzip arbeitet, einen Elektronenstrahl durch Geschwindigkeitsmodulation zu steuern. Außer den Elementen der Elektronenquelle und des Kollektors (*5*) enthält dieser zwei identische Resonanzhohlräume (*1, 1'*) und (*2, 2'*), die als ringförmige Hohlkörper ausgebildet sind. Jeder Hohlraum ist mit einem Gitterpaar verbunden, durch welches die Geschwindigkeitsmodulation erfolgt. Nehmen wir an, daß die Gitter *I* die Geschwindigkeit modulieren und die Beschleunigungsspannungen so gewählt sind, daß sich an den Gittern *II* ein Elektronenpaket bildet, dann wird der Hohlraumresonator (*2, 2'*) heftig angeregt. Durch ein Kopplungsfeeder (*3*) wird ein Teil der Energie, der ausreicht, den Anregungszustand, d. h. die Eigenschwingung, aufrechtzuerhalten, zum Hohlraum (*1, 1'*) geleitet. Über eine Schleife und ein Feeder (*4*) wird die Schwingungsenergie an einen Verbraucherkreis, z. B. eine Antenne, abgegeben. Die Hohlräume (*1, 1'*) und (*2, 2'*) bilden einen wichtigen Teil des Klystrons und sind wegen der notwendigen Glas-Metall-Verbindung sehr schwierig herzustellen (siehe Abb. 556).

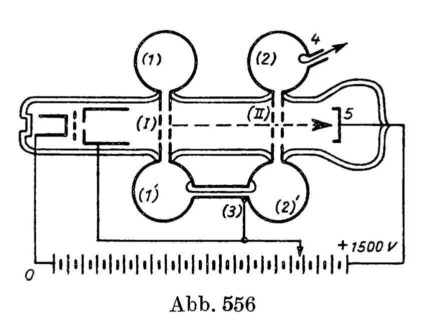


Abb. 556

Mit einem Klystron konnte man bereits 1943 eine Leistung von 400 Watt bei 30 cm Wellenlänge erreichen. Seine Möglichkeiten sind bei weitem noch nicht erschöpft, und in vielen Laboratorien der Welt ist man bemüht, es noch zu vervollkommnen. Im Jahre 1949 erreichte man in Frankreich mit einem Klystron bei 25 cm Wellenlänge 5 kW.

Reflexionsklystron

Die hervorragende Güte der Hohlräume macht das Klystron zu einer sehr „selektiven“ Röhre, wirft jedoch auch das schwierige Problem der Abstimmung der Hohlräume auf. Diese Schwierigkeit wird beim Reflexionsklystron vermieden, das nur einen einzigen Hohlraumresonator mit zwei Gittern enthält. Durch diese

Gitter treten die Elektronen und werden dann an einer gegenüber der Kathode negativen Elektrode (dem Reflektor) reflektiert.

In Abb. 557 ist der schematische Aufbau eines solchen Reflexionsklystrons dargestellt.

Wir wollen hier nicht die genaue Theorie dieses Klystrons angeben. Der kinematische Teil dieser Theorie bietet keine Schwierigkeiten, die Bildung der Elektronenpakete erfolgt durch die Geschwindigkeitsmodulation (z. B. eine sinusförmige). Dagegen ist es schwieriger, die Leistungsübertragung und den Wirkungsgrad zu berechnen.

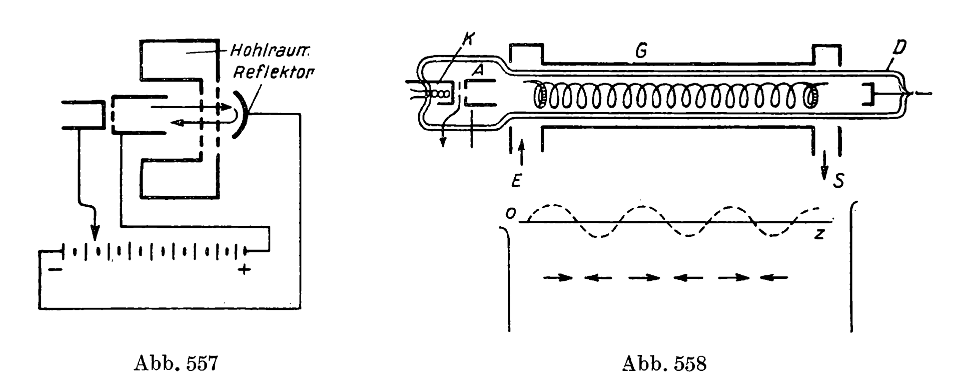


Abb. 557 Abb. 558

Wanderfeldröhre

1943 wurde von KOMPFNER dieser Röhrentyp konstruiert und durch PIERCE in den Bell Telephone Laboratories 1946 industriell entwickelt. In der Wanderfeldröhre wird eine Geschwindigkeitsmodulation, eine Bildung von Elektronenpaketen, und die Leistungsübertragung vom Gleichstrom- in den Wechselstromkreis (dies ist notwendig, um sie verstärken oder aussenden zu können) ähnlich wie beim Klystron vorgenommen. Diese Röhre besitzt neben einigen Vorteilen den Nachteil starken Rauschens und wird bei Frequenzen von 1000 bis 10000 Hz verwendet.

In Abb. 558 ist eine solche Röhre schematisch dargestellt. Eine Elektronenquelle, eine Kathode K und die Anode A erzeugen einen Elektronenstrahl entlang der Achse. In Richtung der Achse befindet sich eine Wendel aus Nickeldraht mit der Steigung m (wir wollen $m = {}^1/_7$ annehmen). An den beiden Enden der etwa 30–40 cm langen Wendel befindet sich jeweils eine kurze Antenne a_1 bzw. a_2 oder eine Schleife, die über einen Energieein- oder -ausgang gekoppelt werden kann. In der Abbildung stellt D eine Auffangeelektrode für die Elektronen dar, die auf einer etwas höheren Spannung als A liegt. *Um die Wendel herum befindet sich ein Hohlleiter* G, der die Röhre außen umgibt mit einem Eingang E (an der Seite der Elektronenquelle) und einem Austritt S (an der Seite der Auffangeelektrode). Die Arbeitsweise der Röhre sei im folgenden beschrieben.

Ein in E eintretendes Signal erzeugt in a_1 eine elektromotorische Kraft, die eine sich entlang des Nickeldrahtes ausbreitende Welle hervorruft. Das entsprechende elektrische Feld besitzt eine Longitudinalkomponente in Richtung der Achse, die

sich sinusförmig als Funktion der Zeit und des Raumes verändert, sich in Achsenrichtung jedoch mit der Geschwindigkeit mc ausbreitet (m hatten wir in unserem Fall zu $^1/_7$ angenommen).

Der von der Elektronenquelle ausgehende Elektronenstrahl breitet sich unter der abwechselnd verzögernden und beschleunigenden Wirkung dieses Feldes aus. Das Experiment hat gezeigt, daß man bei einer in der Nähe von mc liegenden Elektronengeschwindigkeit (bei unserem Beispiel $m = {}^1/_7$ genügt eine Spannung von 2000 V) in a_2 eine Abstrahlung von verstärkten Schwingungen erhält: Die Elektronen des Gleichstromkreises haben einen Teil ihrer Energie an den Wechselstromkreis abgegeben. Man kann so z.B. am Ausgang ein gegenüber dem Eingang 100fach verstärktes Signal erhalten.

Die Theorie der Arbeitsweise ist recht kompliziert. Es müssen nicht nur die Beschleunigung der Elektronen durch die Longitudinalkomponente des eben betrachteten Feldes, sondern auch die durch das Feld der Raumladung bedingte Beschleunigung sowie die Rückwirkungen dieses Feldes auf die Wendel selbst berücksichtigt werden.

Wegen des großen Frequenzbandes, in dem diese Röhren arbeitsfähig sind, werden sie sehr häufig z.B. beim Fernsehen verwendet.

Doppelstromröhren

1949 haben Niegard und A.V. Haeff entdeckt, das man in der gleichen Röhre ohne spiralförmige Elektrode den gleichen Effekt erreicht, wenn man mit zwei Elektronenstrahlen mit verschiedenen Geschwindigkeiten arbeitet. In Abb. 559

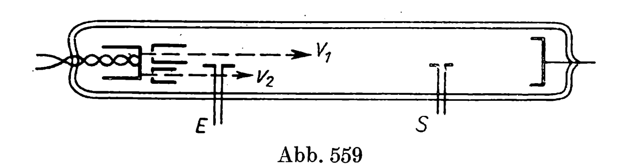


Abb. 559

zeigen wir die Anordnung einer solchen Röhre. Der obere Elektronenstrahl besitzt die Geschwindigkeit v_1, der untere die Geschwindigkeit v_2. Beide Strahlen vermischen sich sehr schnell im Röhrenkolben. Über eine kleine Antenne E (oder einen Hohlleitereingang) wird ein Signal zugeführt und an einer anderen Antenne S (oder einem beliebigen Ausgang) dieses Signal nach seiner Ausbreitung und Verstärkung wieder entnommen. Die Leistung dieser Röhren liegt in der gleichen Größenordnung wie die der Wanderfeldröhren. Die Theorie ist jedoch bedeutend einfacher:

Da die Relativbewegung berechnet wird, kann v_2 ohne weiteres bei der Bewegung als Null angenommen werden. Dagegen wird eine Modulation der Geschwindigkeit des zweiten Strahles δv_2 und seiner Dichte ϱ_2 um $\delta \varrho_2$ auftreten. Ebenso werden v_1 und ϱ_1 mit δv_1 bzw. $\delta \varrho_1$ moduliert. Die Ladung des Elektrons sei $-e (e > 0)$, die Beschleunigung $\frac{d \delta v}{d t}$. Sieht man δv als Funktion des Raumes und

der Zeit an, dann ist die Beschleunigung gegeben zu $\frac{\partial \delta v}{\partial t} + v \frac{\partial \delta v}{\partial z}$, wobei Oz die Richtung der Röhrenachse ist:

$$\frac{d \delta v_1}{dt} = \frac{\partial \delta v_1}{\partial t} + v_1 \frac{\partial \delta v_1}{\partial z} = -\frac{e}{m} E,$$

$$\frac{d \delta v_2}{dt} = \frac{\partial \delta v_2}{\partial t} = -\frac{e}{m} E.$$

Für den veränderlichen Teil des Feldes E gilt

$$\frac{\partial E}{\partial z} = -4\pi(\delta \varrho_1 + \delta \varrho_2).$$

Andererseits genügen $\delta \varrho_1$ und $\delta \varrho_2$ den *Kontinuitätsgleichungen* [1])

$$\frac{\partial \varrho_1}{\partial t} + v_1 \frac{\partial \varrho_1}{\partial z} + \varrho_1 \frac{\partial v_1}{\partial z} = 0,$$

$$\frac{\partial \varrho_2}{\partial t} + \varrho_2 \frac{\partial v_2}{\partial z} = 0.$$

Daraus ersieht man sofort, daß

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + v_1 \frac{\partial}{\partial z}\right)^2 \delta \varrho_1 = +\left(\frac{e}{m} \varrho_1\right) \frac{\partial E}{\partial z} = -\frac{4\pi e \varrho_1}{m} (\delta \varrho_1 + \delta \varrho_2),$$

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} \delta \varrho_2 = -\frac{4\pi e}{m} \varrho_2 (\delta \varrho_1 + \delta \varrho_2).$$

Ein Medium mit der Elektronendichte ϱ nennt man *Plasma.* Dieses Plasma wird entweder durch positive Ionen oder, wie in unserem Falle, durch eine vorgegebene Bewegung des Ensembles im Gleichgewicht gehalten. Die Größe ω_0, für die

$$\omega_0^2 = \frac{4\pi e \varrho_0}{m}$$

gilt, wird *Resonanzfrequenz* dieses Plasmas genannt.

---

[1]) Im Zeitraum dt verändert sich die Ladung des Volumenelementes $dx\,dy\,dz$, die von Elektronen mit der Geschwindigkeit v_1 herrührt, um $\frac{\partial \varrho_1}{\partial t} \cdot dt\,dx\,dy\,dz$. Diese Veränderung kann nur von einem Unterschied der Geschwindigkeit der durch die Fläche z eintretenden und der durch die Fläche $z + dz$ austretenden Ladungen verursacht werden. Daraus ersieht man sofort

$$\frac{\partial \varrho_1}{\partial t} dt\,dx\,dy\,dz = -\frac{\partial (\varrho_1 v_1)}{\partial t} dt\,dx\,dy\,dz,$$

und es folgt die oben angegebene Gleichung für ϱ_1 und v_1. Da $\overline{v}_2 = 0$, vereinfacht sich diese Gleichung für ϱ_2 und v_2.

Wir wollen nun tatsächlich ein einziges Plasma ($\delta \varrho_1 = 0$) annehmen: Dann ist

$$\omega_2^2 = \frac{4 \pi e}{m} \varrho_2$$

und

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} \delta \varrho_2 = - \omega_2^2 \delta \varrho_2 .$$

Resonanz tritt also ein, wenn

$$\frac{\partial}{\partial t} = j \omega = j \omega_2 .$$

Es ist zu beachten, daß diese Resonanz ω_2 von der *Dichte* ϱ_2 abhängt. Wir setzen also

$$\omega_1^2 = \frac{4 \pi e \varrho_1}{m}, \quad \omega_2^2 = \frac{4 \pi e \varrho_2}{m} \quad \text{und} \quad \frac{\partial}{\partial t} = j \omega .$$

Dann wird

$$\delta \varrho_2 = - \frac{\omega_2^2}{\omega_2^2 - \omega^2} \delta \varrho_1$$

und

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + v_1 \frac{\partial}{\partial z} \right)^2 \delta \varrho_1 = + \frac{\omega_1^2 \omega^2}{\omega_2^2 - \omega^2} \delta \varrho_1 .$$

Nun benutzt man die Ausdrücke

$$\frac{\partial}{\partial t} = j \omega, \quad \frac{\partial}{\partial z} = \alpha - \frac{j \omega}{c_1}$$

und nimmt für $\delta \varrho_1$ eine Variation mit $e^{j \omega t + \alpha z - \frac{j \omega z}{c_1}}$ an. Dabei ist α entweder ein Dämpfungs- oder ein Verstärkungsfaktor und c_1 die Ausbreitungsgeschwindigkeit der Dichte- und der Geschwindigkeitsstörungen im Strahl v_1, ϱ_1. Wir finden also folgende Identität:

$$\left[\alpha v_1 + j \omega \left(1 - \frac{v_1}{c_1} \right) \right]^2 \equiv \frac{\omega_1^2 \omega^2}{\omega_2^2 - \omega^2} .$$

Daraus ergeben sich folgende zwei Fälle:

1. $\omega > \omega_2$. In diesem Fall ist $\alpha = 0$ und $c_1 = v_1 \sqrt{\frac{\omega^2 - \omega_2^2}{\omega_1^2}}$, es gibt also keine Verstärkung.

2. $\omega < \omega_2$. In diesem Fall ist $v_1 = c_1$ und $\alpha = \pm \frac{1}{v_1} \frac{\omega_1 \omega}{\sqrt{\omega_2^2 - \omega^2}}$.

Dieses letzte Resultat zeigt, daß sich bei einer relativen Geschwindigkeit v_1 des schnellen Strahls in bezug auf den langsamen Strahl Dichte- und Geschwindigkeitswellen der Elektronen ausbreiten, die entsprechend den Grenzbedingun-

gen gedämpft oder verstärkt werden. Dieser veränderliche Ladungsfluß, der in E durch ein kleines Anfangssignal erzeugt wurde, kann in S durch Abstrahlung oder elektrostatische Kopplung eine verstärkte Leistung abgeben.

Instabilität des Plasmas und ihre Bedeutung

Die vorstehenden Rechnungen, die die Arbeitsweise der HAEFFschen Röhre bestätigen, zeigen kurz Konsequenzen aus der Eigenschaft der Plasmen, in Resonanz zu treten, da überschüssige Ladungen, die sich gegenseitig nach einem $\frac{1}{r^2}$-Gesetz (d. h. in bezug auf die üblichen Anziehungen und Abstoßungen von Molekülen wenig mit der Entfernung abnehmend) abstoßen, nicht im Gleichgewicht bleiben können, was durch die Einführung der POISSONschen Gleichung ausgedrückt wird.

Es scheint, daß sich bestimmte natürliche Phänomene der Elektrizität durch die Einführung dieser Instabilität erklären lassen. Betrachten wir z. B. eine Gewitterwolke, d. h. eine Kumuluswolke, die sich durch das Aufsteigen warmer Luftmassen gebildet hat. Dieser Vorgang wird von einem starken Anwachsen des elektrischen Feldes (durch einfache Verschiebung von geladenen Ionen) begleitet. Dieses intensive elektrische Feld ionisiert durch Stöße zwischen Ionen und Molekülen letztere, und in kurzer Zeit (in der Größenordnung von 1 Minute) kann ein sehr ausgeprägtes Plasma entstehen. Daraus ergeben sich neue Möglichkeiten: Die geringste radioelektrische Störung legt Wege von mehreren hundert Metern zurück, auf denen sie beträchtlich verstärkt wird. Dies zieht neue Möglichkeiten der Kaskadenionisierung nach sich, die diesmal in großem Umfang erfolgt und zu einem *Blitz* führt. Dabei tritt eine plötzliche Bogenentladung in diesem gut leitenden Medium auf, die das Feld aufhebt und daher auch die Leitfähigkeit zerstört, bis sich dieser Vorgang wiederholt.

Im Zeitraum vor einem Blitz müßte man ein durch die Wolke verstärktes Rauschen wahrnehmen können: dies ist tatsächlich der Fall. Für ω_2 findet man die Größenordnung von 1000 MHz, und mit Empfängern, die für diesen Frequenzbereich empfindlich sind, konnte man bereits eindeutig ein solches Rauschen in Gewitterwolken (neben den im Bereich langer Wellen auftretenden klassischen Störungen, die ebenfalls mit beträchtlichen Entladungen verbunden sind) feststellen.

Steuerung des Diodenstroms durch ein axiales Magnetfeld. HULLsches Magnetron

$B\,B'$ sei der Heizdraht einer Diode; ein Elektron bewege sich mit der Geschwindigkeit v gegen die Anode A, die als konzentrisch und auf einem gegenüber dem Heizdraht positiven Potential angenommen werde. Durch ein homogenes parallel zu $B\,B'$ liegendes Magnetfeld (das in der Praxis gewöhnlich einige hundert Gauß stark ist) wird die Bahn dieses Elektrons, wie in Abb. 560 durch den Pfeil angezeigt, abgelenkt. Ist das Feld stark genug, so erreicht das Elektron niemals die Anode. Da alle Elektronen angenähert die gleiche Geschwindigkeit besitzen (ab-

gesehen von kleinen Verschiedenheiten durch die anfänglich unterschiedliche thermische Bewegung), existiert ein *kritisches Feld* H_k, oberhalb dessen der Anodenstrom i_a völlig verschwindet. Die Charakteristik der Röhre besitzt die in Abb. 561 dargestellte diskontinuierliche Form.

Diese Anordnung ist das von A. HULL 1921 entwickelte Magnetron, das in Relaisschaltungen Verwendung finden könnte. Die Steuerung durch die Veränderung

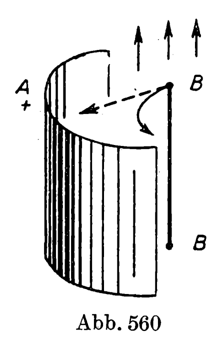


Abb. 560

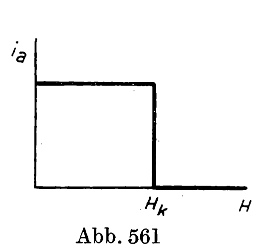


Abb. 561

eines starken Magnetfeldes ist jedoch nicht sehr bequem. Das kritische Feld ist eine mit der Anodenspannung U_a anwachsende Größe, es ist jedoch nicht interessanter, die Steuerung durch die Veränderung dieser Spannung vorzunehmen.

In bestimmten Fällen treten bei einem Feld H, das etwas stärker ist als H_k, im HULLschen Magnetron mit konzentrischer Anode sehr schwache Schwingungen mit sehr hohen Frequenzen auf: Man hat festgestellt, daß diese Schwingungen immer durch Asymmetrien im Aufbau verursacht werden.

Magnetrons mit geschlitzten Anoden, verzahnten Anoden und Hohlraumresonatoren

Die Untersuchungen der anomalen Schwingungen beim HULLschen Magnetron haben 1927 japanische Physiker auf die Entwicklung eines Magnetrons mit geschlitzter Anode geführt, mit dem Schwingungen mit einem bedeutenden Wirkungsgrad erzeugt werden konnten.

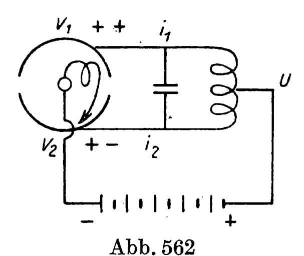


Abb. 562

In Abb. 562 ist das senkrecht zur Zeichnungsebene liegende Magnetfeld nicht dargestellt. Die Anode ist in zwei Hälften geteilt, deren jede mit einer Seite eines abgestimmten Schwingkreises verbunden ist. An der Mittelanzapfung der Spule liegt die Hochspannung U. Schwingt das System, so ist in jedem Augenblick eine der beiden Anoden $(++)$ auf einem höheren und die andere $(+-)$ auf einem niedrigeren Potential als U. Das Magnetfeld selbst wird auf einen etwas oberhalb des kritischen Feldes liegenden Wert eingestellt. Dabei zeigt sich, daß im statischen Zustand kein Elektron die Anode erreicht und daß auch im dynamischen Zustand die Wege der die Anode

erreichenden Elektronen stark gekrümmt sind. *Zur Erklärung nehmen wir an, daß durch das Magnetfeld eine für alle von der Kathode zu einer der beiden Anoden gehenden Elektronen eine konstante Laufzeit τ eingeführt wird.* Durch diese nicht ganz zutreffende Vereinfachung erhält man eine gute Beschreibung der Schwingung.

Der Strom i_1, der V_1 erreicht, ist für kleine Veränderungen zu V_1 proportional. Unter Berücksichtigung der Laufzeit τ muß man jedoch schreiben

$$R_i i_1(t) = V_1(t - \tau).$$

Für den Strom i_2 gilt entsprechend

$$R_i i_2(t) = V_2(t - \tau).$$

Der Strom $i_1 - i_2$ fließt in dem abgestimmten Schwingkreis, der den Gesamtscheinwiderstand Z besitzt, und es folgt

$$V_1 - V_2 = -Z(i_1 - i_2)$$

mit den üblichen Stromrichtungen. Daraus finden wir

$$(V_1 - V_2)_t = -\frac{Z}{R_i}(V_1 - V_2)_{t-\tau}. \tag{1}$$

Z ist im allgemeinen ein *Differentialoperator* $\left(R + L\frac{d}{dt} + \cdots\right)$. Zur Vereinfachung nehmen wir noch an, daß sich die Schwingungen gerade bei der Resonanzfrequenz des Kreises einstellen. Z ist dann ein reiner Widerstand R, und es ist

$$R_i(V_1 - V_2)_t + R(V_1 - V_2)_{t-\tau} = 0. \tag{2}$$

Erhöht man die Spannung U, so verringert sich wie in jeder Diode der Innenwiderstand R_i. Gleichung (2) ist eine *Funktionalgleichung*, die jedoch linear und leicht zu untersuchen ist.

Wir wollen nun die Bedingungen betrachten, unter denen eine rein sinusförmige Schwingung auftritt: Ist $R_i(V_1 - V_2)_t$ von der Form $\sin\omega t$, dann muß $R(V_1 - V_2)_{t-\tau}$ von der Form $-\sin\omega t$ sein:

$$R = R_i, \quad \omega\tau = \pi.$$

Durch die Laufzeit wird also die Periode der Schwingung genau bestimmt, die gerade 2τ beträgt. Wenn man den abgestimmten Schwingkreis während der Steuerung in jedem Augenblick auf dieser Frequenz halten kann, dann wird R_i nach und nach abnehmen und die Spannung U anwachsen. Für $R = R_i$ wird sich ein instabiler Zustand einstellen, und bei $R_i < R$ wächst die Amplitude der Schwingungen an, und der angenommene Bereich der linearen Charakteristiken wird überschritten (siehe auch das folgende Kapitel).

Wir wollen nun zeigen, daß $R_i < R$ dem Schwingungsbereich entspricht. Die Gleichung (2) ist trotz ihrer Funktionalität linear, und wir setzen also

$$(V_1 - V_2) = e^{(\alpha + j\omega)t}.$$

α und ω sind dabei zu bestimmen. Aus dieser Gleichung ergibt sich bei Vernachlässigung des Faktors $e^{(\alpha + j\omega)t}$

$$R_i + R e^{-\alpha\tau - j\omega\tau} \equiv 0.$$

Diese Identität ist befriedigt für

$$\omega\tau = \pi \quad \text{und} \quad e^{\alpha\tau} = \frac{R}{R_i} > 1.$$

Für α finden wir also einen positiven Wert

$$\alpha = \frac{1}{\tau} \ln \frac{R}{R_i},$$

d.h., es handelt sich um selbsterregende Schwingungen.

Genau genommen ist Z für nicht sinusförmige Ströme kein reiner Widerstand mehr, und als Ausgang ist die Gl. (1) und nicht Gl. (2) zu benutzen. Es ist jedoch leicht zu sehen, daß man dabei zu dem gleichen Schluß gelangt: $R_i < R$ führt zur Instabilität.

Obwohl diese Rechnungen sehr vereinfacht sind, genügen sie zu der Erkenntnis, daß die Laufzeit in Verbindung mit der geschlitzten Anode die Schwingungen des

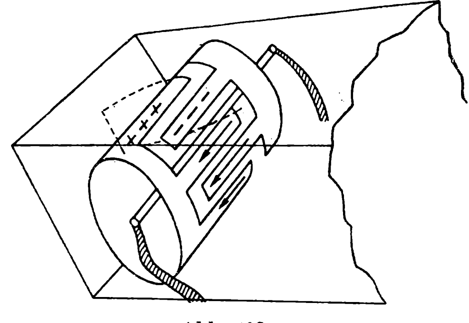


Abb. 563

Magnetrons verursacht. Um eine Instabilität zu erzielen, muß in jedem Augenblick ein Elektronenüberschuß die auf dem niedrigeren Potential befindliche Anode erreichen. Dadurch wird das Nichtgleichgewicht vergrößert, und man erreicht das Gegenteil einer Dämpfung.

Nach dem Verständnis dieser Grundlagen ist die Beschreibung anderer verbesserter Abarten des Magnetrons leicht.

Die Abb. 563 zeigt ein 1938 von H. Gutton und Mitarbeitern in Frankreich entwickeltes *Magnetron mit verzahnten Anoden.* Das Prinzip der geschlitzten Anode ist hierbei (sozusagen) mehrfach angewendet. Die beiden Anoden besitzen in bestimmten Abständen Zähne, die ineinandergreifen. Es ist gezeigt worden, daß die Zahnlänge $\frac{\lambda}{4}$ betragen muß, wenn λ die geforderte Wellenlänge ist. In den Schwingungen des Systems findet man dann die Stromverteilung in Form stehender Wellen.

auf jedem Zahn $\left(\text{mit } \frac{\lambda}{4}\right)$, wobei sich Ladungen $+++$ auf einem und $---$ auf dem benachbarten Zahn einstellen. Dies entspricht *Strömen mit gleicher Richtung auf aufeinanderfolgenden Zähnen,* wie dies in Abb. 563 durch die Pfeile angezeigt wird. Das Magnetron schwingt und strahlt wie ein großer Dipol mit $\frac{\lambda}{4}$ gleichzeitig ab. Man kann es nach dem Anbringen der Zuführungen des Schwingkreises in einen Hohlleiter einführen und so ohne weitere Kopplungsglieder die Strahlung richten.

Magnetrons mit Hohlraumresonatoren (Abb. 564)

Diese Art des Magnetrons wurde 1941 in England durch mehrere Forscher entwickelt. Die Anode besteht dabei aus einem großen Kupferblock, der Hohlräume enthält, die bei der gewünschten Frequenz als Resonanzhohlräume wirken. Die

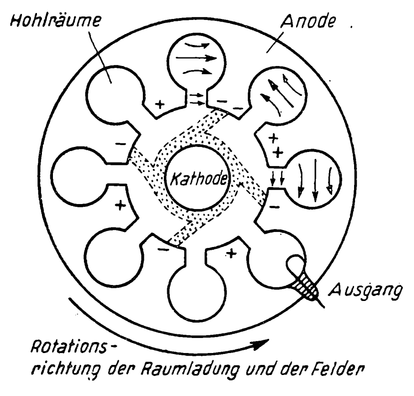


Abb. 564

Verteilung des elektrischen Feldes in diesen Resonanzhohlräumen ist in Abb. 564 durch Pfeile gekennzeichnet. Das zur Zeichenebene senkrechte Magnetfeld ist nicht dargestellt. An der Anode selbst liegt eine hohe Spannung. Die Hohlräume spielen die Rolle von Stromkreisen, und es ist kein äußerer abgestimmter Schwingkreis vorhanden. Eine Kopplungsspule in einem der Resonanzhohlräume gestattet, ein Koaxialkabel oder einen Hohlleiter anzuschließen.

Für eine Schwingung gelten folgende Bedingungen:

1. die Hohlräume müssen auf die Schwingungsfrequenz abgestimmt sein;

2. die Feldrichtung kehrt sich von einem zum nächsten Hohlraum in einer Halbperiode um: Die Anordnung der Felder und Ströme zeigt $\frac{n}{N/2}$ Umläufe pro Sekunde, wobei n die Frequenz und N die Anzahl der Resonanzhohlräume ist;

3. das magnetische Feld retardiert die Bewegung der Raumladung von der Kathode zur Anode so stark, daß die ursprünglich von den positiven Teilen der Anode angezogenen Elektronenpakete tatsächlich zu den negativen Teilen gelangen und

der instabile Zustand aufrechterhalten wird. Dies wurde in Abb. 564 durch ein punktiertes, die Raumladung darstellendes Rad angedeutet, wobei jedoch die *abgelenkten* Elektronenwege aufgezeichnet sind.

Die obigen Resultate wurden unter der Voraussetzung bestimmter Größenverhältnisse und eines für die Anodenspannung kritischen Feldes abgeleitet. Bei einem Magnetron mit höherer Frequenz ist es notwendig, wegen der Beziehung $\omega\tau = \pi$ die Laufzeit zu verringern, d.h., es muß die Anodenspannung erhöht werden. Dabei erhöht sich auch das kritische Feld H_k stark und begrenzt von dieser Seite her die Verwendungsmöglichkeiten des Magnetrons.

Will man die Leistung erhöhen, so ist man daran interessiert, die Spannung zu erhöhen. Da dies jedoch durch die eben betrachteten Schwierigkeiten in bezug auf H und die Durchschlagsspannung der Röhre begrenzt ist, ging man dazu über, Magnetrons mit sehr großen indirektgeheizten Kathoden zu konstruieren, die mit einem großen Strom belastet werden können.

In der Radartechnik hat man, wie wir noch sehen werden, die Leistungen eines nur *kurzzeitig* (einige μsec) arbeitenden Magnetrons bei Ultrakurzwellen (3000 MHz, bis 10000 MHz, d.h. 10 cm bzw. 3 cm) untersucht. Die Magnetrons ertragen dabei kurzzeitig eine große Wärmemenge, die sich anschließend langsam verteilt. Unter diesen Bedingungen hat man Leistungen von 150 kW und später sogar 5 bis 10 MW erreicht. Dabei lag die verwendete Spannung bei 20000 V mit entsprechenden Strömen. Die Größe des Magnetfeldes betrug etwa 5000 Gauß und später bei den kürzesten Wellen 14000 bis 17000 Gauß.

VI. KAPITEL

Anwendungen der Triode: Drahtlose Telegraphie; Telephonie

Triode als Schwingungserzeuger

Die Triode kann speziell bei hohen Frequenzen als Schwingungen erzeugender Generator verwendet werden. Die von uns im folgenden beschriebene Anordnung gestattet, durch geeignete Wahl von Selbstinduktionen und Kapazitäten Schwingungen mit Frequenzen von einigen Hertz bis zu $3 \cdot 10^8$ Hz zu erzeugen. Einer Frequenz von $3 \cdot 10^8$ Hz entspricht eine Wellenlänge

$$\lambda = \frac{3 \cdot 10^{10}}{3 \cdot 10^8} = 100 \text{ cm} = 1 \text{ m}.$$

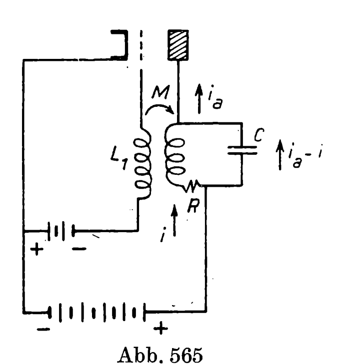


Abb. 565

In den Anodenkreis einer Triode legen wir, wie es in Abb. 565 dargestellt ist, einen aus L, R und C bestehenden Schwingkreis. Wir bezeichnen den in der Selbstinduktion fließenden Strom mit i und den Anodenstrom mit i_a. Die Potentialdifferenz

an dem aus Widerstand und Selbstinduktion bestehenden Zweig ist die gleiche wie am Kondensator. Daraus ergibt sich

$$L\frac{di}{dt} + Ri = \frac{1}{C}\int(i_a - i)\,dt$$

oder, wenn wir die Ableitung bilden,

$$LC\frac{d^2i}{dt^2} + RC\frac{di}{dt} + i = i_a. \tag{1}$$

Bei konstantem Anodenstrom i_a stellt der Strom i nach Gl. (1) wegen des Dämpfungsgliedes $RC\frac{di}{dt}$ schnell abklingende Schwingungen dar.

Diese Dämpfung werden wir aufheben, indem wir die Relaiswirkung des Gitters ausnutzen, wodurch i_a eine Funktion von i wird. Zu diesem Zweck legt man an das Gitter eine Selbstinduktion, die eine gegenseitige Induktion M mit der Spule L besitzt. Es wird vorausgesetzt, daß die Gittervorspannung so gewählt ist, daß kein Gitterstrom fließt. Unter diesen Bedingungen hat die Gitterspannung den Wert

$$U_g = -M\frac{di}{dt}.$$

Die Anodenspannung beträgt dann

$$U_a = -Ri - L\frac{di}{dt}.$$

Aus der Röhrengleichung

$$R_i i_a = U_a + KU_g$$

finden wir

$$i_a = \frac{1}{R_i}\left[-(L + KM)\frac{di}{dt} - Ri\right]. \tag{2}$$

Setzen wir diesen Wert nun in die Gl. (1) ein, so gilt

$$LC\frac{d^2i}{dt^2} + \left[RC + \frac{L + KM}{R_i}\right]\frac{di}{dt} + \left(1 + \frac{R}{R_i}\right)i = 0. \tag{3}$$

Konstruieren wir eine Steuerung derart, daß

$$RC + \frac{L + KM}{R_i} < 0,$$

– was einfach durch Wahl eines genügend großen *negativen* M gegeben ist – dann erhalten wir ein selbstschwingendes System. Die Gl. (3) zeigt weiterhin, daß seine Amplitude exponentiell mit der Zeit anwächst. Tatsächlich erreicht man sehr schnell Bereiche in der Röhrencharakteristik, in denen zwischen i_a, U_a und U_g kein linearer Zusammenhang mehr besteht. Die Schwingung findet also eine natürliche

Begrenzung. Schwingt eine Röhre z.B. mit einer Anodenspeisespannung von 300 V, so kann die Schwingung der Anodenspannung keine größere Amplitude als ungefähr 300 V besitzen, bei der die resultierende Anodenspannung, die bei jeder Halbperiode negativ wird, den Anodenstrom unterbricht. Auf diese Weise läßt sich die oben erwähnte Amplitudenbegrenzung erklären.

A. Blondel hat im Jahre 1917 die folgende Bedingung aufgestellt:

$$RC + \frac{L + KM}{R_i} < 0.$$

1915 hatte bereits J. Bethenod eine allgemeinere, die Existenz des Gitterstroms berücksichtigende Bedingung angegeben. Die angeführte Schaltung stammt von Meissner (1913). Ist die Blondelsche Bedingung befriedigt, so stellt sich in der Röhre eine Schwingung

$$i = i_0 \sin \omega t$$

mit

$$\omega = \sqrt{\frac{1 + \frac{R}{R_i}}{LC}}$$

ein, die in der Nähe der Eigenfrequenz $\frac{1}{\sqrt{LC}}$ des Schwingkreises liegt.

Es sind keine ausführlichen Erörterungen über die Herstellung einer negativen gegenseitigen Induktion M notwendig. In Abb. 566a und 566b sind Spulen gleichen Wicklungssinns für die Selbstinduktionen des Gitters und der Anode dargestellt. Es ist sofort einzusehen, daß bei Wicklungen mit gleicher Stromrichtung

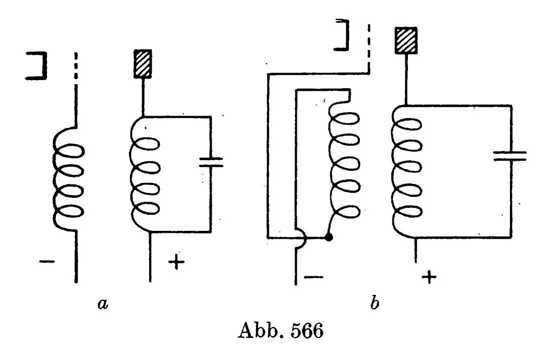


Abb. 566

an Gitter und Kathode (Abb. 566a) eine positive gegenseitige Induktion M und bei einander entgegengesetzter Stromrichtung (Abb. 566b) ein negatives M auftreten.

Es sind viele Schaltungen entwickelt worden, die Schwingungen mit einer Triode zu erzeugen gestatten, darunter mit Trioden arbeitende Sender, mit denen man alle Leistungen zwischen einigen hundertstel Watt und 500 kW erzielt. Für diese großen Leistungen hat man Trioden mit wassergekühlter Anode kon-

struiert, die mit einer Speisespannung bis zu 20000 V arbeiten. Die Anode wird dabei von einem 1 m hohen Zylinder mit 15 cm Durchmesser gebildet.

Modulation

Wie wir bereits festgestellt haben, ist die Amplitude der Schwingung etwa der Anodenspeisespannung proportional. Verändern wir diese Speisespannung langsam (langsam in bezug auf die Schwingungsfrequenz), so verändert sich auch die Schwingungsamplitude. Man nennt diese dann *moduliert*. Abb. 567 zeigt eine

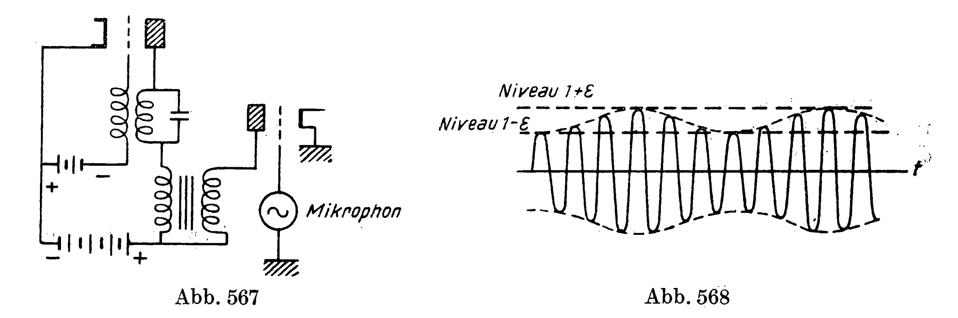


Abb. 567 Abb. 568

mögliche Schaltung (Modulation durch Anodensteuerung nach HEISING). Die linke Röhre schwingt mit hoher Frequenz; durch den Transformator verändert sich die Anodenspannung niederfrequent. Die Primärwicklung des Transformators wird durch den Anodenstrom einer anderen Röhre gespeist, an deren Gitter z. B. ein Mikrophon liegt. Die Spannungsmodulation an der Anode folgt dann

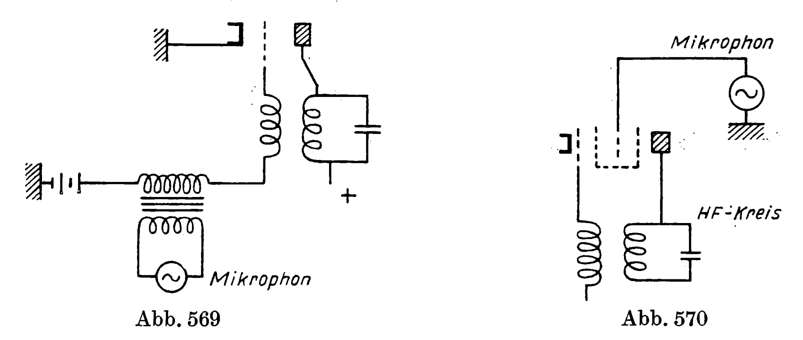


Abb. 569 Abb. 570

dem Sprechstrom (dessen Frequenzen von 200 bis 7000 oder 8000 Hz reichen). Die Spannung verändert sich mit $1 + \varepsilon \cdot \sin\alpha t$, wobei ε den Modulationsgrad und α das 2πfache der Modulationsfrequenz bedeuten (wenn es sich um eine reine Frequenz handelt). Die Schwingung ergibt sich dann zu

$$i = i_0(1 + \varepsilon \sin\alpha t) \sin\omega t.$$

(Ein $\varepsilon > 1$ bringt den Nachteil negativer Anodenspannung und Signalverzerrungen mit sich.)

Der zeitliche Verlauf der Schwingung ist in Abb. 568 dargestellt.

Es gibt eine ganze Reihe anderer Schaltungen, die eine Modulation gestatten: Abb. 569 zeigt eine Schaltung für eine Gittermodulation.

In Abb. 570 sehen wir eine Modulationsmöglichkeit durch ein besonderes, zwischen Anode und Gitter angebrachtes Steuergitter. Die elektrostatischen Wirkungen werden durch ein Schirmgitter abgeschirmt.

Die Anodenmodulation erfordert eine große, die Gittermodulation dagegen bedeutend weniger Leistung.

Die Anordnung der Abb. 570 erfordert im Prinzip überhaupt keine Leistung.

Dioden und Trioden als Detektor

Wir wollen zuerst eine Triode mit hoher Vorspannung betrachten, deren Charakteristik nicht mehr geradlinig ist. Für eine gegebene Anodenspannung können wir dann schreiben:

$$i_a = a U_g + b U_g^2 + c U_g^3 \dots .$$

Durch die Nichtlinearität der Charakteristik ist eine vielfältige Verwendung möglich.

1. Auf das Gitter dieser Triode geben wir ein moduliertes Signal

$$U_g = U_0 (1 + \varepsilon \sin\alpha t) \sin\omega t .$$

Dann erhalten wir

$$i_a = a U_g + b U_0^2 (1 + \varepsilon \sin\alpha t)^2 \sin^2\omega t + c U_g^3 \dots .$$

Die Terme

$$i_a = \cdots + b U_0^2 (1 + \varepsilon \sin\alpha t)^2 \sin^2\omega t + c U_g^3 + \cdots$$

wollen wir ausführlich betrachten:

$$b U_0^2 \, \varepsilon \sin\alpha t + \text{Terme mit } 2\alpha t + \text{Terme mit } \cos 2\omega t \text{ usw.}$$

Wir haben wieder die Modulation $\varepsilon \sin\alpha t$ gefunden, die tatsächlich von einer Veränderung mit

$$\frac{\varepsilon^2}{2} \sin^2 \alpha t$$

begleitet ist. Dies liefert insbesondere den Ausdruck

$$-\frac{\varepsilon^2}{4} \cos 2\alpha t ;$$

die Amplitude ist jedoch $\frac{\varepsilon}{4}$ mal geringer und kann besonders bei kleinem ε vernachlässigt werden. Selbst wenn ε in der Nähe von 1 liegt, ist bei dem größten Teil der hörbaren Wellen eine Überlagerung von 25% Harmonischen noch ohne weiteres zulässig.

Die Schaltung in Abb. 571 besteht einfach aus einem Niederfrequenztransformator, dessen Primärwicklung von den niederfrequenten Schwingungen des Ano-

denstroms durchflossen wird, während die Hochfrequenz des letzteren über einen für diesen Zweck angebrachten Kondensator abfließt. In der Sekundärwicklung des Transformators findet man also nur die bisher der Hochfrequenz überlagerte

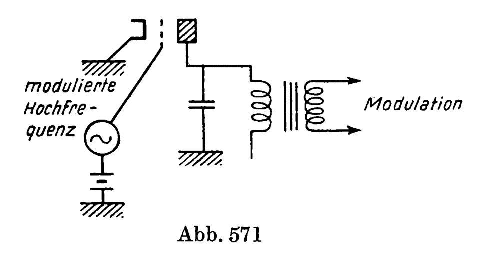


Abb. 571

Niederfrequenz. Dies ist das Prinzip der auf der Krümmung der Anodencharakteristik beruhenden Detektorwirkung.

2. Nun legen wir an das Gitter die Summe zweier sinusförmiger Signale, von denen eines bereits moduliert sein kann:

$$U_g = U_0(1 + \varepsilon \sin\alpha t) \sin\omega t + U_1 \sin\omega_1 t.$$

In dem Ausdruck für i_a finden wir also den Term $b\,U_g^2$ und in diesem

$$2\,U_0\,U_1(1 + \varepsilon \sin\alpha t) \sin\omega t \sin\omega_1 t.$$

Es ist

$$2 \sin\omega t \sin\omega_1 t = \cos(\omega - \omega_1)\,t - \cos(\omega + \omega_1)t.$$

Wir finden also Ströme mit der Frequenzsumme $\omega + \omega_1$ und mit der Frequenzdifferenz $\omega - \omega_1$, die beide übrigens mit $(1 + \varepsilon \sin\alpha t)$ moduliert sind. Im Anodenkreis können wir mit Hilfe von Filtern oder einem abgestimmten Kreis eine dieser beiden Stromkomponenten in bezug auf die andere verstärken. Das praktische Resultat wäre also, daß wir die Modulation der Frequenz ω z.B. auf die Frequenz $\omega - \omega_1$ übertragen haben. *Diesen Vorgang*, den man Frequenzüberlagerung nennt, *nutzt man in modernen Radiosupern aus.*

Andere Detektorschaltungen. Linearer Detektor

Ein sinusförmiges Spannungssignal, das wir mit U bezeichnen und das z.B. von einer Antenne und einem abgestimmten Kreis geliefert wird, legen wir über ein R-C-Glied an das Gitter einer Röhre ohne Gittervorspannung (Abb. 572). Wäh-

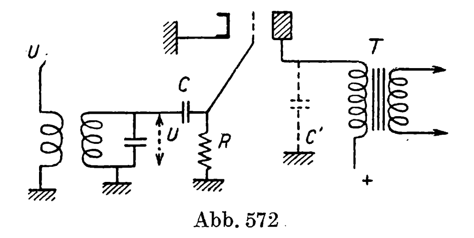


Abb. 572

rend der negativen Halbperiode fließt kein Gitterstrom, es gilt $R \gg \frac{1}{jC\omega}$, und die Gitterspannung ist praktisch gleich U. Dagegen erhalten wir während der positiven Halbperiode einen Beitrag des Gitters. Der große Widerstand $R(5 \cdot 10^5$ bis $10^6\ \Omega)$ wird durch den im Verhältnis kleinen Gitterwiderstand R_g (1 bis 2 kΩ) geshuntet. Es ist also $\frac{1}{jC\omega} \gg R_g$, und die Gitterspannung U_g ist gegenüber U vernachlässigbar klein. Die Spannung U_g verändert sich also zeitlich, wie es in Abb. 573 dargestellt ist. Das Gitter, oder vielmehr, die aus Gitter und Kathode gebildete Diode wirkt wie ein Gleichrichter. Es liegt also nur die negative Halbperiode der Spannung U am Gitter und steuert den Anodenstrom. Daraus ergibt sich, daß das Gitter eine mittlere negative Spannung U_{g1} erhält und der Anodenstrom von i_{a0} auf i_{a1} abnimmt. Wird die Amplitude von U langsam, z.B. mit $1 + \varepsilon \sin\alpha t$, verändert (modulierte Schwingung), so verändert sich auch U_{g1} mit $1 + \varepsilon \sin\alpha t$. Die gleiche Veränderung findet man auch (begleitet von hochfrequenten Veränderungen) im Anodenstrom wieder. Dort können beide z.B. mit Hilfe eines durch eine Kapazität C' geshunteten NF-Transformators T leicht getrennt werden (Abb. 572).

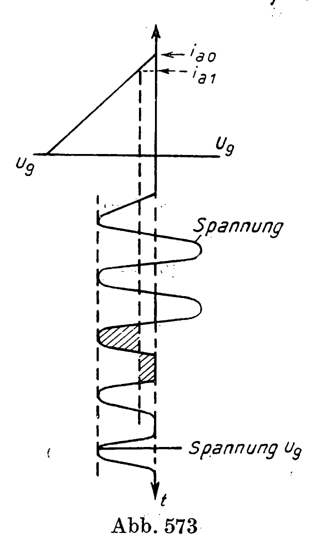


Abb. 573

Es gibt eine Reihe anderer Schaltungen, die praktisch genauso arbeiten. Wir wollen nur noch die in Abb. 574 gezeigte erwähnen, bei der R und C in Reihe mit dem Gitter liegen und parallel geschaltet sind. Die Übereinstimmung mit der vorher betrachteten Schaltung in bezug auf die Niederfrequenz rührt daher, daß die Arbeitsweise die gleiche ist bei einem mit einer Selbstinduktion L verbundenen und einem an Masse liegenden Widerstand. Im Endergebnis wird bei dieser Schaltung im Gegensatz zu der weiter oben auf der Krümmung der Anodencharakteristik beruhenden der Anodenstrom verringert, wenn das Signal stärker wird.

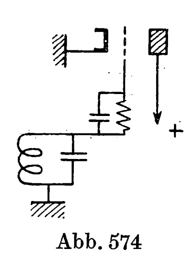


Abb. 574

Die Detektorwirkung eines Gitters entspricht also der Detektorwirkung einer Diode (d.h. einer Gleichrichtung, siehe vorstehendes Kapitel). Die gleichgerichtete Spannung dient direkt zur Steuerung des Anodenstroms einer Röhre. Wir stellen also fest, daß das Gitter der Röhre eine doppelte Funktion ausübt: einmal als Anode der Diode und zum anderen als Steuergitter des Anodenstroms. Natürlich kann man diese beiden Funktionen leicht voneinander trennen und die Gleichrichtung durch eine andere Diode durchführen, wie es in einer Reihe anderer Schaltungen der Fall ist.

Diese Detektorwirkungen einer Diode, die zu einer beachtlichen Gleichrichtung führen, nützen die Eigenschaft der Diode aus, eine gleichgerichtete Spannung zu erzeugen, die zur angelegten Wechselspannung proportional ist. Solche Anordnungen nennt man *lineare Detektoren*.

Vom Standpunkt der Empfindlichkeit sind sie gegenüber der auf der Krümmung der Anodencharakteristik beruhenden Detektion bedeutend günstiger. Geben wir ein um den Faktor 10 schwächeres Signal auf die Röhre, dann liefert diese bei Anodendetektion den 100. Teil, bei Gittergleichrichtung den 10. Teil der bei normalem Signal gelieferten Spannung.

Demodulation eines schwachen Signals durch Gleichrichtung

Wir betrachten nun bei sogenannter linearer Gleichrichtung ein Signal

$$a \sin \omega t + b \sin \omega' t,$$

bei dem a und b moduliert sein können und ω und ω' nahe beieinanderliegen. Nun kann man nach der FRESNELschen Regel die langsam veränderliche Amplitude dieses Signals (mit der Schwingung $\omega - \omega'$) untersuchen. Diese Amplitude enthält Terme, in denen die Modulation von a und b auftritt. Durch die Gleichrichtung erhalten wir ein niederfrequentes Signal, in dem diese Terme wieder auftreten. Nach einer (sehr einfachen) Rechnung stellt man fest, daß die Modulation des stärksten Signals, z. B. a, (für $a \gg b$) nicht verändert wird, während die Modulation des schwächeren Signals proportional *zu der mit dem Verhältnis* $b/a \ll 1$ *multiplizierten* Amplitude b ist. Ist a ein Signal und b eine störende Größe, dann vergrößert die sogenannte lineare Gleichrichtung die Selektivität, da b gegenüber a geschwächt wird. Ist dagegen a eine stärkere Störung als das Signal b, dann wird diese Störung verstärkt.

Auch bei der quadratischen Gleichrichtung ist dieser Effekt selbstverständlich, da die austretende Amplitude von a zu a^2 und die von b zu b^2 proportional ist. Das Verhältnis dieser beiden beträgt also b^2/a^2, also b/a, wie vorstehend multipliziert mit b/a.

Diesen Effekt nennt man Demodulation eines schwachen Signals durch ein starkes. Er wirkt sich sehr vorteilhaft beim Radioempfang aus, da er Störungen verringert, sofern das Signal auch nur etwas stärker ist als die Störung.

Die Triode als Verstärker

Wir haben bereits die Arbeitsweise einer Triode untersucht, in deren Anodenkreis sich ein Widerstand R befand. Wir betrachten nun den allgemeinen Fall, in dem der Widerstand R durch einen Scheinwiderstand Z ersetzt ist (Abb. 575). Der Anodenstrom i_a wird durch die Beziehung

$$R_i i_a = U_a + K U_g$$

bestimmt, wobei $U_a = -Z i_a$ ist. (Es ist dabei zu beachten, daß der Strom vom + Pol der Batterie zur Anode fließt.)

Daraus ergibt sich

$$i_a = \frac{K}{R_i + Z} U_g.$$

Nun erzeugt der im Scheinwiderstand Z fließende Strom i_a in Z gerade die Spannung U_a, d.h.

$$U_a = -\frac{KZ}{R_i + Z} U_g .$$

U_a ergibt sich also als die im Verhältnis $\frac{KZ}{R_i + Z}$ *verstärkte* Gitterspannung U_g. Dieses Verhältnis kann imaginär sein, wenn Z komplex ist. Das bedeutet nichts anderes, als daß U_a gegenüber U_g eine Phasendifferenz aufweist. Wir wollen uns nun die Aufgabe stellen, diese verstärkte Spannung auf das Gitter einer neuen Röhre zu übertragen, die z.B. mit einem Verbraucherkreis belastet sei. Die an dieses Gitter zu legende Spannung ist im Prinzip die gleiche, die zwischen A und B auftritt. Dabei tritt die Schwierigkeit auf, daß diese beiden Punkte gegenüber der Masse (Spannung der Batterie B) auf einem höheren Potential liegen, und zwar derart, daß es bei einer direkten Verbindung des Gitters der Röhre (*2*) mit dem Punkt A erforderlich ist, die Kathode der Röhre (*2*) ebenfalls auf ein gegenüber der Masse erhöhtes Potential zu bringen. Dies kann z.B. durch eine Verbindung zwischen der Kathode von (*2*) und der Batterie B sowie der Anordnung einer zusätzlichen Batterie zur Speisung der Anode von (*2*) geschehen. Diese Nachteile kann man jedoch durch verschiedene Kunstgriffe beseitigen.

R-C-Kopplung (Abb. 575)

Der Scheinwiderstand Z wird durch die mit einem Widerstand R_1 in Reihe liegende Kapazität C geshuntet. Das Gitter der Röhre (*2*) liegt an dem Verbindungspunkt zwischen R_1 und C. Ist der Widerstand R_1 sehr groß ($2 \cdot 10^5$ bis 10^6 Ohm), dann wird der Scheinwiderstand Z praktisch nicht verändert. Wenn weiterhin $\left|\frac{1}{j\omega C}\right| \ll R_1$, so ist die Gesamtheit des zwischen A und B auftretenden variablen Anteils der Spannung die gleiche, die sich an den Klemmen von R_1 findet. Selbstverständlich wird die Gleichspannung durch die Kapazität C unterbrochen $\left(\text{für } \omega \to 0 \text{ findet man schließlich } \frac{1}{C\omega} \gg R_1\right)$.

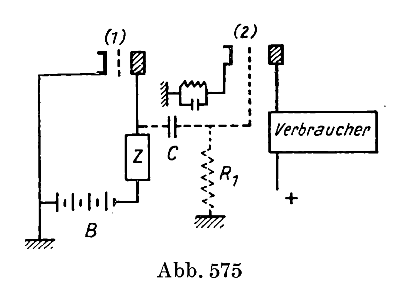


Abb. 575

Die Schaltung kann also nicht zur Verstärkung einer Gleichspannung benutzt werden, und man kann daher R_1 einseitig an Masse legen. Die Röhre (*2*) arbeitet bei normaler Vorspannung, und ihre Anodenspannung kann derselben Batterie entnommen werden, die auch zur Lieferung der Anodenspannung der Röhre (*1*) benutzt wird.

Kopplung durch Drossel im Anodenkreis

Man speist die Anode der Röhre (*1*) über die Selbstinduktion einer Drossel, deren Scheinwiderstand ($|jL\omega| \gg |Z|$) für alle hindurchtretenden Frequenzen sehr groß ist. In Abb. 576 ist diese Drossel durch eine Spule mit Eisenkern dargestellt,

der jedoch nicht unbedingt notwendig ist. Durch die in Reihe mit dem Scheinwiderstand Z liegende Kapazität C ist diese Drossel geshuntet. Wählt man den Kondensator so, daß $\left|\frac{1}{jC\omega}\right| \ll |Z|$, dann belastet praktisch der Wechselstromanteil des Anodenstroms der Röhre (*1*) nur über die Kapazität C den Scheinwiderstand.

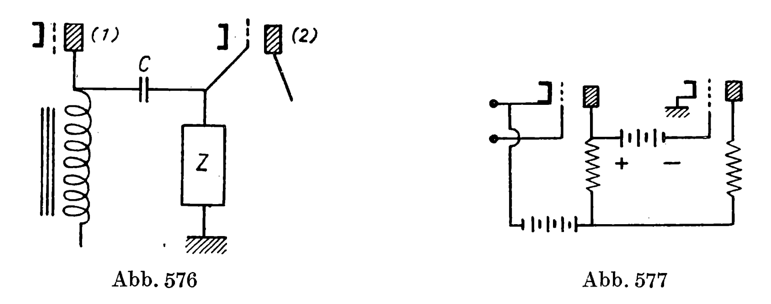


Abb. 576

Abb. 577

stand. Die Spannung Zi liegt direkt zwischen dem Gitter der folgenden Röhre und Masse.

Diese Schaltungen können natürlich nicht verwendet werden, wenn eine Gleichspannung verstärkt werden soll, d. h. die Spannungsveränderungen extrem langsam erfolgen. Will man alle Anodenspannungen der aufeinanderfolgenden Kreise einer einzigen Batterie entnehmen (wie es im allgemeinen gewünscht wird), so muß man die Vorspannung des Gitters der Röhre (*2*) durch eine „Gegenbatterie" (Abb. 577) wieder herstellen.

Widerstandsverstärker und seine Begrenzungen

Bildet man Z durch einen Widerstand R, dann erhält man eine Verstärkung

$$\mu = \frac{U_a}{U_g} = -\frac{KR}{R_i + R}.$$

Die verstärkte Spannung hat also gegenüber der angelegten Spannung eine entgegengesetzte Phase. Das Verhältnis μ ist unabhängig von der Frequenz und liegt in der Größenordnung von K, wenn das Verhältnis $\frac{R}{R_i + R}$ in der Nähe von 1 liegt. Dies wird erreicht, indem man R sehr groß gegenüber R_i wählt, jedoch den Wert K nicht überschreitet. Findet man z. B. in den Röhrenkatalogen $K = 24$ und $R_i = 10000\ \Omega$, dann wird man in den Anodenkreis einen Widerstand R von 80000 bis 100000 Ω legen. Für Trioden ist es gelungen, $K = 100$ und $R_i = 66000\ \Omega$ zu erreichen. Bei einem Widerstand $R = 200000\ \Omega$ im Anodenkreis findet man dann folgende Verstärkung:

$$\frac{100 \cdot 200000}{66000 + 200000} = 75 \text{ pro Stufe}.$$

Wählt man auch für R höhere Werte, so ergibt sich daraus die Notwendigkeit einer höheren Speisespannung U_0 für die Anode, da die schließlich an die Anode gelegte Effektivspannung nicht U_0, sondern $U = U_0 - Ri_0$ beträgt. Dabei ist i_0 der Anodendauerstrom, mit dem man zu arbeiten beabsichtigt. Benutzt man für i_0 den Wert 1 mA und für $R = 200000\ \Omega$, so erhält man die Anodenspannung $U = U_0 - 200$ V. Für U ist daher eine Batterie von 300 bis 400 V erforderlich, wenn man eine bestimmte Veränderung der Amplitude von i erreichen will, d. h. ein nicht nur verstärktes, sondern auch, absolut gesehen, großes Ausgangssignal. Diese Schwierigkeit tritt offensichtlich bei einer Kopplung durch eine Drossel, wie sie in Abb. 576 dargestellt ist, nicht auf. Dagegen ist letztere Kopplung durch eine Drossel eine recht kostspielige und unbequeme Lösung.

Wir wollen nun annehmen, daß wir die Aufgabe haben, die im hörbaren Bereich liegenden Frequenzen von 16 bis 16000 Hz zu verstärken. Dazu wählen wir den gleichen $C_1 R_1$-Shunt, wie in Abb. 575. Da R_1 sehr groß gegen R sein soll, wählen wir R_1 zu mindestens $10^6\ \Omega$. Nun soll $\frac{1}{C\omega} \ll 10^6$ sein. Für die tiefste Frequenz $\nu = 16$ gilt $\omega = 2\pi \cdot 16 \approx 100$, d. h. $\frac{1}{C_1} \ll 10^8$ bzw. $C_1 \gg 10^{-8}$ Farad, d. h. $C_1 \gg \frac{1}{100}\ \mu$F. Industriell ist es gelungen, Kapazitäten dieser Größenordnung herzustellen, die 400 bis 500 V Betriebsspannung ohne die Gefahr eines Durchschlages ertragen und kleine Dimensionen besitzen. Desgleichen hat man Widerstände mit Werten zwischen einigen Ohm und 10 MΩ konstruiert, die $^1/_4$ W, 2 W usw. ertragen, wodurch vielfältige Anwendungsmöglichkeiten mit allen diesen Schaltungen möglich sind.

Fragen wir nun nach der Begrenzung der Arbeitsweise eines Widerstandsverstärkers bei hohen Frequenzen. Man sieht sofort, daß in erster Linie die zwischen den Verbindungsdrähten, der Anode usw. und der Masse auftretende Kapazität C' dafür verantwortlich ist (Abb. 578). Daraus ergibt sich, daß die Wechselströme bei sehr hohen Frequenzen die Tendenz zeigen, über die Kapazität C' abzufließen, und daß man im allgemeinen an Stelle von R mit dem durch Parallelschaltung von R und C' gebildeten Scheinwiderstand Z rechnen muß:

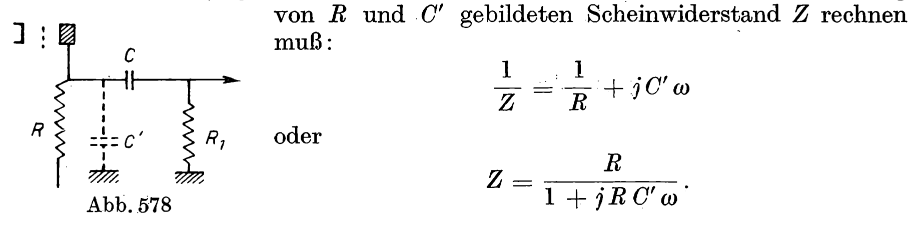


Abb. 578

$$\frac{1}{Z} = \frac{1}{R} + jC'\omega$$

oder

$$Z = \frac{R}{1 + jRC'\omega}.$$

Bei der Kreisfrequenz ω ($RC'\omega = 1$) wird der Modul von Z durch $\sqrt{2}$ dividiert, und die Verstärkung $\frac{KZ}{R_i + Z}$ unterliegt einer beinahe gleichen Veränderung. Nun ist C' in der Praxis in der Größenordnung von 10 cm $= 10^{-11}$ F. Mit $R = 2 \cdot 10^5\ \Omega$ findet man dann eine Kreisfrequenz $\omega = \frac{10^{11}}{2 \cdot 10^5} = 5 \cdot 10^5$, d. h. eine noch ziemlich niedrige Frequenz, nämlich ungefähr 80000 Hz. Will man, wie es beim Fernsehen

der Fall ist, noch höhere Frequenzen (bis zu $8 \cdot 10^6$ Hz) verstärken, so muß man R beträchtlich verkleinern, damit $RC'\omega < 1$ gilt und die höchsten Frequenzen noch fließen. In Fernsehverstärkern wird daher R nur etwa 2000 Ω betragen. Die Verstärkung $\frac{KR}{R_i}$ (mit $R_i \gg R$) ist also gering, wenn man nicht Röhren mit außerordentlich großer Steilheit verwendet, die bis zu 10–14 mA/V erreichen können.

Berechnung des bei Fernsehsendungen verwendeten Frequenzbandes

Man überträgt 25 Bilder mit (im allgemeinen) 800 Zeilen pro Bild. Bei einer Feinheit von z. B. 1000 Punkten pro Zeile entspricht dies $25 \cdot 800 \cdot 1000 = 2 \cdot 10^7$ Signalen pro Sekunde. Die schwierigste Übertragung ist die eines Gitters, dessen Stäbe gerade die Dicke eines Punktes besitzen (Abb. 579). Man sieht, daß die Periode der Modulation also zwei Punkte einnimmt. Die Grenzfrequenz entspricht daher der mittleren Anzahl der Punkte pro Sekunde, d. h. in diesem Fall 10 MHz.

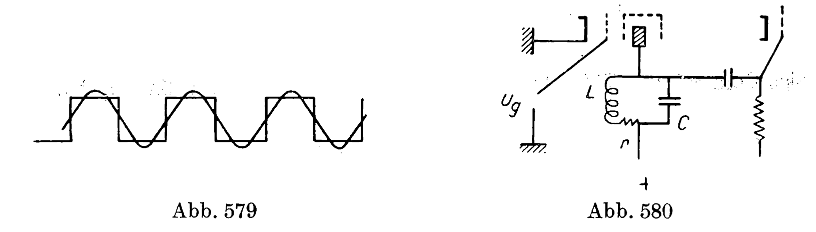


Abb. 579 Abb. 580

Selektive Verstärker

Wir wählen den Scheinwiderstand Z derart, daß er für alle Frequenzen gering sei und nur für ω von ω_1 bis ω_2 einen höheren Wert besitze. Handelt es sich um eine *selektive* Pentode ($R_i \gg Z$), dann erhalten wir eine Verstärkung

$$\mu = -\frac{KZ}{R_i + Z} \doteq -\frac{KZ}{R_i}$$

nur für die Frequenzen von ω_1 bis ω_2. Z bilden wir z. B. durch einen aus R, L, C bestehenden abgestimmten Resonanzkreis (Abb. 580). Nach der bekannten Berechnung des Scheinwiderstandes für diesen Stromkreis finden wir

$$Z = \frac{jL\omega}{(1 - LC\omega^2) + jRC\omega}.$$

Dies kann man auch in der Form

$$Z = \frac{L}{RC} \cdot \frac{1}{1 - j\,\frac{1 - LC\omega^2}{RC\omega}}$$

schreiben.

In dieser Formel setzen wir nun den Ausdruck

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{1 - LC\omega^2}{RC\omega}$$

ein und erhalten

$$Z = \frac{L}{RC}\,\frac{1}{1 - j\operatorname{tg}\varphi} = \frac{L}{RC}\,\frac{\cos\varphi}{\cos\varphi - j\sin\varphi} = \frac{L}{RC}\cos\varphi\cdot e^{j\varphi}.$$

Die Verstärkung pro Stufe beträgt dabei

$$\mu = -\frac{KZ}{R_i}.$$

Der Maximalwert $\frac{K}{R_i}\,\frac{L}{RC}$ wird im Resonanzfall erreicht:

$$1 - LC\omega^2 = 0, \quad \cos\varphi = 1, \quad \varphi = 0.$$

Z ist also dem reinen Widerstand $\frac{L}{RC}$ äquivalent. $\frac{L\omega_0}{R}$ sei die Kreisgüte:

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{L\omega_0}{R}\left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_0^2}\right).$$

Wenn wir

$$\omega = \omega_0 + \Delta\omega$$

setzen, erhalten wir, wie wir bereits wissen,

$$\operatorname{tg}\varphi = \pm 1 \quad \text{und} \quad \cos\varphi = \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

Mit

$$\left|\frac{\Delta\omega}{\omega_0}\right| = \frac{1}{2}\,\frac{R}{L\omega_0}$$

erhalten wir für den übertragenen Frequenzbereich

$$\frac{2\Delta\omega}{\omega} = \left(\frac{R}{L\omega_0}\right).$$

Anwendung. Wir wollen nun eine mit einem Sprechstrom modulierte, von einem Rundfunksender ausgesandte Trägerfrequenz von 10^6 Hz ($\lambda = 300$ m) verstärken. Durch die Modulation tritt eine Nebenfrequenz $\omega \pm \alpha$ auf. Wir rechnen mit einer Modulationsfrequenz von 6000 bis 7000 Hz, wie sie den Zischlauten (s, f, ...) entspricht. Dann erhalten wir

$$\frac{\Delta\omega}{\omega} = \frac{6000}{10^6} = \frac{6}{1000}.$$

Wir versuchen nun, Kreise zu realisieren, deren Güte gegeben ist zu

$$\frac{L\omega_0}{R} = \frac{1000}{6} \approx 160.$$

Stromkreise mit sehr viel höherer Güte haben den Nachteil, daß die drei Frequenzkomponenten ω, $\omega + \alpha$, $\omega - \alpha$ sehr verschieden wiedergegeben werden. Diese Frequenzen werden aber bei der Gleichrichtung zur Rückbildung der ursprünglichen Modulation benötigt. Bei Stromkreisen mit bedeutend geringerer Güte hat man den Nachteil, daß die nicht benötigten Frequenzen verstärkt werden und dadurch ein besonders starkes Rauschen und störende Nebengeräusche auftreten.

Verstärker mit Bandfilter

In den meisten Anwendungsfällen versucht man, eine konstante Verstärkung von $\omega = \omega_1$ bis $\omega = \omega_2$ zu erreichen, während die Frequenzen $\omega < \omega_1$ oder $\omega > \omega_2$ verschwinden sollen [siehe Abb. 581, Kurve (*1*)]. Die Verwendung eines

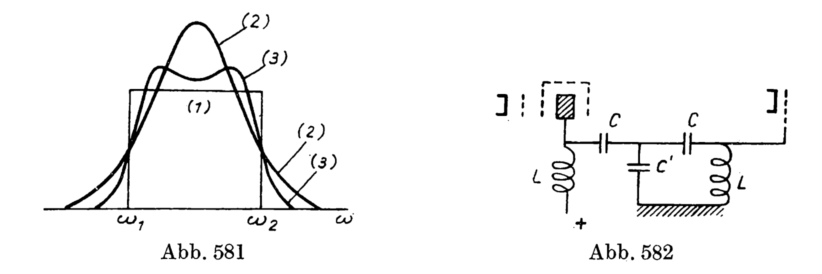


Abb. 581 Abb. 582

Resonanzkreises liefert jedoch nur eine angenäherte Lösung [Kurve (*2*)], da die Frequenzen zwischen ω_1 und ω_2 bei weitem nicht gleichmäßig verstärkt werden. Bessere Lösungen erreicht man, wenn der Verbraucherkreis der Anode der Verstärkerröhre durch ein aus zwei abgestimmten L-C-Kreisen bestehendes *Bandfilter* ersetzt wird, das entweder durch eine beträchtliche Kapazität C' oder eine geringe gegenseitige Induktion M gekoppelt ist [Abb. 581, Kurve (*3*) und Abb. 582]. Beide Schaltungen sind äquivalent. Letztere Schaltung, die meist verwendet wird, ist unter dem Namen „*Bandfilterverstärker*“ bekannt. Zur Übung wollen wir jetzt seine Daten berechnen (Abb. 583).

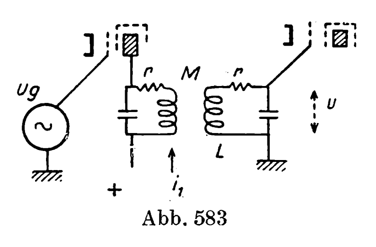


Abb. 583

Mit i_1 bezeichnen wir den in der linken Selbstinduktion fließenden Strom, i_2 ist der Strom im rechten Stromkreis und U die Ausgangsspannung. Für U gilt die Gleichung

$$U = \frac{1}{jC\omega} i_2$$

und für die elektromotorischen Kräfte im rechten Stromkreis

$$jM\omega i_1 + \left(jL\omega + R + \frac{1}{jC\omega}\right) i_2 = 0$$

oder

$$jM\omega i_1 = -U\,[1 - LC\omega^2 + jRC\omega].$$

Bezeichnen wir im linken Stromkreis den Anodenstrom mit i_a und mit i_1 den in der Selbstinduktion fließenden Strom, dann beträgt der in der Kapazität auftretende Strom $i_a - i_1$. Setzt man die Spannungen in beiden Zweigen der Parallelschaltung gleich, so gilt

$$\frac{1}{jC\omega}(i_a - i_1) = (jL\omega + R)\, i_1 + jM\omega i_2.$$

Nun ist jedoch für eine Pentode

$$i_a = \frac{K}{R_i} U_g,$$

und wir finden

$$i_a = i_1\,[1 - LC\omega^2 + jRC\omega] - MC\omega^2 i_2,$$

$$i_a = i_1\,[1 - LC\omega^2 + jRC\omega] - jMC^2\omega^3 U$$

$$= -U\left[\frac{(1 - LC\omega^2 + jRC\omega)^2}{jM\omega}\right] + jMC^2\omega^3$$

und schließlich daraus

$$\frac{U}{U_g} = \frac{K}{R_i}\,\frac{jM\omega}{[1 - LC\omega^2 + jRC\omega]^2 - M^2C^2\omega^4}$$

$$= \frac{K}{R_i}\,\frac{jM\omega}{[1 - (L+M)\,C\omega^2 + jRC\omega]\,[1 - (L-M)\,C\omega^2 + jRC\omega]}.$$

Damit haben wir offensichtlich den Verstärkungsfaktor μ pro Stufe gefunden. Hätten wir die Ausgangsspannung U an den Klemmen des ersten Stromkreises abgegriffen und den zweiten Stromkreis vernachlässigt, so ergäbe sich der Ausdruck

$$\mu = \frac{K}{R_i}\,\frac{j\omega L}{[1 - LC\omega^2 + jRC\omega]}.$$

Wir sehen also, daß die Verstärkung mit zwei Stromkreisen gegenüber der Verstärkung mit einem Stromkreis nicht mehr $L\omega$, sondern dem *Kopplungsgrad* $M\omega$ proportional ist. Wenn wir also die Frequenz verändern, so ändert sich die Verstärkung wie das Produkt zweier „Resonanzkurven":

$$\frac{1}{1 - (L - M)\,C\omega^2 + jRC\omega}$$

und

$$\frac{1}{1 - (L + M)\,C\omega^2 + jRC\omega}.$$

Beide Resonanzkurven finden wir also in Amplitude und Phase identisch, sie sind nur gegeneinander etwas verschoben. Besaßen beide Stromkreise vorher die gleiche Resonanzfrequenz $\omega^2 = \frac{1}{LC}$, so haben sie jetzt zwei verschiedene:

$$\omega_1^2 = \frac{1}{(L + M)C} \quad \text{und} \quad \omega_2^2 = \frac{1}{(L - M)C}.$$

Wäre man von zwei auf die verschiedenen Frequenzen ω' und ω'' abgestimmten Stromkreisen ausgegangen und hätte eine rein kapazitive oder eine gemischte Kopplung (aus Kapazität und gegenseitiger Induktion) angenommen, so hätte man leicht folgendes allgemeine Theorem zeigen können: Eine Kopplung durch Blindwiderstand führt immer zu einer Verschiebung der Eigenfrequenzen.

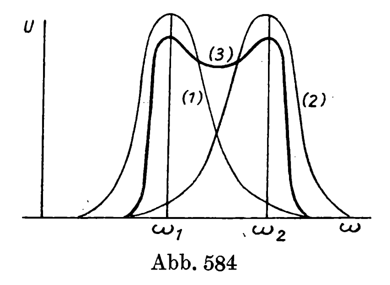


Abb. 584

Multipliziert man graphisch die beiden Resonanzkurven (*1*) und (*2*) miteinander, so erhält man, wie es in Abb. 584 gezeigt ist, eine neue Kurve (*3*), die im allgemeinen 2 Scheitel und 1 Sattel besitzt. In einiger Entfernung von ω_1 und ω_2 verschwindet die Verstärkung, da man die Selektivität der beiden Stromkreise ausnützt. Zwischen ω_1 und ω_2 findet man eine ungefähr konstante Verstärkung.

Wir wollen nun die Bedingungen für eine vollständig ebene Resonanzkurve bestimmen. Bei einer mittleren Frequenz $LC\omega^2 = 1$ erhalten wir für die Verstärkung

$$\frac{1}{MC\omega^2 + jRC\omega} \cdot \frac{1}{-MC\omega^2 + jRC\omega} = \frac{1}{(MC\omega^2)^2 + (RC\omega)^2}.$$

Bei den Frequenzen ω_1 bzw. ω_2 finden wir

$$\frac{1}{jRC\omega} \cdot \frac{1}{2MC\omega^2 + jRC\omega} = \frac{1}{RC\omega\sqrt{(2\,MC\omega)^2 + (RC\omega)^2}}.$$

Wir nehmen nun an, daß diese beiden Werte gleich sind. Das Minimum der Resonanzkurve (*3*) wird also auf das Niveau der beiden Maxima gehoben und die Kurve abgeplattet. Setzen wir jetzt

$$\frac{MC\omega^2}{RC\omega} = \frac{M\omega}{R} = x,$$

so muß

$$(RC\omega)^2 (1 + x^2) = (RC\omega)^2 \sqrt{1 + 4x^2}$$

sein oder

$$2x^2 + x^4 = 4x^2,$$

woraus folgt

$$x = \sqrt{2}, \quad \text{also} \quad \frac{M\omega}{R} = \sqrt{2}.$$

Ist also $\frac{L\omega}{R} = s$ die Güte des Stromkreises, so muß $\frac{M}{L} = \frac{\sqrt{2}}{s}$ sein. Die Kopplung, die das Quadrat der Resonanzkurve (*3*) ergibt, ist also vollständig durch die Güte des Kreises bestimmt.

Neben den von uns beschriebenen Anordnungen werden in der Praxis eine große Anzahl weiterer Verstärkerschaltungen benutzt. Wir bezeichnen allgemein mit F ein Filter. Dies sei (Abb. 585) an beiden Seiten über seinen iterativen Scheinwiderstand R geschlossen und linksseitig mit einer Pentode (*1*), rechtsseitig mit dem

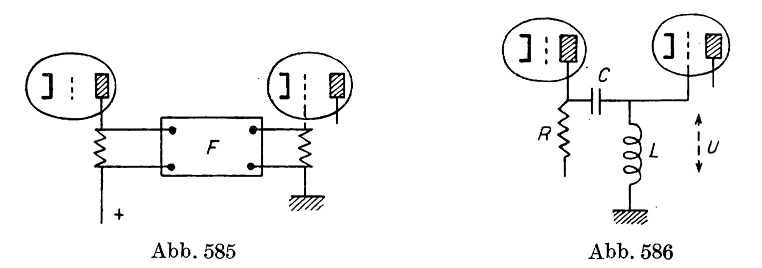


Abb. 585 Abb. 586

Gitter einer zweiten Röhre verbunden. Durch diese Anordnung erhält man eine gute Verstärkerschaltung. Der Verstärkungsbereich entspricht dem Durchlaßbereich des Filters.

Wir wollen hier noch kurz den *Verstärker mit Reihenresonanzkreis* (Abb. 586) erwähnen. Im Anodenstromkreis der ersten Röhre liegt der Widerstand R. C und L bilden einen Reihenresonanzkreis mit der Frequenz ω. Bei dieser Frequenz bildet der Zweig LC für den Wechselstromanteil des Anodenstroms einen Kurzschlußkreis. Dadurch tritt die Ausgangsspannung $U = jL\omega i$ auf, während der Scheinwiderstand Z im Anodenkreis trotzdem Null ist. Bei der Resonanzfrequenz hat man also pro Stufe die Verstärkung

$$\mu = \frac{K}{R_i} jL\omega.$$

Bei anderen Frequenzen verteilt sich der Strom auf die Zweige R und L, C. Die Selektivität des Kreises kann man durch die Verkleinerung von R beliebig vergrößern.

Brückenschaltungen. Siebkreise

Es ist oft erforderlich, alle Frequenzen eines breiten Bandes mit Ausnahme einer einzigen zu verstärken. Im klassischen Verstärker liefert die Verwendung eines Scheinwiderstandes Z, der durch einen Reihenresonanzkreis gebildet wird, bereits eine gute Lösung dieser Aufgabe.

Eine zweckmäßigere Anordnung besteht jedoch in einer Kombination von Verstärkern in Brückenschaltung. Wir hatten z. B. in Abb. 302 einen akustischen Frequenzmesser betrachtet, dessen Ausschlag Null ist für den Fall $RC\omega = 1$. Dadurch wird man zu einer Verstärkerschaltung geführt, wie sie in Abb. 587 schema-

tisch dargestellt ist. In der Röhre sowie in den Widerständen R_1 und $2\,R_1$ fließt dabei der gleiche Strom i. Für das Potential U_C gilt also in jedem Augenblick

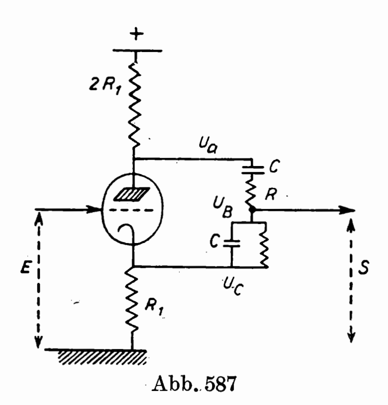


Abb. 587

$U_C = -\frac{U_a}{2}$. Andererseits ist im Gleichgewichtsfall $R\,C\,\omega = 1$ das Potential U_B derart, daß

$$(U_B - U_C) = -\frac{1}{2}\,(U_a - U_B).$$

Daraus ergibt sich $U_B = 0$. Die Schaltung hat also alle Frequenzen mit Ausnahme der *ausgesiebten* Frequenz ω, die sich am Ausgang S nicht mehr findet, verstärkt.

Diese Schaltung ist jedoch nicht sehr selektiv.

Automatische Gittervorspannung. Rückkopplung und Gegenkopplung. Schwundausgleich

In einem Verstärker ist es zweckmäßig, die Gitterkreise an Masse zu legen. Es ist dann notwendig, die Kathoden der Röhren zu polarisieren, indem man ihnen ein gegenüber Masse schwach positives Potential erteilt. Dies erreicht man einfach dadurch, daß die Kathoden über einen kleinen Widerstand R_1 (500 bis 1500 Ω) an Masse gelegt werden. Aus dem gleichen Grunde, aus dem $U_a = -R_i$, ist jetzt auch $U_k = R_1 i$. Der Gleichstromanteil i_0 des Anodenstroms bestimmt dann die Vorspannung $U_k = R_1 i_0$, während $U_g = 0$.

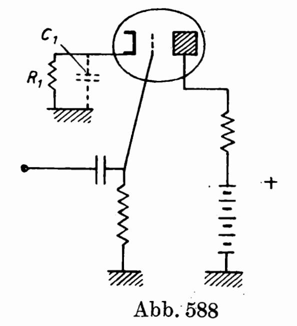


Abb. 588

Die Anwesenheit von R_1 wirkt sich jedoch auf die Eigenschaften der Schaltung aus. Wir setzen jetzt

$$R_i i = U_a + K\,U_g,$$

wobei U_a und U_g die Potentialdifferenzen zwischen Kathode und Anode bzw. Gitter und Kathode sind. Beziehen wir jetzt U_a, U_g und U_k auf die Masse, so müssen wir schreiben

$$R_i i = (U_a - U_k) + K(U_g - U_k) = U_a + K U_g - (K+1)\, U_k.$$

Setzen wir für U_a und U_k die Werte

$$U_a = -Ri \quad \text{und} \quad U_k = +R_1 i$$

ein, so erhalten wir eine Verstärkung

$$\mu = -\frac{KR}{R_i + R + (K+1) R_1},$$

die wegen des Auftretens von R_1 *kleiner* ist. In der Praxis kann man diese Abnahme der Verstärkung durch R_1 vermeiden, indem man R_1 durch eine große Kapazität C_1 shuntet. C_1 bildet dann für alle Frequenzen mit Ausnahme der Anodenspannung einen Kurzschlußkreis

$$\left|\frac{1}{j C \omega}\right| \ll R_1.$$

Bringt man keine Kapazität C_1 an und macht $R_1 \ll R$ derart, daß $(K+1) R_1$ noch genügend groß ist gegen $R_i + R$, so gilt

$$\mu \approx -\frac{KR}{(K+1) R_1} \approx -\frac{R}{R_1}.$$

Die Verstärkung, die groß sein kann, ist unter diesen Umständen von der Charakteristik der Röhre nahezu unabhängig.

Man stellt leicht fest, daß dieses Resultat auf einer durch den Kathodenwiderstand R_1 erzeugten Spannung beruht, die der Gitterspannung entgegenartet und ihrerseits einen Anodenstrom verursacht, der dieser Gitterspannung entspricht. Diesen Effekt nennt man *Gegenkopplung*. Er äußert sich vorteilhaft in einem Ausgleich der Verstärkung bei eventuellen Veränderungen der Röhrencharakteristik. Weiterhin fand man, daß durch eine Gegenkopplung eine wesentliche Abnahme der Harmonischen auftritt, die auf der Krümmung der Charakteristiken der Verstärkerröhre beruht. Diese Vorteile erreicht man jedoch nur auf Kosten einer geringeren Verstärkung.

Man kann natürlich durch viele Methoden eine Gegenkopplung oder eine positive Rückkopplung erreichen, die die Verstärkung nicht beeinträchtigen, sondern vergrößern. Wir wollen nun die Eingangsspannung eines Verstärkers A mit E, seine Ausgangsspannung mit S bezeichnen. Zur Eingangsspannung E kann man nun einen Bruchteil αS der Ausgangsspannung hinzufügen. Die Größe α ist dabei sehr klein gegen 1 und kann positiv oder negativ und bei Phasenverschiebung auch imaginär sein (Abb. 589).

Den unter Umständen komplexen Verstärkungsfaktor der Spannung des Verstärkers bezeichnen wir mit μ. Dann beträgt die Ausgangsspannung ohne Rückkopplung

$$S = \mu E$$

und mit Rückkopplung

$$S = \mu(E + \alpha S)$$

oder

$$S = \frac{\mu}{1 - \alpha\mu} E.$$

Bei einer *Rückkopplung* ist man daran interessiert, das Produkt $\alpha\mu$ möglichst positiv reell zu gestalten und sich 1 von unten her anzunähern, da für $\alpha\mu = 1$ die Verstärkung unendlich groß wird. Man kann ohne weiteres zeigen, daß dies

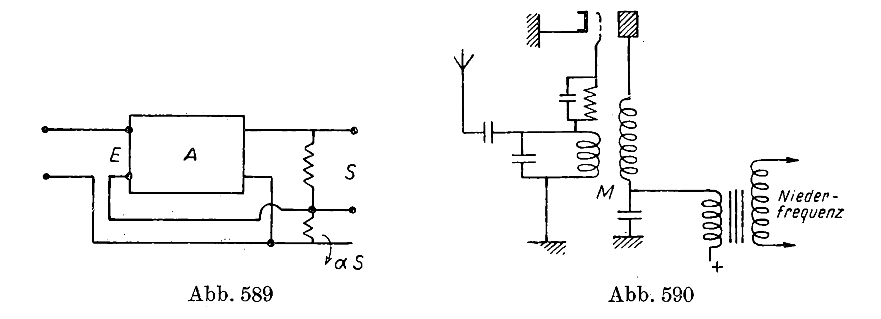


Abb. 589 Abb. 590

durch einen an das Gitter der Röhre gelegten abgestimmten Schwingkreis, in den das z.B. von einer Antenne herrührende Signal gegeben wird, und durch die gegenseitige Induktion M mit einer Spule, in der der Anodenstrom oder wenigstens sein HF-Anteil fließt, erreicht wird. Auf diese Weise hat man eine sehr empfindliche Verstärkerstufe erhalten. Es ist nicht möglich, an diese Stufe eine weitere Verstärkerstufe anzuschließen, da sich die Schwingungen selbst dämpfen würden. Den abgestimmten Schwingkreis verbindet man über einen geshunteten Kondensator mit dem Gitter der Röhre (Abb. 590). Zusammen mit einem Niederfrequenzverstärker bildet dieser Aufbau den einfachsten möglichen Empfänger.

Im Falle einer *Gegenkopplung* versucht man das Produkt $\alpha\mu$ negativ reell zu gestalten, wobei man daran interessiert ist, $|\alpha\mu|$ größer als 1 zu erreichen. Dann gilt

$$S \approx \frac{\mu}{\alpha\mu} E = \frac{1}{\alpha} E.$$

Dadurch erreicht man eine von μ unabhängige Verstärkung, von der wir schon gesprochen haben.

Wir betrachten noch einmal die Schaltung in Abb. 587, aus der wir einen *ultraselektiven Verstärker* konstruieren wollen. Dazu geben wir einen Teil der austreten-

den Signale wieder auf den Eingang zurück (die Schaltung kann man sich leicht überlegen). Der Verstärkungsgrad beträgt dann

$$G = \frac{\mu}{1 + \alpha\mu} \approx \frac{1}{\alpha}$$

für alle Frequenzen mit Ausnahme von ω, das durch $RC\omega = 1$ bestimmt ist und für das gerade $\mu = 0$, d.h. auch $G = 0$ ist. Der Verstärkungsgrad ist außerhalb eines sehr engen Frequenzintervalls um ω unabhängig von μ und beträgt immer $\frac{1}{\alpha}$.

Eine Gegenkopplung verwendet man hauptsächlich dann, wenn von einem Verstärker eine von den Veränderungen der Speisespannung (Anode und Heizung) unabhängige Leistung gefordert wird. Wir sehen sofort die zusätzlichen Vorteile, die sich aus dieser Anwendung ergeben: Selbst wenn μ von der Frequenz abhängig ist, so ist doch die definitive Verstärkung $\frac{1}{\alpha}$ von der Frequenz unabhängig, d.h., der Frequenzgang des Verstärkers ist abgeplattet für den ganzen Frequenzbereich, in dem eine gute Gegenkopplung wirksam ist. Ohne Schwierigkeiten kann man auch bei Annahme einer nichtlinearen Verstärkungscharakteristik

$$S = \mu E + \beta\mu E^2 + \cdots$$

zeigen, daß die bei der Verstärkung erzeugten Harmonischen in der konstanten Ausgangsamplitude im Verhältnis α durch die Gegenkopplung reduziert werden.

In Schaltungen mit automatischer Vorspannung werden Verstärkung und Schwundausgleich durch Rück- und Gegenkopplung automatisch geregelt. Dabei

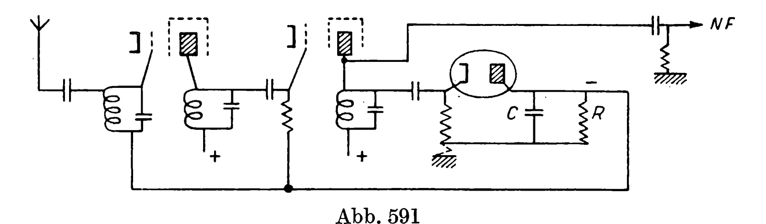


Abb. 591

kommt es darauf an, den Ausgang auch bei Schwankungen des Eingangsniveaus konstant zu halten. Dazu unterwirft man das Ausgangssignal einer linearen Gleichrichtung, so daß man eine gleichgerichtete Spannung erhält, die gewissermaßen ein Maß für die Amplitude ist.

Man wählt zweckmäßig die gleichgerichtete Spannung negativ in bezug auf die Masse und verwendet sie als Gittervorspannung der Verstärkerröhren. Wird die Amplitude des Signals größer, so nimmt die Gittervorspannung zu. Aus der Krümmung der Röhrencharakteristiken ergibt sich nun eine geringere Verstärkung, und man kann die Schwankung der Amplitude des Eingangssignals durch Veränderung der Verstärkung kompensieren und dadurch am Ausgang eine fast vollständige Konstanz erreichen.

Die automatische Steuerung der Verstärkung nennt man häufig *Schwundausgleich*. Der Schwund ist die hauptsächliche Ursache für die Signalveränderung, die zu kompensieren man ein Interesse hat (siehe weiter unten: Ausbreitung). Der R-C-Kreis besitzt eine große Zeitkonstante (mehrere Sekunden), und es ist auch nicht notwendig, daß die Vorspannung jedem Rhythmus der Modulation folgt; der Empfang braucht dadurch nicht verhindert zu werden.

Hochfrequenzsender und -verstärker

Wir haben bereits die durch die Röhren bedingten Begrenzungen bei hohen Frequenzen (einige 100 MHz) betrachtet. Nun treten auch noch durch die Elemente der Stromkreise bedingte Begrenzungen auf. Ein abgestimmter Stromkreis besteht im allgemeinen aus einer Selbstinduktion mit zahlreichen Windungen und einer Kapazität. Die Dimensionen dieser Selbstinduktion sind sehr klein gegenüber der Wellenlänge, und die äquivalente Höhe der Antenne ist gering. Es wird wenig Energie abgestrahlt, und der Stromkreis besitzt eine große Güte, wenn der OHMsche Widerstand gering ist. Wir wollen nun zu kleineren Wellenlängen übergehen. Dazu verringern wir die Anzahl n der Windungen. Die Selbstinduktion L wird also mit n^2, R dagegen nur mit n und außerdem wegen des Skineffekts langsamer abnehmen. Andererseits ist es nicht möglich, die Lineardimensionen des Kreises im Verhältnis zur Wellenlänge zu verkleinern. Der Hochfrequenzkreis wird beträchtliche Verluste, besonders durch Abstrahlung, aufweisen, d. h., er wird also stark gedämpft.

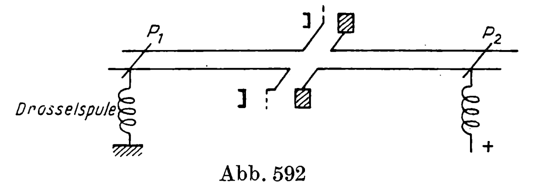


Abb. 592

Diesen Nachteil kann man ausgleichen, indem man zu *offenen* Schwingkreisen übergeht. In diesen ist der Scheinwiderstand nicht in einer bestimmten Kapazität oder Selbstinduktion konzentriert, sondern gleichmäßig über den gesamten Schwingkreis verteilt. Im Bereich stehender Wellen, der auf einer Leitung existieren kann, findet man Punkte, deren Potential sich in umgekehrtem Sinn verändert. Verbinden wir einen dieser Punkte mit dem Gitter einer Röhre und den anderen mit der Anode, so sind die für eine Schwingung geltenden Bedingungen qualitativ erfüllt. Man ist in der Lage, hervorragende *lineare Oszillatoren* und ebenso „*lineare*" *Verstärker* herzustellen. Die durch Abstrahlung verursachten Verluste kann man leicht durch die Verwendung zweier paralleler Drähte (LECHERleitung) begrenzen, da sich hierbei die Abstrahlungen gerade aufheben.

Wir haben bereits weiter oben die theoretischen Grundlagen betrachtet, so daß es hier genügt, die Anordnungen kurz zu beschreiben.

In Abb. 592 ist ein Sender dargestellt, bei dem zwei Röhren in entgegengesetzter Phase schwingen (sogenannte push-pull-Schaltung). Dabei liegt eine LECHERleitung an den Gittern, eine andere an den Anoden. Durch eine Verschiebung der Brücken P_1 und P_2 stimmt man den Schwingkreis ab und erregt die Schwingungen. Die Kopplung Gitter-Anode erfolgt durch die inneren Kapazitäten der Röhren.

Die Abb. 593 zeigt schematisch eine Scheibenröhre (Abb. 551), die mit einem Koaxialkabel oder vielmehr einem entsprechend dimensionierten Koaxialschwingkreis gekoppelt ist. Dies ist die Idealschaltung eines Senders. Es ist in jedem Falle außerdem eine Einrichtung zur Anlegung der Spannung, Veränderung der Abstimmung und der Kopplung notwendig. Man kann auch das Gitter mit einer Abschirmung verbinden und das zu verstärkende Signal an die Kathode legen oder noch besser an das Gitter und die Anode nur durch die innere Kapazität verschiedener Stromkreise koppeln.

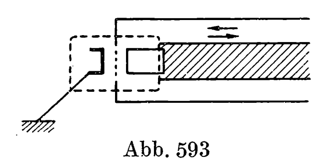
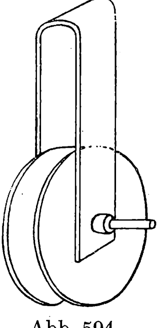


Abb. 593

Wie es in Abb. 594 dargestellt ist, kann man z. B. auch Schwingkreise herstellen, indem man ein als Selbstinduktion wirkendes gebogenes Messingband an seinen Enden mit zwei ebenen verstellbaren Kondensatorplatten verbindet. Ein solcher Schwingkreis besitzt eine große Kreisgüte (wegen des vielen Kupfers) und geringe Abstrahlungsverluste.

Zusätzliche Verluste, die durch Lötstellen, Unregelmäßigkeiten der Form usw. auftreten, werden auch bei dem in Abb. 595 dargestellten Schmetterlingskreis, der eine gute technische Lösung (1944) zu sein scheint, vermieden. Die Platten, die die



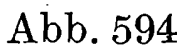


Abb. 594

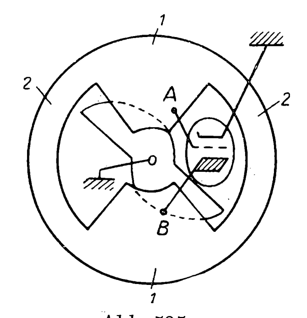


Abb. 595

in der Abbildung gezeigte Form besitzen, sind mit Zwischenräumen so angeordnet, daß in ihnen ein bewegliches Plattensystem angebracht werden kann, wie dies auch beim Drehkondensator der Fall ist. Die Achse und die Kathode der Röhre liegen an Masse, während das Gitter mit dem Punkt A und die Anode mit dem Punkt B verbunden sind. Man erhält damit einen guten Oszillator, der einen außerordentlich großen Frequenzbereich überstreicht (1 bis 4), wenn man die beweglichen Platten verdreht. Offensichtlich ist im Punkte *1* die Kapazität und in *2* die Selbstinduktion größer. Es handelt sich jedoch um eine in sich gekrümmte Linie, die viele Resonanzstellen besitzen kann, und wenn der Schwingkreis als Empfänger wirkt, kann man ihn leicht mit einer Grundfrequenz und bestimmten Oberfrequenzen in Resonanz bringen, ohne seine Einstellung zu ändern.

Wie die vorstehenden Schwingkreise strahlt auch dieser wenig ab und besitzt eine große Kreisgüte. Neben seiner Verwendung als Sender kann er auch als Wellenmesser oder Stromkreiselement benutzt werden.

Es gibt außer den in diesem Abschnitt beschriebenen eine größere Anzahl weiterer Schwingkreise, die eine bessere Ausnutzung der inneren Kapazitäten der Röhren gestatten. Wir wollen hier jedoch nicht weiter darauf eingehen.

Die erwähnten Anordnungen sind mit guten Röhren zwischen 600 MHz und 60 MHz und darunter zu verwenden. Scheibenröhren mit koaxialem Schwingkreis arbeiten bis zu 4000 MHz. Darüber muß man unbedingt Hohlleiter, Hohlraumresonatoren und Laufzeitröhren verwenden.

Das Neutrodyn

Es ist unmöglich, von einer Verstärkung zu sprechen, ohne das 1917 von H. de Bellescize entwickelte Neutrodyn zu erwähnen. In der in Abb. 596 angegebenen Schaltung führt die Kapazität C' die Spannung des Anodenkreises auf den Gitterkreis und begrenzt dadurch die Verstärkung.

Man hat diese Schwierigkeit in der verbesserten Schaltung der Abb. 597 vermieden. Liegt am Mittelpunkt des Anodenkreises die Spannungszuführung, dann

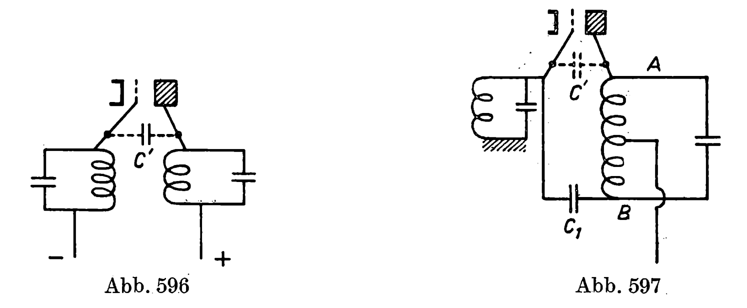


Abb. 596 Abb. 597

verändern sich die Spannungen in A und B entgegengesetzt zueinander. Bringt man nun eine Kapazität $C_1 = C'$ in der dargestellten Weise an, so heben sich die von A und B auf dem Gitter induzierten Signale auf. Man nennt diesen Verstärker *Neutrodyn.*

Vor der Entwicklung der Schirmgitterröhren (bei denen die Kapazität C' tatsächlich vermieden wird) war das Neutrodyn die einzige Möglichkeit, bei hohen Frequenzen eine gewisse Verstärkung zu erreichen. Auch heute noch wird es bei sehr hohen Frequenzen verwendet.

Betrachtung der verschiedenen Schaltungen bei Radioempfängern

Im allgemeinen ist die ausgesandte Welle moduliert, und die Aufgabe besteht in ihrem Empfang, ihrer Verstärkung und ihrer Demodulation. In der Telegraphie sendet man bisweilen reine Trägerwellen in Form von Morse-Signalen, jedoch ohne Modulation, aus. Dadurch wird die im Sender zur Verfügung stehende Leistung besser ausgenutzt. Die Reichweite (d. h. der Bereich, in dem man ein trotz der Störungen für den Empfang ausreichendes Feld findet) ist dabei größer. Zum Nachweis dieser Trägerwellen benutzt man einen Heterodynempfänger. In ihm liefert eine Oszillatorröhre geringer Leistung eine Spannung $b \sin \omega' t$, die sich zu der Spannung $a \sin \omega t$ des zu verstärkenden Signals addiert. Diese beiden Signale liefern

nach der Gleichrichtung eine Überlagerung mit der Frequenz $\omega' - \omega$. Die Frequenz ω' wählt man in der Nähe der Frequenz ω so, daß die Überlagerungen hörbar werden. Die Anwesenheit oder Abwesenheit von ω wird also durch die An- oder Abwesenheit einer Überlagerung angezeigt. Mit anderen Worten bedeutet dies, daß man den Empfänger kompliziert, um dafür den Sender vereinfachen, d.h., um den größtmöglichen Teil der verfügbaren Leistung aussenden zu können.

In allen anderen Fällen empfängt man eine modulierte Welle. Der dazu verwendete Empfänger enthält einen Hochfrequenzverstärker, einen Gleichrichter sowie einen Niederfrequenzverstärker, um bei Radioübertragung Sprache und Musik wiederzugeben.

Ein erster Empfängertyp enthält eine Gleichrichtung mit Rückkopplung und zwei NF-Röhren. Sein Vorteil ist der sehr einfache Aufbau, seine Nachteile sind mangelnde Empfindlichkeit, geringe Trennschärfe und unstabile Regelung.

Ein anderer Empfänger enthält einen zweistufigen Hochfrequenzverstärker, einen Gleichrichter und einen Niederfrequenzverstärker. Mit dieser Schaltung erreicht man die erforderliche Empfindlichkeit, dagegen besitzt er nur ungenügende Trennschärfe: die Trennschärfe von drei abgestimmten Stromkreisen (Antennenkreis, Anodenkreis 1 und Anodenkreis 2). Verwendet man Bandfilter, so verliert der Empfänger zu sehr an Empfindlichkeit (siehe Abb. 591).

Ein bedeutend besserer Empfänger ist der Superheterodyn: Der Welle ω wird die Oszillatorfrequenz ω' überlagert. Dadurch erhält man die Zwischenfrequenz $\omega - \omega'$, die selbst wieder moduliert ist, da

$$(a \sin \omega t + b \sin \omega' t)^2 = \cdots + 2ab \sin \omega t \sin \omega' t = \cdots + ab \cos(\omega - \omega') t .$$

Ist a moduliert, dann ist es auch $a \cdot b \cos(\omega - \omega')t$. Diese Welle mit der Frequenz $\omega - \omega'$ wird in einem fest abgestimmten Zwischenfrequenzverstärker verstärkt. *Die feste Abstimmung auf $\omega - \omega'$ ist möglich, da bei einer Veränderung von ω trotzdem die Differenz $\omega - \omega'$ konstant bleibt.* Die Frequenz $\omega - \omega'$ wählt man oberhalb des Hörbereichs, woraus der Name Superheterodyn-Empfänger resultiert. Durch diese Zwischenfrequenz tritt also kein störendes Pfeifen auf. Eine zweite Gleichrichtung bewirkt dann die Demodulation. Der Super besitzt den großen Vorteil nahezu unendlicher Trennschärfe, da man im Zwischenfrequenzbereich beliebig viele selektive Stromkreise anbringen kann. Seine geringen Nachteile (z.B. die Störwelle ω_1 mit $\omega' - \omega_1 = \omega - \omega'$ tritt auch in den Zwischenfrequenzbereich) sind leicht zu eliminieren, und man kann eine beinahe unendliche Verstärkung erhalten. Dadurch verliert auch die Frage nach dem Wirkungsgrad der Empfängerantenne an Bedeutung. Es genügt durchaus, kurze Drahtenden als Antenne zu verwenden, deren effektive Höhe einige Zentimeter beträgt.

Die Leistungen sind also nur durch das Verhältnis $\dfrac{\text{Signal}}{\text{Störungen}}$ begrenzt. Dieses Verhältnis muß immer bedeutend größer als 1 sein, wenn ein guter Empfang angestrebt wird (z.B. bei Radiosendungen). In der Telegraphie muß man ein Ansprechen des Relais auf Störwirkungen verhindern. Unter diesen Störungen sind zu unterscheiden:

a) Atmosphärische Störungen, die von aus beträchtlichen Entladungen in der Atmosphäre resultierenden Feldern verursacht werden (Blitz usw.), oder durch

die Bewegung an Wolken oder Luftmassen gebundener elektrostatischer Ladungen.

b) Industrielle Störungen analoger Natur, die jedoch immer eine lokalisierte Ursache haben (Funken an den Bürsten einer Maschine oder Unterbrecher einer Magnetzündung usw.).

c) Das durch die thermische Bewegung der Elektronen in den Leitern oder durch Fluktuation der Thermoelektronenemission der Röhren hervorgerufene Rauschen.

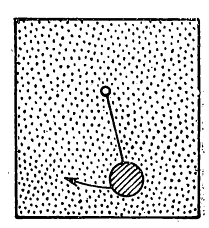
Störungen

Rauschen durch thermische Bewegung

Der diskontinuierliche Charakter der aus Elementarladungen bestehenden Elektrizität zeigt sich einmal in den Unregelmäßigkeiten der Spannung in den Stromkreisen, die nach einer Verstärkung ein hörbares Signal ergeben (daher der Name Rauschen), und andererseits wegen der Fluktuationen der Emission in den Röhrenströmen. Man könnte annehmen, daß dieser letztere Effekt gegenüber dem ersteren ein Übergewicht besitzt. Dies ist jedoch nicht der Fall. Wir werden uns erinnern, daß wir (S. 560) feststellten, der Anodenstrom einer Triode sei durch die Raumladung begrenzt (LANGMUIR). Diese Tatsache wird durch die Gleichungen

$$\frac{1}{2} m v^2 = e U; \quad \Delta U = -4 \pi \varrho; \quad \varrho v = i$$

beschrieben, die jedoch keine Fluktuationen berücksichtigen. Sendet also eine Kathode in einem bestimmten Zeitpunkt ein Elektron zu viel aus, so verhindert die auftretende Raumladung dessen Bewegung. Es treten trotzdem geringe Fluktuationen auf, da die Kathode trotz allem ein Elektron mit einer sehr großen Anfangsgeschwindigkeit (die wir in unseren Gleichungen vernachlässigt haben) aussenden kann. Dieses Elektron könnte sich trotz der Raumladung bewegen. In der Praxis sind diese Fluktuationen jedoch so gering, daß sie bei gut evakuierten und richtig geheizten Röhren gegenüber dem Rauschen in dem Leiter vernachlässigt werden können. Befindet sich aber in der Röhre ein Restgas, das irreguläre Ionisationserscheinungen hervorruft, so ist diese Schlußfolgerung nicht unbedingt richtig.


Abb. 598

Das auf der Bewegung der Elektronen in den Leitern beruhende Rauschen kann in einer sehr eleganten theoretischen Lösung, die wir hier angeben wollen, beschrieben werden. Betrachten wir die Moleküle in einem Gas (Abb. 598), so besitzen alle die gleiche mittlere Energie

$$\frac{3}{2} \frac{R T}{N} = \frac{3}{2} k T.$$

(T bedeutet dabei die absolute Temperatur, N die LOSCHMIDTsche Zahl, R die ideale Gaskonstante und $k = \frac{R}{N}$ die BOLTZMANNsche Konstante, $N = 6{,}02 \cdot 10^{23}$,

$R = 8{,}32 \cdot 10^7$ CGS-Einheiten.) Es handelt sich hier um die kinetische Translationsenergie, da jedes Molekül drei Freiheitsgrade der Translation entsprechend Ox, Oy, Oz besitzt. Die mittlere Energie eines Freiheitsgrades beträgt also $\frac{1}{2}\,kT$.

In diesem Gas ordnen wir nun ein Pendel an. Dieses Pendel entspricht einem großen Molekül und wird an der thermischen Bewegung durch eine Bewegung teilnehmen, die in diesem Fall sehr gering ist und nur einen Freiheitsgrad besitzt. Seine mittlere kinetische Energie wird also $1/2\,kT$ betragen. Wir wissen, daß die mittlere kinetische Energie eines Pendels gleich seiner mittleren potentiellen Energie ist. Das Pendel wird also im Mittel um den Betrag Δz angehoben. Es gilt dann

$$mg\Delta z = \frac{1}{2}\,kT$$

(m = Masse des Pendels, g = Erdbeschleunigung).

Wir betrachten nun einen parallel zu den Klemmen eines Kondensators C liegenden Widerstand R. In dem Widerstand existiert ein Elektronengas, und jedem einzelnen Elektron muß eine thermische Bewegungsenergie zugeschrieben werden. Das vorhin betrachtete Pendel wird hierbei durch die Kapazität C ersetzt. Durch die Bewegung der Elektronen nimmt der Kondensator die Ladung Q auf, und zwischen seinen Platten stellt sich die Potentialdifferenz $U = \frac{Q}{C}$ ein. Wir können

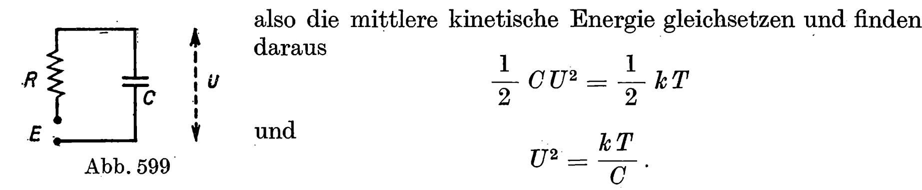


Abb. 599

also die mittlere kinetische Energie gleichsetzen und finden daraus

$$\frac{1}{2}\,CU^2 = \frac{1}{2}\,kT$$

und

$$U^2 = \frac{kT}{C}\,.$$

Diese Formel gibt jedoch nur eine grobe Annäherung. Man muß eine genaue *Frequenzanalyse* des Rauschens durchführen, um festzustellen, wie sich das Rauschen in diesem oder jenem Frequenzbereich äußert. Zu diesem Zweck wird die an den Klemmen des Kondensators auftretende Spannung U einer in den Kreis eingeführten elektromotorischen Kraft E zugeschrieben (Abb. 599). Diese elektromotorische Kraft wird als Ursache der Elektronenbewegung angesehen. Bezeichnen wir mit i den im Kreis fließenden Strom, dann finden wir

$$E = Ri + U; \quad U = \frac{Q}{C} = \frac{1}{C}\int i\,dt,$$

und daraus ergibt sich

$$i = C\,\frac{dU}{dt}$$

und

$$E = U + RC\,\frac{dU}{dt}\,.$$

Ist die elementare elektromotorische Kraft dE sinusförmig und besitzt die Frequenz ω, so folgt

$$dU\,(1 + jRC\omega) = dE$$

oder

$$(dU)^2 = \frac{(dE)^2}{1 + R^2C^2\omega^2}$$

als Modul.

Wir wollen nun annehmen, daß zwischen den Frequenzen ω und $\omega + d\omega$ eine elektromotorische Kraft dE wirkt, deren mittleres Quadrat proportional $d\omega$ sein wird und deren Amplitude unabhängig von ω ist. (Tatsächlich ist nicht einzusehen, warum die Elektronen in einem Widerstand bei einer beliebigen Frequenz ein stärkeres Rauschen als bei einer anderen Frequenz verursachen sollten.) Setzen wir

$$(dE)^2 = A^2 d\omega,$$

dann ergibt sich der Ausdruck

$$(dU)^2 = \frac{A^2 d\omega}{1 + R^2C^2\omega^2}.$$

Integrieren wir diese Formel, so müssen wir wieder den vorherigen Näherungswert finden:

$$U^2 = \int\limits_0^\infty \frac{A^2 d\omega}{1 + R^2C^2\omega^2} = \frac{kT}{C}.$$

Durch die folgende Integration ergibt sich der Wert für A:

$$\int\limits_0^\infty \frac{d\omega}{1 + R^2C^2\omega^2} = \frac{1}{RC}\int\limits_0^\infty \frac{du}{1 + u^2} = \frac{1}{RC}\,[\operatorname{arc\,tg} u]_0^\infty = \frac{\pi}{2RC},$$

also

$$A^2 = \frac{2}{\pi}\,RkT.$$

Ist $d\omega = 2\pi dn$ gegeben, so sehen wir, daß zwischen den Klemmen eines Widerstandes R zwischen den Frequenzen n und $n + dn$ eine von der thermischen Bewegung verursachte Potentialdifferenz auftritt. Ihr mittleres Quadrat hat (NYQUIST 1928) den Wert

$$(dE)^2 = A^2 d\omega = 4\,RkT\,dn.$$

Anwendung

Wir nehmen für dn den in einem guten Kopfhörer oder Lautsprecher hörbaren Frequenzbereich von 10000 Hz an. $A^2 \frac{d\omega}{R}$ stellt eine *Leistung* dar. Wollen wir diese Leistung in Watt ausdrücken, so müssen wir R in Ohm und $A^2 d\omega$ in Volt angeben.

Im zweiten Term ist $4\,k\,T\,dn$ in erg/sec gegeben und muß daher mit 10^{-7} multipliziert werden. Für Zimmertemperatur $T = 300°\,\mathrm{K}$ gilt dann

$$4\,k\,T\,dn \cdot 10^{-7} = 4\,\frac{8{,}32 \cdot 10^{7}}{6 \cdot 10^{23}} \cdot 300 \cdot 10^{4} \cdot 10^{-7} = 1{,}5 \cdot 10^{-16}.$$

Für den Widerstand R wählen wir, wie es im allgemeinen der Fall ist, $1\,\mathrm{M}\Omega$, d.h. $10^{6}\,\Omega$. Dann beträgt

$$A^2 d\omega = 1{,}5 \cdot 10^{-16} \cdot 10^{6} = 1{,}5 \cdot 10^{-10}.$$

Die Amplitude der Rauschspannung an den Klemmen dieses Widerstandes hat dann den Wert

$$U = \sqrt{1{,}5 \cdot 10^{-10}} = 1{,}2 \cdot 10^{-5}\ \text{Volt}.$$

Nun setzen wir, wie es ebenfalls üblich ist, unseren Widerstand an den Eingang eines Verstärkers, dessen Spannungsverstärkung 10^{6} beträgt. Am Ausgang werden wir dann eine enorme Rauschspannung (12 V) erhalten.

Wir sehen also, daß das durch die thermische Bewegung im Stromkreis bedingte Rauschen nicht zu vernachlässigen ist (da im allgemeinen empfindliche Verstärker benutzt werden). Wie es die NYQUISTsche Formel zeigt, ist das Rauschen den in den Widerständen lokalisierten elektromotorischen Kräften zuzuschreiben. Die Selbstinduktivitäten und die Kapazitäten können die entsprechende Energie speichern und liefern aus diesem Grunde keinen Beitrag.

In einem gegebenen Verstärker, z.B. einem Radioempfänger, dessen Frequenzbereich und Eingangskreis bekannt sind, kann man also abschätzen, wie stark ein Signal sein muß, damit das Verhältnis Signal zu Rauschen größer als ein bestimmter Grenzwert bleibt. Diese Abschätzung führt in der Radiotelegraphie auf μV (10^{-6} V) und in der Radiotelephonie auf einige 10 μV.

Das Rauschen im Anodenkreis der Röhren kann mit dem durch die thermische Bewegung bedingten Rauschen in einem zwischen Gitter und Masse liegenden Widerstand verglichen werden. Dieser Widerstand liegt bei den üblichen Empfängerröhren in der Größenordnung von 5000 Ω und beträgt bei den z.B. beim Fernsehen verwendeten Röhren mit großer Steilheit etwa 500 Ω.

Dazu ist jedoch notwendig zu bemerken, daß das Rauschen der Röhren nicht allein das Rauschen durch thermische Bewegung ist. Durch die diskontinuierliche Emission von einzelnen Ladungen treten rein zufällige Fluktuationen auf, die den *Schroteffekt* liefern. Trotz seiner Bedeutung für Photokathoden (siehe Kap. VI) ist er glücklicherweise bei Röhren zu vernachlässigen, da die Raumladung den Fluß gegen die Anode reguliert.

Außerdem tritt noch der sogenannte *Funkeleffekt* auf, ein spezielles Rauschen bei tiefen Frequenzen, das etwa gleich dem thermischen Rauschen bis 1000 Hz und darunter umgekehrt proportional zur Frequenz ist. Weiterhin ist dieses Rauschen dem fließenden Strom ungefähr proportional. Seine Ursache kann man sich leicht klarmachen. Wir nehmen an, daß der von der Kathode zur Anode laufende Elektronenstrom plötzlich seine Wege ändert (Emissionsinsel auf der Oberfläche der Kathode...), dann zeigt sich im Stromkreis eine äquivalente Spannungsänderung $\Delta\,R\,i$, wobei $\Delta\,R$ eine „Einheitssprungfunktion" nach HEAVISIDE ist. Zerlegt man $\Delta\,R_i$ in ein

FOURIERintegral, so besitzt das Frequenzspektrum Amplituden in $\frac{1}{\omega}$. Das Resultat ist also proportional zu $\frac{i}{\omega}$, und dies entspricht ungefähr dem tatsächlichen Verhalten.

Atmosphärische Störungen

Im Prinzip ist es unmöglich, atmosphärische Störungen vollständig zu vermeiden. Ist für einen Empfang der Frequenzbereich ω_1, ω_2 erforderlich, so konstruiert man am besten einen selektiven Empfänger, der nur diesen Bereich wiedergibt. Nur diejenigen atmosphärischen Störungen, die Frequenzkomponenten in diesem Intervall besitzen, ergeben dann ein Signal. Alle anderen atmosphärischen Störungen werden dabei eliminiert. Es ist jedoch selbstverständlich unmöglich, diejenigen Störungen zu vermeiden, die bei den gleichen Bedingungen aufgenommen werden wie das Signal.

Ohne eine Frequenzanalyse der Störungen durchzuführen, kann man den Störschutz berechnen, den die Selektivität des Empfängers gewährleistet. Wir wollen

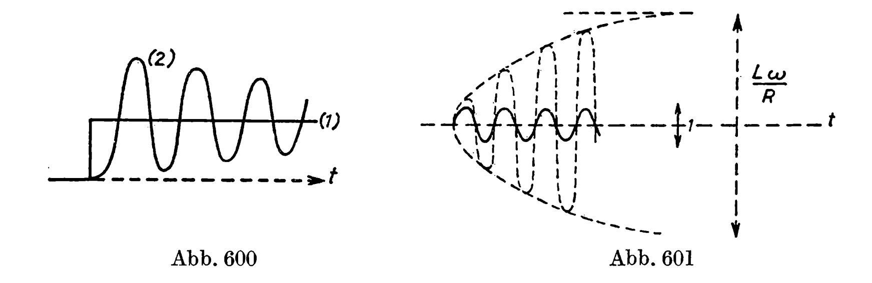


Abb. 600 Abb. 601

annehmen, daß der Eingangskreis des Empfängers abgestimmt sei. Weiter setzen wir voraus, daß die Störung ein plötzlicher Spannungsstoß ist, der den Kondensator C über die Selbstinduktion L und den Widerstand R auflädt. Die folgende Entladung verläuft langsam. In Abb. 600 stellt die Kurve (*1*) die Störungsamplitude dar, und die Form des Signals (Spannung an den Klemmen von C) ist durch die Kurve (*2*) gegeben (es handelt sich um gedämpfte Schwingungen mit der Anfangsamplitude 1 um den mittleren Wert 1).

Wir betrachten jetzt ein anhaltendes Signal $E = \sin \omega t$ (Abb. 601). Nach dem Einschwingvorgang des Stromes finden wir an den Klemmen von C eine sinusförmige Spannung, die bestimmt ist durch

$$LC \frac{d^2 U}{d t^2} + RC \frac{d U}{d t} + U = E = \sin \omega t.$$

Da der Stromkreis auf die Kreisfrequenz ω abgestimmt ist, gilt

$$LC \frac{d^2 U}{d t^2} + U = 0,$$

d.h., die Amplitude von U entspricht dem Ausdruck

$$|U| = \frac{1}{R C \omega} = \frac{L\omega}{R}.$$

Das Verhältnis Signal zu Störung beträgt am Gitter $\frac{L\omega}{R}$, wenn beide Felder $\sin \omega t$ und 1 die gleiche Amplitude besitzen. Das Verhältnis ist also *gleich der Kreisgüte*, d.h. gleich $\frac{\omega}{\Delta\omega}$. $\Delta\omega$ ist der Frequenzbereich. Je schmaler dieser Frequenzbereich ist, um so besser ist der Störschutz. Dieser Effekt ist bedingt durch die Selektivität.

Es muß allerdings bemerkt werden, daß es sich nur um die Selektivität des ersten Schwingkreises handelt. Die nachfolgenden Schwingkreise, in die das Signal nach dem Austritt aus dem ersteren, d.h. bereits mit einer entsprechenden Kreisfrequenz ω eintritt, lassen es fast unverändert hindurchtreten.

Das einzige Mittel zur Vergrößerung des Verhältnisses Signal zu Störung bei bereits ausgenutzter Selektivität besteht darin, den Empfänger mit einer *Richtantenne* auszurüsten. Ist die Richtung, aus der das Signal ankommt, bekannt und kann der Empfang auf solche Wellen beschränkt werden, die unter einem Raumwinkel $\Delta\Omega$ auftreffen und dabei das Signal enthalten, so wird dieses nicht verändert, während sich das mittlere Quadrat der Störung im Verhältnis $\frac{\Delta\Omega}{2\pi}$ (wobei 2π der Winkel ist, der alle Richtungen über der Erde einschließt) verringert. Dadurch wird das Verhältnis Signal zu Störung proportional

$$\sqrt{\frac{2\pi}{\Delta\Omega}}$$

verbessert.

Wir werden weiter unten sehen, wie sich Richtantennen sowohl am Sender als auch am Empfänger auswirken.

In der Praxis fand man, daß sich die atmosphärischen Störungen weniger bemerkbar machen, wenn man zu kürzeren Wellenlängen übergeht. Bei Wellenlängen von 30 m und darunter sind die meisten atmosphärischen Störungen nicht mehr festzustellen.

Industrielle Störungen

In ihren Auswirkungen auf die Empfänger sind die industriellen Störungen den atmosphärischen ähnlich. Sie rühren meist von Stromabnehmern der Straßenbahnen, Kollektoren von kleinen Nähmaschinenmotoren, von mechanischen Teigknetmaschinen, Fönen usw. sowie von Zündanlagen in Automobilen und Flugzeugen (diese besonders nachts mit Wellenlängen $\lambda < 10$ m) und bestimmten Quecksilberdampfgleichrichtern, Leuchtstoffröhren und anderen Gasentladungen her. Da es sich im allgemeinen um feste oder wenigstens annähernd lokalisierte Störungsquellen handelt, ist man in der Lage, sie zu eliminieren oder zumindest vorherrschende Störungen zu beseitigen. Wir bringen zwei Antennen mit sehr verschiedenen wirksamen Höhen so an, daß wir durch die beiden im Eingangskreis des gleichen Emp-

fängers zwei Signale mit entgegengesetzter Phase erhalten (Abb. 602). Wir wählen das Übertragungsverhältnis jeder Antenne so, daß ein Signal verschwindet. Nun nehmen wir an, wie es in der Praxis fast immer der Fall ist, daß die Verhältnisse der Empfindlichkeit beider Antennen zum gesuchten Signal und zur Störung verschieden sind. Die größere Antenne liefere z. B. nur ein Signal, das halb so stark ist wie die Störung. Die kleinere Antenne dagegen empfängt ein 3 mal geringeres Signal als die größere, und die Stärke der Störung beträgt nur $^1/_4$ der von der

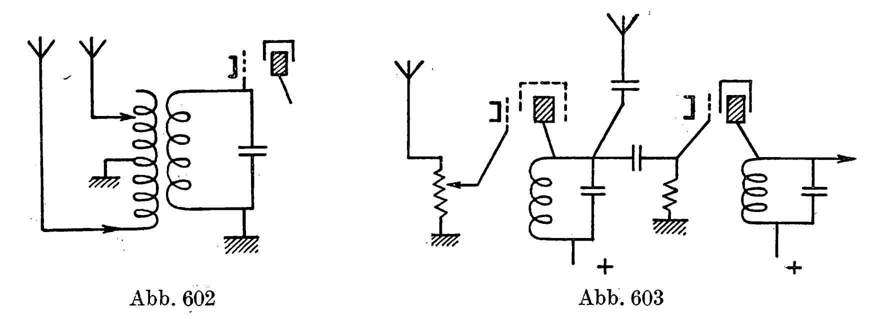


Abb. 602 Abb. 603

großen Antenne aufgenommenen Störung. Durch entsprechende Wahl des Transformators dividieren wir die Empfindlichkeit der großen Antenne durch 4. Dann sehen wir, daß die Störung vollständig verschwindet, während das Signal mit einer Amplitude $\frac{1}{4} - \frac{1}{3} = -\frac{1}{12}$ der Amplitude, die bei Verwendung nur der großen Antenne vorhanden wäre, erhalten bleibt. (Das Minuszeichen zeigt, daß die Phase des Signals um π verändert wurde.) Diese stark verringerte Amplitude wird anschließend in einem Empfänger auf den ursprünglichen Wert und darüber hinaus verstärkt. Auf diese Weise hat man die den Empfang hindernde Störung beseitigt. In Abb. 603 ist eine weitere Schaltung angegeben, mit der auf andere Weise die von zwei Antennen gelieferten Signale entgegengesetzte Phase erhalten.

Es ist also sicher, daß gegen örtlich feste Störungen durch Anwendung zweier Antennen ein ausreichender Schutz gewährleistet ist. Dagegen kann man leicht zeigen, daß diese Maßnahmen bei atmosphärischen Störungen, die rein zufälligen Charakter besitzen, absolut unwirksam sind.

Die Rauschspannungsbegrenzer

Man kann immer die durch die Störungen beim Empfang auftretenden lästigen Erscheinungen verringern, wenn man der Tatsache Rechnung trägt, daß das Rauschen sich während einer Zeit bemerkbar macht, die durch die Zeitkonstante aller Kreise, besonders der sehr beträchtlichen des Lautsprechers, gegeben ist. Ordnet man also im Empfänger einen Kreis an, der die Aufgabe hat, die Verstärkung zu unterbrechen (durch zunehmende Polarisation der Röhren), wenn ihn eine Störung erreicht, die stärker ist als das Signal, so wird man alle übermäßig verlängerten Geräusche, die den Empfang unverständlich machen, zum Verschwinden bringen können. Mit anderen Worten, die Störung wird durch einen anderen

Mechanismus, durch die Unterdrückung des Signals während der Störungsdauer, behindert. Die Erfahrung zeigt, daß dann die Störung weniger unangenehm bemerkbar ist und der Empfang eben durch diesen Kunstgriff im allgemeinen stark verbessert wird.

Das Pfeifen

Das Pfeifen beruht auf speziellen Störungen, die keine physikalische Realität der Atmosphäre darstellen, sondern im Empfänger selbst entstehen können, wenn seine Arbeitsweise nicht linear ist, und sie machen sich dann unweigerlich bei der Gleichrichtung bemerkbar. Sein Ursprung ist völlig klar. Er ist in den Überlagerungen der verschiedenen Trägerwellen (zu denen übrigens auch die Überlagerungsfrequenz des Empfängers selbst zu zählen ist) und ihrer verschiedenen Harmonischen zu suchen.

Wir betrachten die beiden Signale $a \sin \omega t$, und $b \sin \omega' t$ am Eingang des Empfängers. Dabei seien ω und ω' nur wenig voneinander verschieden. Der Hochfrequenz-Verstärkungsteil überträgt beide Signale ähnlich zu sich selbst (wenn es sich um einen Superheterodynempfänger handelt, durch eine Veränderung der Frequenz um die gleiche Größe) auf das Gleichrichtungsniveau. Die beiden Frequenzen ω und ω', die bisher nebeneinander existierten, ergeben nun eine Überlagerung, die durch den Ausdruck

$$(a \sin \omega t + b \sin \omega' t)^2 = a^2 \sin^2 \omega t + b^2 \sin^2 \omega' t + 2ab \sin \omega t \sin \omega' t$$

gegeben ist.

Der letzte Term wird nun in $ab \cos(\omega + \omega')t$ und $ab \cos(\omega - \omega')t$ zerlegt. Filtert man nach der Gleichrichtung die Niederfrequenz und verstärkt sie anschließend, so erhält man, wenn $\omega - \omega'$ eine Niederfrequenz darstellt, einen kontinuierlichen Ton dieser Frequenz. Dies ist das Pfeifen.

Der Ursprung des Pfeifens kann sehr verwickelt sein, wenn es sich um drei Signale $\omega_1, \omega_2, \omega_3$ oder mehr handelt: $2\omega_1 - \omega_2 - \omega_3$, $3\omega_1 - \omega_2 - \omega_3$ usw. ergeben Überlagerungen, die im hörbaren Bereich liegen können, und ebenso ergibt $3\omega_1 - \omega_2 - \omega_3$ eine Frequenz in der Größenordnung von ω, die in die Zwischenfrequenz des Superheterodynempfängers eingehen kann. Nun wäre es möglich, daß der Sender ω_2 moduliert sei, während die Sender ω_1 und ω_3 nur ihre Trägerwellen aussenden. Die neue Welle $3\omega_1 - \omega_2 - \omega_3$, deren Amplitude proportional zu $a_1^2 a_2 a_3$ ist (a_2 ist die Amplitude der modulierten Welle), besitzt die Modulation von ω_2, die also empfangen wird, obwohl der Sender im Prinzip auf eine andere Welle abgestimmt ist. Selbstverständlich können auch Modulationen von a_1 und a_2 gleichzeitig auftreten usw.

Diese Phänomene sind besonders dann häufig, wenn ein Empfänger in der Nähe eines leistungsstarken Senders steht, dessen Signale nicht aufgenommen werden sollen. Das einzige Hilfsmittel ist eine sehr starke Selektivität des Empfängereinganges, damit die Wellen ω_1, ω_2 und ω_3 niemals gleichzeitig verstärkt werden.

Technischer und vorgeschriebener Schutz gegen industrielle Störungen

Man fordert heute, daß die verschiedensten elektrischen Maschinen mit Anordnungen versehen sind, die ihre Störungen auf ein annehmbares Niveau reduzieren:

Die Bürsten eines Dynamokollektors, die Kontakte eines Relais (an denen sich Funken bilden) werden durch Kondensatoren von mehreren Mikrofarad mit der Masse verbunden. Die Zündkreise eines Autos werden durch Widerstände von 40000 Ω, die in Reihe mit den Zündkerzen liegen, sehr stark gedämpft (die Entladung erfolgt gedämpfter). Der Magnet des Flugzeugmotors wie alle zu den Zündkerzen führenden Kreise werden in einen FARADAY-Käfig gesetzt, der eine vollständige „Abschirmung" gewährleistet.

Richtantennen

Die Behandlung der Richtantennen ist sehr einfach. Zum Verständnis ihrer Arbeitsweise sind nicht die genauen Kenntnisse über die Strahlung erforderlich, die wir auf S. 476 ff. zu vermitteln gesucht haben. Es genügt vielmehr, nachfolgenden Satz zu kennen:

Die Strahlung einer Reihe punktförmiger Strahlungsquellen, welche auf einer Geraden der Länge D angeordnet sind und in der Abbildungsebene in Phasenüber-

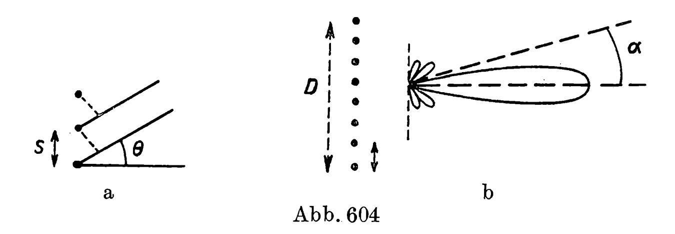


Abb. 604

einstimmung mit der Kreisfrequenz ω strahlen $\left(\text{d. h. mit einer Wellenlänge } \lambda, \text{ so daß } \omega = \frac{2\pi c}{\lambda}\right)$, wird in einem Strahl mit dem halben Scheitelwinkel α konzentriert, wobei $\sin\alpha$ angenähert durch $\frac{\lambda}{D}$ gegeben ist (Abb. 604).

Dieser Satz besitzt seine Gültigkeit für die Radioelektrizität, die Akustik und auch für die Optik, in der er uns auf die *Gittertheorie* führt.

Wir bezeichnen mit s den Abstand zwischen zwei benachbarten Strahlungsquellen (*1*) und (*2*) und suchen die Amplitude in Richtung Θ. Die Wegdifferenz in dieser Richtung zwischen der von (*1*) und der von (*2*) ausgesandten Welle beträgt $s\sin\Theta$. Die Phasendifferenz ist dann gegeben zu $\frac{2\pi s \sin\Theta}{\lambda}$, und die resultierende Amplitude der Strahlung von (*1*) und (*2*) beträgt

$$a \sin\omega t + a \sin\left(\omega t - \frac{2\pi s \sin\Theta}{\lambda}\right).$$

Allgemein gilt: wenn $n_1 dx$ Strahlungsquellen auf einer Strecke dx angebracht sind, wobei x der Abstand zwischen einer Strahlungsquelle und der Mitte der

Strecke D ist, dann ist die Amplitude der von diesen Quellen ausgehenden Strahlung gegeben zu

$$a \sin\left(\omega t - \frac{2\pi x \sin\Theta}{\lambda}\right) n_1 d x.$$

Die Gesamtamplitude aller Quellen der Strecke D ist dann

$$\int_{-D/2}^{+D/2} a \sin\left(\omega t - \frac{2\pi x \sin\Theta}{\lambda}\right) n_1 d x$$

oder

$$a \sin \omega t \int_{-D/2}^{+D/2} \cos\left(\frac{2\pi x \sin\Theta}{\lambda}\right) n_1 d x = \frac{2 a n_1 \sin \omega t}{\left(\frac{2\pi \sin\Theta}{\lambda}\right)} \cdot \sin\left(2\pi \frac{D}{2} \frac{\sin\Theta}{\lambda}\right).$$

Dies kann man auch in der Form

$$a \sin \omega t (n_1 D) \frac{\sin\left(\frac{\pi D \sin\Theta}{\lambda}\right)}{\left(\frac{\pi D \sin\Theta}{\lambda}\right)}$$

darstellen.

Nun ist $n_1 D = n$ die Gesamtzahl der emittierenden Quellen oder Antennen und $n a$ danach die Amplitude, die bei einer Anordnung aller dieser Quellen in einem einzigen Punkt, dem Ursprung, gleichförmig in den Raum ausgestrahlt würde.

Folglich haben wir, ausgehend von nicht gerichteten Quellen mit der Strahlung $a \sin \omega t$, eine gerichtete Strahlung gefunden, deren *Strahlungsdiagramm* durch den Ausdruck

$$\varrho(\Theta) = \frac{\sin\left(\frac{\pi D \sin\Theta}{\lambda}\right)}{\left(\frac{\pi D \sin\Theta}{\lambda}\right)} \tag{1}$$

bestimmt wird.

Dieser Effekt beruht auf den Interferenzen, die die Strahlung in den Richtungen schwächen, in denen die verschiedenen Antennen nicht alle in gleicher Phase strahlen.

Man muß dabei bedenken, daß diese Rechnung, die auf Gl. (1) führt, immer eine *Extrapolation* enthält: Es wird angenommen, daß man eine diskrete Folge von n Antennen auf der Strecke D durch eine kontinuierliche Verteilung der Antennen über alle Elemente dx ersetzen kann. Dies gilt jedoch nur dann, wenn zwei benachbarte Antennen in der Richtung Θ keine gegenüber 2π beträchtliche Phasendifferenz erzeugen können. Es muß also $\frac{2\pi s}{\lambda} \sin\Theta \ll 2\pi$ gelten, d.h., für $\sin\Theta = 1$ muß $s \ll \lambda$ sein. Im folgenden wollen wir daher annehmen, daß auf eine Wellen-

länge viele Antennen oder im Grenzfall wenigstens eine oder zwei entfallen. Ist diese Bedingung nicht erfüllt, so kann das Integral von $-D/2$ bis $+D/2$ durch eine Summe von Sinusausdrücken dargestellt werden. Dies erreicht man durch die FRESNELsche Regel.

Untersuchen wir jetzt das Strahlungsdiagramm $\varrho(\Theta)$. Die Kurve der Gleichung $y = \frac{\sin x}{x}$ hat den in Abb. 605 angegebenen Verlauf und besitzt ein Maximum mit dem Wert 1 für $x = 0$ und ist 0 für $x = \pi, 2\pi, 3\pi, \ldots$. Für x in der Nähe von $\frac{3\pi}{2}$; $\frac{5\pi}{2}$ ergeben sich Nebenmaxima und -minima, deren Absolutwert $1/x$ beträgt.

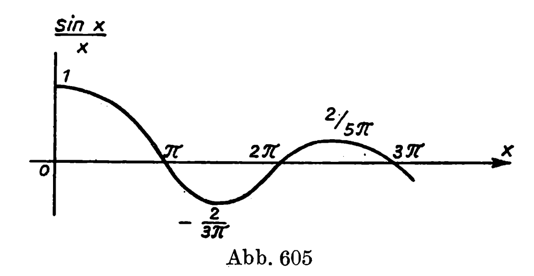


Abb. 605

In unserem Fall ist $x = \frac{\pi D \sin \Theta}{\lambda}$. Nehmen wir jetzt $D \gg \lambda$ an, so finden wir ein Strahlungsmaximum für $\Theta = 0$, dann ein Minimum (keine Strahlung) für $\sin \Theta = \frac{\lambda}{D}$, dann wieder ein Nebenmaximum, dann wieder keine Strahlung für $\sin \Theta = \frac{2\lambda}{D}$ usf.

In *Polarkoordinaten* kann man das Strahlungsdiagramm $\varrho(\Theta)$ leicht darstellen, da die Maxima und die Nullstellen bekannt sind. Die Abb. 606 entspricht der An-

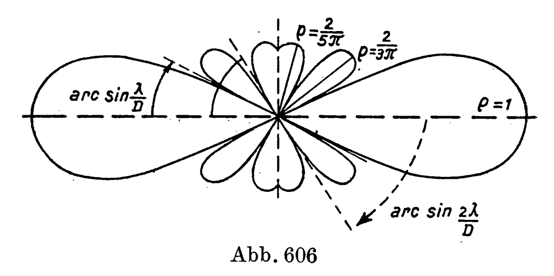


Abb. 606

nahme, daß zwischen $\Theta = 0$ und $\Theta = \frac{\pi}{2}$ zwei Nullstellen existieren und eine dritte nicht mehr erreicht wird. Dies bedeutet, daß $\frac{2\lambda}{D} < 1$ und $\frac{3\lambda}{D}$ etwas größer als 1 ist. Es handelt sich also um ein Strahlungsdiagramm in Phase schwingender Antennen, die in einem Intervall etwas kleiner als 3 Wellenlängen liegen. Man sieht, daß der

größte Teil der Strahlung in der ersten Schleife konzentriert ist und diese einen Winkel α besitzt, der durch die Forderung $\sin\alpha = \frac{\lambda}{D}$[1]) bestimmt ist. Dies ist das erwartete Resultat.

Die Anwendung von *Richtantennen* ist von großer Bedeutung: Will man z. B. in einer bevorzugten Richtung senden oder empfangen (Deutschland-Brasilien oder Frankreich-Japan), so ordnet man eine Reihe von mit stehenden Wellen schwingenden (z. B. abgestimmte Dipole) und in Phase gespeisten Antennen derart an, daß die Richtung dieses Antennenvorhanges senkrecht zu der gewünschten Ausbreitungsrichtung steht. Bei der Ausstrahlung wird man mit einer maximalen Leistung in dieser Richtung arbeiten, beim Empfang erhält man in diesem Fall eine maximale Empfindlichkeit. Trifft dagegen eine Störung aus der Richtung des ersten Nebenmaximums mit gleicher Amplitude auf diese Antennenanordnung, so wird die an den Empfänger weitergeleitete Spannung um den Faktor $\frac{3\pi}{2}$ kleiner sein. Wir verstehen also jetzt, wie durch die Richtwirkung eine Verbesserung des Verhältnisses $\frac{\text{Signal}}{\text{Störung}}$ hervorgerufen werden kann.

Kann man nun die Bedeutung der Nebenschleifen des Strahlungsdiagrammes verringern? Diese Frage muß verneint werden, wenn man nicht auf eine gleichmäßige Verteilung der Antennen im Schirm verzichten kann. Verändert man jedoch die Anordnung der Antennen im Schirm oder speist verschiedene Antennen mit verschiedenen Strömen, so ist dies durchaus möglich. Konzentriert man die Antennen in der Mitte des Vorhanges und verringert entsprechend ihre Anzahl an den Enden, so kann man erreichen, daß das erste Nebenmaximum verschwindet. Die Berechnung dieses Effektes ist einfach. Den gleichen Zweck erreicht man durch die Anordnung mehrerer paralleler Antennenwände. Die Entfernungen zwischen diesen Wänden sind jeweils zu berechnen.

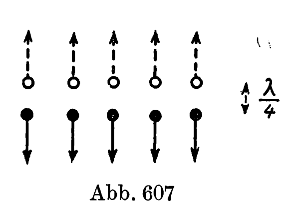


Abb. 607

Uns interessiert nun, ob die Energie nur in eine der beiden zur Schirmebene senkrechten Richtungen ausgesandt werden kann. Bei Verwendung eines *Reflektors* (Abb. 607) ist dies durchaus möglich. Dazu bringen wir in der Entfernung von etwa $\frac{\lambda}{4}$ hinter jedem strahlenden Dipol (untere Reihe) einen parallelen nicht gespeisten Dipol (obere Reihe) an. Diese Dipole werden durch das von der gespeisten Antenne erzeugte Strahlungsfeld angeregt und mit einer Phasenverschiebung $\frac{2\pi\lambda}{4\lambda} = \frac{\pi}{2}$ von einem Strom in *entgegengesetzter* Richtung (LENZsche Regel) durchflossen und strahlen ebenfalls. In Richtung der wirksamen Antennen besitzt dieses von den hinteren Antennen ausgestrahlte Feld eine Phasenverschiebung von

---

[1]) Trotz einer kleinen Unvollkommenheit der in Abb. 606 angegebenen Abbildung besitzt das Diagramm im Punkt $\Theta = \frac{\pi}{2}$ keine Spitze, stellt jedoch immer ein Maximum oder ein Minimum dar.

$\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} + \pi = 2\pi$ gegenüber der Strahlung der vorderen Antennen. Beide Strahlungen sind also *in Phase* mit ihm, und die resultierende Strahlung in Richtung der ausgezogenen Pfeile wird praktisch verdoppelt. Dagegen ist in der entgegengesetzten Richtung die durch die Ausbreitung verursachte Phasendifferenz $\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{2} = 0$. Es tritt also die durch die Stromumkehrung am Reflektor hervorgerufene Phasendifferenz π auf, und die von der wirkenden Antenne ausgesandte Strahlung wird durch die Strahlung des Reflektors aufgehoben.

Unsere bisherigen Betrachtungen bezogen sich auf kurze Wellenlängen (siehe weiter unten „Die Ausbreitung") von etwa 10–40 m. Dadurch sind die Größenordnungen und die praktischen Ausbreitungsmöglichkeiten festgelegt.

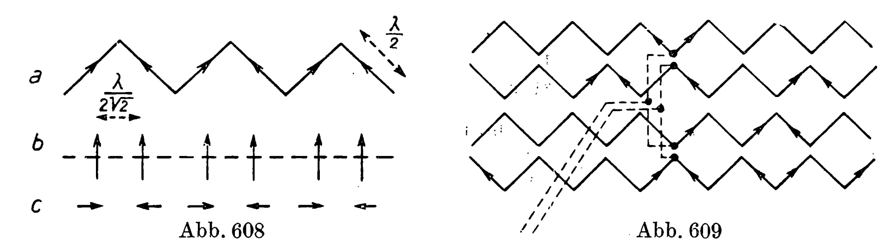


Abb. 608 Abb. 609

Wir wenden uns nun den in der Praxis üblichen Antennenanordnungen, deren es mehrere gibt, zu. Als besonders elegant gilt die 1925 von CHIREIX-MESNY entwickelte. Dabei wird der Draht, wie es in Abb. 608 gezeigt ist, jeweils nach Abschnitten der Länge $\frac{\lambda}{2}$ um einen Winkel von 90° abgebogen. Auf dem Draht werden nun stehende Wellen mit der Wellenlänge λ erzeugt. Nach den Gesetzmäßigkeiten stehender Wellen verändert sich die Amplitude der Wellen mit der Entfernung x vom Ursprung (x wird längs des Drahtes gemessen) mit $\sin\frac{2\pi x}{\lambda}$. Jeweils in der Entfernung $\frac{\lambda}{2}$ verändert sie also ihr Vorzeichen. Diese Entfernung entspricht aber gerade der Länge eines Drahtabschnittes, so daß wir sagen können: Die Ströme verändern ihre Richtung *in einem gegebenen Augenblick* von einem Drahtabschnitt zum anderen. Die Stromvektoren $\mathfrak{i}$ rufen in jedem Drahtabschnitt Vektorpotentiale und entsprechende Felder im Raum hervor. Zerlegen wir nun $\mathfrak{i}$ in eine Vertikal- und eine Horizontalkomponente, so sehen wir, daß sich alle Horizontalkomponenten gegenseitig aufheben, die Vertikalkomponenten dagegen addieren. Sie entsprechen also der gleichen Anzahl in Phase gespeister Vertikalantennen, und es kann ein Richtdiagramm aufgenommen werden.[1])

In Abb. 609 ist eine Anordnung aus 12 solcher Antennenquadrate dargestellt. Die Zuführung ist gestrichelt eingezeichnet. Man erhält also eine Emission mit

[1]) Tatsächlich stimmen die Horizontalkomponenten im Raum, obgleich je zwei einander entgegengesetzt sind, nicht überein, und wir erhalten ein horizontalpolarisiertes Strahlungsdiagramm. Dies ist jedoch ohne Bedeutung, da, wie wir sehen werden, die Absorption durch die Erde die weitere Ausbreitung verhindert.

vertikaler Polarisation, deren Energie man sich angenähert in einem Strahl konzentriert denken kann, dessen Horizontalwinkel 2α durch die Bedingung $\sin\alpha = \frac{\lambda}{D_1}$ und dessen Vertikalwinkel 2β durch $\sin\beta = \frac{\lambda}{D_2}$ bestimmt sind. D_1 ist dabei die Länge und D_2 die Höhe der Antennenanordnung. Es gilt nun

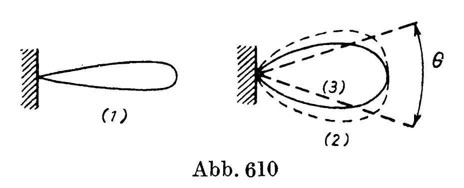


Abb. 610

$$D_1 = 12\,\frac{\lambda}{2}\,\frac{1}{\sqrt{2}}$$

und

$$D_2 = 3\,\frac{\lambda}{2}\,\frac{1}{\sqrt{2}},$$

d. h., es gibt eine horizontale Richtwirkung der Form (*1*) und eine vertikale der Form (*2*) (Abb. 610). Die letztere ist in der Praxis etwas günstiger, da das Strahlungsdiagramm jeder Vertikalantenne zeigt, daß in Richtung $\Theta = \frac{\pi}{2}$ keine Energie ausgestrahlt wird. Wir erhalten also die gegenüber der Kurve (*2*) verbesserte Kurve (*3*).

Die im sechsten Abschnitt Kapitel IV angegebene Methode gestattet mühelos die Abschätzung des Strahlungswiderstandes von Richtantennen.

Antennen mit fortschreitenden Wellen

Völlig von den eben betrachteten Anordnungen verschiedene benutzt man, wenn an Stelle stehender Wellen *fortschreitende* verwendet werden. Ein über der Erde ausgespannter Draht wird mit einem Generator verbunden und über einen Widerstand R, der gleich seinem iterativen Scheinwiderstand $\sqrt{\frac{L}{C}}$ (L und C bedeuten Selbstinduktion und Kapazität pro Längeneinheit) (Abb. 611 a) geerdet. Von dem Generator geht ein Strom $E = R i_0$ aus, der sich ausbreitet und in der Entfernung x den Wert

$$i(t,\,x) = i_0\left(t - \frac{x}{c}\right)$$

d.h.

$$i = \frac{E}{R}\sin\left(\omega t - \frac{2\pi x}{\lambda}\right)$$

besitzt.

Mit Hilfe der Methode der retardierten Vektorpotentiale (siehe Seite 476) kann man nun das Strahlungsfeld in der mit dem Draht den Winkel Θ bildenden Richtung berechnen. Dabei stellt man fest, daß die Strahlung sehr stark von Θ abhängt, d. h., die Antenne zeigt eine Richtwirkung. Diese resultiert aus den Interferenzen der Elementarstrahlung der verschiedenen Drahtelemente, und das Dia-

gramm besitzt die in Abb. 611b gezeigte Neigung. Diese Neigung beruht auf der Tatsache, daß die Ausbreitung auf dem Draht, besonders wegen der Dämpfung, eine *geringere* Geschwindigkeit als im freien Raum aufweist.

Seit einigen Jahren verwendet man auch Antennenanordnungen in Rautenform, wie dies in Abb. 612 gezeigt wird. Die Drahtabschnitte besitzen dabei eine Länge von 5 oder 6 λ. Der Vorteil dieser Anordnung ist eine Erweiterung der Richt-

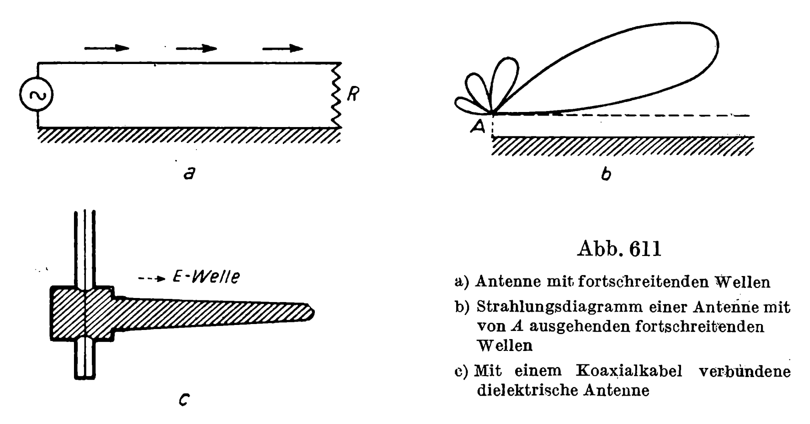


Abb. 611

a) Antenne mit fortschreitenden Wellen
b) Strahlungsdiagramm einer Antenne mit von A ausgehenden fortschreitenden Wellen
c) Mit einem Koaxialkabel verbundene dielektrische Antenne

wirkung über einen bestimmten Frequenzbereich. Dagegen ist bei Antennen mit stehenden Wellen eine genaue Abstimmung der Größe und der Entfernungen der Drahtabschnitte in bezug auf die Wellenlänge erforderlich.

Man kann ohne weiteres mehrere dieser Antennenrauten miteinander verbinden, indem man Spitze mit Spitze verbindet. Es muß nur darauf geachtet werden,

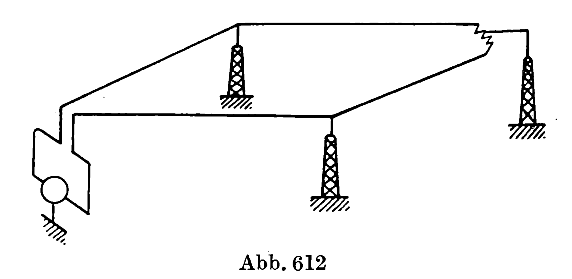


Abb. 612

daß alle über einen ihrem iterativen Scheinwiderstand gleichen Widerstand geschlossen sind.

Für große Wellenlängen (10000 m) hat man Antennen mit fortschreitenden Wellen in Form eines mehrere km langen Drahtes, der an Masten befestigt ist, benutzt. Die Rautenantennen dagegen verwendet man bei kurzen Wellen (10–50 m). Der gute Wirkungsgrad dieser Antennen beruht darauf, daß man die Energie unter einem für Reflexion günstigen Winkel gegen die Heaviside-Schicht sendet.

Dielektrische Antennen für Zentimeterwellen

In dem Kapitel über Hohlleiter haben wir die Ausbreitung der Strahlung in einem zylindrischen Leiter mit metallischen Wänden betrachtet. Ebenso kann man natürlich die Ausbreitung in einem dielektrischen Hohlleiter ohne metallische Wände untersuchen, der einfach durch eine gegenüber der des Vakuums große Dielektrizitätskonstante ε charakterisiert wird. In einem solchen Fall wirkt jedoch einer Abstrahlung des Hohlleiters nichts entgegen. Die Ausbreitungsgeschwindigkeit wird im Dielektrikum im Verhältnis $\frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}$ verringert; Wir haben also wieder eine Antenne mit fortschreitenden Wellen und finden ein Strahlungsdiagramm, das wie in Abb. 611b geneigt ist. Auf diese Weise kann man wirksame Antennen für Zentimeterwellen herstellen. Diese Antennen haben eine Form, wie sie in Abb. 611c dargestellt ist, und werden mit einem Stromkreis oder mit einem Hohlleiter durch ein metallisches Zwischenstück verbunden. In der Abbildung handelt es sich um ein Koaxialkabel. Die in der Antenne auftretende Welle entspricht der im Kapitel über die Hohlleiter durch den Typ E charakterisierten Welle.

Rahmenantenne

In Teil VI, Kapitel III, haben wir kurz einen Rahmen vom Gesichtspunkt des Strahlungswiderstandes betrachtet. Es wird interessant sein, diese Betrachtung jetzt durch ein Strahlungsdiagramm zu ergänzen (Abb. 613). Wir bringen einen solchen Rahmen in vertikaler Lage an und nehmen an, daß beim Fließen eines Stromes dieser Rahmen abstrahlt. Die beiden vertikalen Abschnitte V_1 und V_2 werden dabei von Strömen in entgegengesetzter Richtung durchflossen. Es ist klar, daß deren Feld in Richtung n in großer Entfernung Null ist (die beiden Felder von V_1 und V_2 heben sich auf), während das Feld in Richtung Θ wegen der Wegunterschiede der von V_1 und V_2 ausgehenden Strahlen eine Phasendifferenz aufweist. Zerlegen wir die beiden Felder, so erhalten wir das in der Abb. 613 gezeigte Strahlungsdiagramm, das aus zwei sich berührenden Kreisen mit einer Nullstelle auf der Normalen des Rahmens besteht.

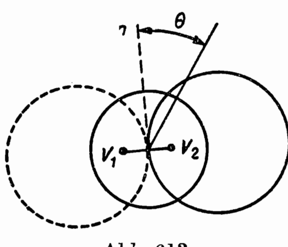


Abb. 613

Beim Empfang induziert das einfallende Feld in V_1 und V_2 elektromotorische Kräfte, die sich gegenseitig aufheben, da, wie wir gesehen haben, ihre Phase identisch, die Richtungen jedoch entgegengesetzt sind, wenn der Sender sich in der Richtung n befindet. Es bleibt dann nur ein Signal durch die Phasendifferenz, die auf der Wegdifferenz in allen anderen Richtungen beruht.

Ein als Empfängerantenne verwendeter Rahmen kann also zur Unterdrückung eines senkrecht zu seiner Ebene eintreffenden Signals benutzt werden. Verwendet man jetzt einen um seine Achse drehbaren Rahmen, so kann man die Richtung des Senders durch Beobachtung der Signalstärke feststellen. Darauf beruht das Prinzip der *Radiogoniometrie*. Mit Hilfe zweier an verschiedenen Orten angebrachten derartigen Peilgeräten kann man den genauen Ort eines Senders als den Schnitt-

punkt der beiden von den Peilgeräten gefundenen Richtungen angeben. Arbeitet man mit nur einem Peilgerät, so kann man nicht sagen, ob sich der Sender auf der einen oder anderen Seite des Rahmens befindet. Dieser Nachteil kann jedoch durch die folgende Methode vermieden werden.

Wir wissen, daß die beiden Schleifen im Strahlungsdiagramm des Rahmens Feldern mit entgegengesetztem Sinn entsprechen. In einem gegebenen Zeitpunkt werden die Elektronen in der rechten Hälfte des Rahmens nach oben, die Elektronen in der linken Hälfte nach unten fließen. Diese Richtungen kehren sich nach jeder Halbperiode um. Wenn wir mit $2d$ den Abstand zwischen V_1 und V_2 bezeichnen, hat das Feld tatsächlich den Wert

$$a \sin\left(\omega t - \frac{2\pi d \sin\Theta}{\lambda}\right) - a \sin\left(\omega t + \frac{2\pi d \sin\Theta}{\lambda}\right),$$

und die Amplitude ist gegeben zu

$$2a \sin\left(\frac{2\pi d \sin\Theta}{\lambda}\right).$$

Man sieht also, daß diese Amplitude ihr Vorzeichen mit $\sin\Theta$ verändert.

Wir bringen nun zusätzlich eine kleine Antenne an. Diese wird so mit dem Empfänger gekoppelt, daß sie durch Vertauschung beider Drähte sowohl mit der linken als auch mit der rechten Hälfte wahlweise in Phase gebracht werden kann. Hat man im ersteren Fall einen stärkeren Empfang, so liegt der gesuchte Sender links von der Anordnung. Man kann also feststellen, in welche Richtung der Rahmen gedreht werden muß, damit sein Empfang Null wird (verzweigte Antenne). Die Richtung des Senders kann also *eindeutig* bestimmt werden.

Außer seiner Verwendung in der Radiogoniometrie wird der drehbare Rahmen auch zur Dämpfung eines starken von einem benachbarten Sender herrührenden Signals benutzt. Dies erweist sich beim Empfang weiter entfernt gelegener schwacher Sender als vorteilhaft.

Eine Bemerkung über Richtflächen

Kennt man das Strahlungsdiagramm einer Richtfläche, so kann man die Verteilung der Strahlungsquellen auf ihr bestimmen.

Eine Quelle mit der Amplitude $A(x)\,dx$ im Punkt x strahlt in Richtung Θ ein Feld der Form

$$d\,e_{r,\Theta} = A(x)\, e^{j\left(\omega t + \frac{2\pi x \sin\Theta}{\lambda}\right)}\, dx$$

aus.

Integriert man diesen Ausdruck über x, so erhält man

$$e_\Theta = e^{j\omega t} \int_0^a A(x)\, e^{j\frac{2\pi x \sin\Theta}{\lambda}}\, dx.$$

Dieses Integral über x kann man auch, da $A(x)$ nur im Bereich $x = 0$ bis $x = a$ ungleich Null ist, angeben zu

$$e^{j\omega t} \int_{-\infty}^{+\infty} A(x)\, e^{j\frac{2\pi x \sin\Theta}{\lambda}}\, dx\,.$$

Das Polardiagramm in Richtung Θ lautet also

$$\varrho(\Theta) = E\left(\frac{\sin\Theta}{\lambda}\right) = \int_{-\infty}^{+\infty} A(x)\, e^{j\frac{2\pi x \sin\Theta}{\lambda}}\, dx\,.$$

Nun ist jedoch *die Fourier-Transformation reversibel,* und man findet

$$A(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} E\left(\frac{\sin\Theta}{\lambda}\right) e^{j\frac{2\pi x \sin\Theta}{\lambda}}\, d\left(\frac{\sin\Theta}{\lambda}\right).$$

Daraus kann man folgendes schließen: *Liefert eine Quellenverteilung* $A(x)$ *ein Diagramm* $E\left(\frac{\sin\Theta}{\lambda}\right)$, *so liefert die Verteilung* $E(x)$ *gerade das Diagramm* $A\left(\frac{\sin\Theta}{\lambda}\right)$ (reziproke Korrespondenz).

Dieses in der Radioelektrizität bekannte Theorem wurde auch in der Optik gefunden und dort benutzt, um Beugungen zu eliminieren und höhere Auflösung zu erhalten. So kann z. B. das Beugungsbild eines Spaltes in einem Spektrographen vermieden werden, wenn man diesen Spalt durch eine Maske ersetzt, die nach einem bestimmten Gesetz mehr oder weniger Licht hindurchläßt, während man sich vom Zentrum entfernt (P. Jacquinot).

VII. KAPITEL

Radioelektrische Ausbreitung

Den klassischen Experimenten von Branly (1895 Übertragung auf 20 m Entfernung) folgten erfolgreichere Versuche von Marconi, bei denen eine Übertragung auf 2 km Entfernung, dann über 10 km und schließlich über den Ärmelkanal bei Calais (36 km) gelang. Bei diesen letzten, 1897 durchgeführten Versuchen arbeitete Marconi bereits mit einer Reihe von Verbesserungen, z. B. verwandte er bereits Antennen, jedoch noch keine Verstärker. Marconi regte die Gründung einer finanziell leistungsfähigen Gesellschaft an und ließ die leistungsfähigsten Hochfrequenz-Funkenstrecken bauen (man verwendete gedämpfte Schwingungen), die zu jener Zeit möglich waren. Die Berechnung des Feldes in großer Entfernung bei der Annahme der Wellenausbreitung im freien Raum führten ihn jedoch nicht zu der gewünschten Sendung quer über den Atlantischen Ozean.

Später gelang dieser Versuch jedoch. Die Ursachen wurden von Kennelly und Heaviside untersucht, und sie entdeckten, daß ein unbekanntes Phänomen die

bei der Emission in den Äther gesandte Leistung auf der Oberfläche der Erde konzentriert. Dabei handelt es sich um eine Reflexion der Wellen an einer leitenden Schicht in der oberen Atmosphäre, wobei letztere wie ein großer metallischer Spiegel wirkt und die Strahlung zur Erde reflektiert.

Kennelly-Heaviside-Schicht

Dieses leitende Gebiet besteht aus mehreren Schichten freier Elektronen, die von der Ionisation der Luftmoleküle durch das (ultraviolette) Sonnenlicht oder durch von der Sonne ausgehende Teilchen herrühren. Diese Schichten liegen je nach den Umständen (Sonnenaktivität, Jahreszeit, Tageszeit usw.) in Höhen von 80-300 km und mehr über der Erde. Mit dem Symbol H bezeichnen wir die gesamte Kennelly-Heaviside-Schicht.

Wir wollen nun die Ausbreitung in einem Medium mit N freien Elektronen pro Kubikzentimeter untersuchen. Eine einfallende Welle besitzt das entlang Oz polarisierte elektrische Feld $E = E_0 \sin \omega t$. Die Elektronen führen dann nach dem Gesetz

$$m \frac{d^2 z}{d t^2} = e E_0 \sin \omega t \tag{1}$$

Schwingungen aus.

Vernachlässigen wir die Stöße der Elektronen mit den Molekülen, so daß die Bewegung unter dem Einfluß des elektrischen Feldes nur durch die Trägheitskraft bestimmt wird, dann hat die Verschiebung dieser Elektronen den Wert

$$z = -\frac{e E_0}{m \omega^2} \sin \omega t .$$

Jedes Elektron strahlt also wie ein Dublett, dessen eine Ladung e unbeweglich[1]), die andere von dieser um z entfernt ist. Wir können dem Dublett also ein elektrisches Moment zuschreiben, das wir αE nennen und gegeben ist zu

$$\alpha E = e z = -\frac{e^2 E_0}{m \omega^2} \sin \omega t .$$

Der *Polarisationsvektor* (siehe: Elektrostatik) pro Volumeneinheit hat also den Wert

$$\mathfrak{P} = N \alpha \mathfrak{E} .$$

Betrachten wir jetzt die Dielektrizitätskonstante ε, die durch die Beziehung

$$\mathfrak{D} = \varepsilon \mathfrak{E} = \mathfrak{E} + 4 \pi \mathfrak{P}$$

---

[1]) In der Ionosphäre ist neben den Elektronen die gleiche Anzahl positiver Ionen enthalten. Wegen ihrer Schwere werden diese Ionen an der Strahlung kaum teilnehmen und spielen *im Mittel* die Rolle der genannten unbeweglichen Ladungen.

mit der Polarisation verbunden ist, so finden wir

$$\varepsilon = 1 + 4\pi N \alpha = 1 - \frac{4\pi N e^2}{m\omega^2}.$$

Sowohl die *Dielektrizitätskonstante* ε als auch der *Brechungsindex* n (da $\varepsilon = n^2$) sind ähnlich wie in dünnen metallischen Schichten kleiner als 1. Es ist also durchaus verständlich, daß an der Elektronenschicht eine beträchtliche metallische Reflexion der Wellen auftritt.

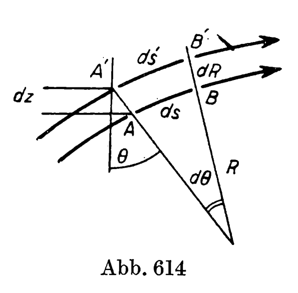


Abb. 614

Dieses Phänomen wollen wir nun genauer untersuchen. In geringen Höhen ist die Anzahl der Elektronen N eine mit der Höhe anwachsende Größe. *Der Wert* $1 - \frac{4\pi N e^2}{m\,\omega^2}$ *verringert sich also mit zunehmender Höhe.* Daraus ergibt sich eine Krümmung der von der Erde ausgehenden elektromagnetischen Wellen, die durch eine starke *Spiegelung* gegen die Erde zurückgeworfen werden.

Wir betrachten nun (Abb. 614) zwei Strahlen (*1*) und (*2*), die in der Höhe z unter dem Winkel Θ auftreffen. Die Ebene der Welle ist AA'. Um von A nach B zu gelangen, benötigt der Strahl (*1*) die Zeit $\frac{ds}{c(z)}$, wobei $c(z)$ die Lichtgeschwindigkeit in der Höhe z und ds der Bogen AB mit dem Wert $R\,d\Theta$ ist. R ist der Krümmungsradius der Bahn. Der Strahl (*2*) dagegen benötigt, um von A' nach B' zu gelangen, die Zeit $\frac{ds'}{c(z+dz)}$; ds' ist dabei der Bogen $A'B'$ und hat den Wert $(R + AA')\,d\Theta$, d.h.

$$\left(R + \frac{dz}{\cos\Theta}\right) d\Theta.$$

Wenn nun BB' eine neue Wellenebene ist, die senkrecht zu den beiden Strahlen (nach dem Satz von Malus) steht, so müssen die beiden Zeiten einander gleich sein, d.h.

$$\frac{ds}{c(z)} = \frac{ds'}{c(z+dz)}$$

beziehungsweise

$$\frac{ds'}{ds} = \frac{c(z+dz)}{c(z)}$$

oder

$$1 + \frac{dz}{R\cos\Theta} = 1 + \frac{1}{c}\frac{\partial c}{\partial z}\,dz$$

und schließlich

$$\frac{1}{R\cos\Theta} = \frac{1}{c}\frac{\partial c}{\partial z}.$$

Da die Lichtgeschwindigkeit durch $c = \frac{c_0}{\sqrt{n}}$ bestimmt ist, wobei n den Brechungsindex und c_0 die Lichtgeschwindigkeit im Vakuum bedeuten, gilt

$$\frac{1}{R} = -\frac{\cos\Theta}{2n}\,\frac{\partial n}{\partial z} = -\frac{\cos\Theta}{n^2}\,\frac{\partial n^2}{\partial z} \approx \frac{\cos\Theta}{1}\,\frac{4\pi e^2}{m\omega^2}\,\frac{\partial N}{\partial z}.$$

Diese Gleichung beschreibt die Krümmung der Bahnen. Sie verändert sich mit $\frac{\partial N}{\partial z}$, die Geschwindigkeit dieser Veränderung hängt jedoch von dem Faktor $\frac{1}{\omega^2}$ ab. Das Verhalten langer Wellen (ω klein, $\lambda = 1000$ m und mehr) wird vom Verhalten der Mittelwellen (λ von 200 bis 1000 m), dem der Kurzwellen (λ von 10 bis 100 m) und dem der Ultrakurzwellen ($\lambda < 10$ m) verschieden sein.

1. *Bei Langwellen* $\left(f = \frac{\omega}{2\pi} < 300000 \text{ Hz}\right)$ ist die Krümmung sehr ausgeprägt, sobald irgendwelche Elektronen vorhanden sind. Man erhält unabhängig von der Jahreszeit, der Tageszeit und der Neigung der Wellen gegenüber der Schicht immer eine Totalreflexion. Bei ihrem Weg vom Sender E zum Empfänger R erleiden die sich regulär ausbreitenden Wellen eine oder mehrere Reflexionen (Abb. 615). Die Amplitude der nahezu verlustlosen Energieausbreitung im zweidimensionalen Raum zwischen Erde und reflektierender Schicht verringert sich nicht mehr mit $1/r$, sondern nur noch mit $\frac{1}{\sqrt{r}}$. Tatsächlich muß der mit der Zylinderfläche $2\pi rh$ multiplizierte POYNTINGsche Vektor $\frac{cEH}{4\pi}$, unabhängig vom Radius, die konstante ausgestrahlte Leistung darstellen. Mit $H = E$ gilt also

$$\frac{cE^2}{4\pi} = \frac{\text{const}}{2\pi rh},$$

und daraus folgt

$$E \approx \frac{A}{\sqrt{r}}.$$

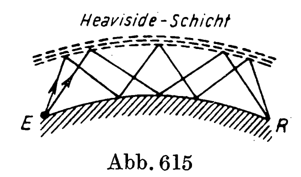


Abb. 615

Das Feld verringert sich also langsamer als im freien Raum, und so erklärt sich die große Reichweite bei Radioübertragungen und besonders die, die MARCONI bei seinen Versuchen erreichte.

2. *Für Mittelwellen* (von $3 \cdot 10^5$ bis $1{,}5 \cdot 10^6$ Hz) zeigen die Bahnen eine geringere Krümmung. Die Wellen dringen tiefer in die HEAVISIDE-Schicht ein, bevor sie auf die Erde zurückgeworfen werden. Gegenüber langen Wellen wird das Verhalten der Mittelwellen durch Veränderungen in der Schicht stärker beeinflußt. Tagsüber ist diese Schicht wegen der fortwährenden Veränderung der Sonnenhöhe und der veränderlichen Intensität ihrer Strahlung in ständiger Bewegung und Umwandlung begriffen. Nachts gleichen sich diese Veränderungen aus, und die Elektronen, die ihnen unterliegen, werden sich in gleichmäßigeren Schichten anordnen. Im Mittel werden die Reflexionen nachts besser und die Höhe wird größer sein. Die Wellenausbreitung ist also nachts besser als am Tage.

3. Auf eine Reihe von *weniger wichtigen Phänomenen* sind wir bisher nicht eingegangen. Dazu gehören die Stöße der freien Elektronen mit den Molekülen der oberen Atmosphäre, die zu einer Bremsung ihrer Bewegung führen. An Stelle der Gl. (1) findet man die einen zusätzlichen Reibungsterm enthaltende Formel

$$m \frac{d^2 z}{d t^2} + f \frac{d z}{d t} = e E = e E_0 \sin \omega t .$$

Integriert man diese, so zeigt sich, daß z nicht mehr mit E in Phase ist. Die Polarisation P pro Volumeneinheit bleibt also gegenüber dem Feld E in der Phase zurück. Wir führen nun die Rechnung in imaginärer Schreibweise ($E = E_0 e^{j \omega t}$, usw.) weiter, wobei wir eine imaginäre Dielektrizitätskonstante annehmen von der Form

$$\varepsilon = 1 + \frac{4 \pi N e^2}{j f \omega - m \omega^2} .$$

Integrieren wir die Ausbreitungsgleichung mit einer solchen Dielektrizitätskonstante, so finden wir, daß ihr Imaginärteil auf einen Absorptionskoeffizienten führt. (Dieser ist tatsächlich notwendig, um nachweisen zu können, daß die beim Stoß auftretende Energie von der Welle herrührt.)

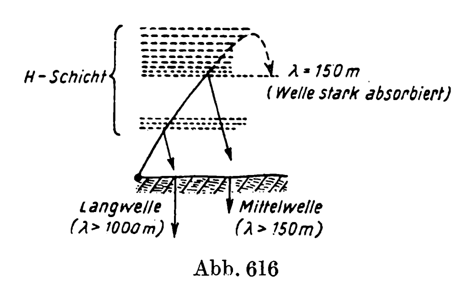


Abb. 616

Ein weiterer, bei unserer bisherigen Betrachtung vernachlässigter Effekt besteht darin, daß die einmal durch das Feld $E_0 \sin \omega t$ in Bewegung gesetzten Elektronen durch das magnetische Erdfeld eine laterale Ablenkung erfahren (dieses Erdfeld wird zum Teil wenigstens gerade von den Zirkulationsströmen dieser Elektronen selbst aufgebaut). Wir wollen diesen Effekt nicht weiter behandeln und beschränken uns auf die Bemerkung, daß die von den Stößen verursachte Absorption durch einen Pseudo-Resonanzeffekt im Bereich der Wellenlängen zwischen 100 und 200 m sehr verstärkt wird. Wellen dieser Wellenlänge breiten sich am schlechtesten aus.

4. *Bei Kurzwellen* zwischen 10 und etwa 80 m (30 bis 3,7 MHz) haben wir ein anderes Bild. In der Schicht H sind nicht mehr genügend Elektronen vorhanden, um alle Strahlen zur Erde hin abzubiegen. Die Strahlen, die nur eine geringe Neigung gegenüber der Normalen besitzen, kehren nicht zur Erde zurück. Strahlen, die sehr schräg auf die Schicht treffen, können natürlich nicht innerhalb eines bestimmten Radius R, der die sogenannte *tote Zone* definiert, reflektiert werden (Abb. 617). Diese tote Zone ist Null für $\lambda = 80$ m, wobei jedoch dieser Wert von den gegebenen Verhältnissen (Tag, Nacht, Jahreszeit usw.) abhängt, und wird mit abnehmendem λ größer. Sie beträgt für $\lambda = 20$ m etwa 2000 km und erreicht für $\lambda = 12$ bis 15 m eine Breite von 5000 bis 6000 km. Für $\lambda = 10$ m werden selbst die Strahlen nicht mehr reflektiert, die horizontal emittiert werden.

Jenseits der *toten Zone* stellen wir einen durch ***Fokussierung beträchtlich verstärkten*** Empfang fest (siehe die Lehrbücher der Optik), und es können mit geringen Leistungen sehr beträchtliche Reichweiten erzielt werden. *So hat man eine Verbindung mit Australien und über den Atlantischen Ozean mit nur wenigen Watt herstellen können*, wobei allerdings sehr unstabile Bedingungen herrschten.

5. *Ultrakurzwellen* ($\lambda < 10$ m) werden von der oberen Atmosphäre im allgemeinen nicht reflektiert, und man hat es nur mit der direkten Ausbreitung des Feldes zu tun. Sender und Empfänger müssen also stets in Sichtweite angeordnet sein, damit eine Übertragung möglich ist. In der Praxis erhält man eine geringe Vergrößerung der Reichweite durch die Beugung der Strahlen an der Erdoberfläche.

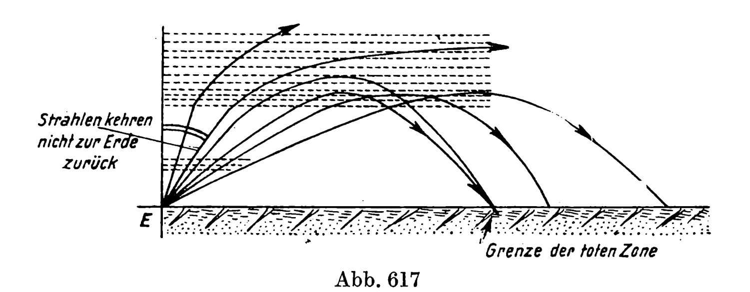


Abb. 617

Die von uns angegebenen Ausbreitungsverhältnisse sind stark schematisiert, da wir die in der oberen Atmosphäre ständig veränderlichen Bedingungen nicht berücksichtigt haben. Im Bereich von Ultrakurzwellen über $\lambda = 5$ m gelingt bisweilen eine Übertragung über den Atlantik. Im Verlauf eines Zeitraums von 11 Jahren verändert sich die Ausstrahlung der Sonne, und die Grenze der Kurzwellen sowie die toten Zonen verschieben sich so, daß in bestimmten Zeiträumen die kurzen Wellen besser und in anderen schlechter übertragen werden.

In einem betrachteten Zeitpunkt befindet sich die Heaviside-Schicht in Bewegung (sie hebt oder senkt sich). Dadurch wird die den Empfänger erreichende Welle mit dieser Bewegung moduliert, und die Frequenz im Empfänger stimmt nicht mehr genau mit der im Sender überein. Treffen andererseits die Wellen auf mehreren verschiedenen Wegen ein, so stellt man deren Veränderung durch die beim Empfang mit mehr oder weniger definierter Periodizität auftretenden Maxima oder Minima fest. Diesen Effekt nennt man *Schwund*. Bei unbewegter Heaviside-Schicht können die elektrischen Veränderungen (Anzahl der Ionen usw.) ähnliche Effekte verursachen.

Den Schwund im Empfänger verringert man, indem man ihm eine große Empfindlichkeitsreserve gibt und die Verstärkung durch einen *Schwundausgleich* (wie er auf S. 612 bereits beschrieben wurde) automatisch so regelt, daß die Ausgangsleistung konstant ist. Man kann den Schwund auch durch Anordnung mehrerer Empfangsantennen in Entfernungen von einigen 10 bis 100 Metern verringern. Dabei wird automatisch die Antenne verwendet, die das stärkste Signal liefert. Da jedoch eine solche Anordnung sehr großen Aufwand erfordert, lohnt sie nur bei großen Sende- und Empfangsstationen. Weiterhin wird, um einen Schwund

beim Rundfunkempfang zu vermeiden, von vornherein diejenige Radiowelle, die gegen die HEAVISIDE-Schicht ausgesandt wird, auf Kosten der sich parallel zur Erdoberfläche ausbreitenden Wellen verstärkt. Dies erreicht man durch Anordnung einiger Richtantennen.

Es liegt keine Veranlassung zu der Annahme vor, daß die HEAVISIDE-Schicht gleichförmig sei. Beobachtet man z.B. an einem wolkigen Tag den Himmel, so stellt man fest, daß die Winde die Wolken gegeneinander verschieben, und man versteht sofort, daß die HEAVISIDE-Schicht aus periodischen Wolkenschichten besteht. An diesen übereinandergeschichteten Lagen nun erleiden die Wellen eine *Beugung*, die der uns aus der Optik bekannten Lichtbrechung an einem Gitter analog ist. Dadurch ergibt sich die Möglichkeit großer Energiekonzentration in bestimmten Brennpunkten (deren Lage instabil ist), und es scheint, als hätte man dieselbe Struktur wie in der Schicht E (siehe den folgenden Paragraphen). Man spricht auch von einer *sporadischen Schicht E.*

Struktur der KENNELLY-HEAVISIDE-Schicht

Die Eigenschaften der H-Schicht haben sich als vom Frequenzbereich und der Struktur der Schicht abhängig erwiesen, wobei letztere sehr kompliziert sein kann und vor allem ständig veränderlich ist, mit Tageszeit, mit Jahreszeit und außerdem in einem Rhythmus von 11 Jahren, der von der Sonne verursacht wird. Es ist jedoch inzwischen gelungen, sich ein sehr befriedigendes Bild von der Gesamtheit der stattfindenden Ereignisse zu machen. Die Untersuchung dieser Veränderungen hat sich als sehr zweckmäßig für die Wahl der bestmöglichen Frequenz bei einer Radioübertragung in einem bestimmten Augenblick erwiesen. Mit ihrer Hilfe ist es möglich, diese beste Frequenz auch für einen späteren Zeitpunkt *vorherzusagen* und so die für die entsprechende Jahres- und Tageszeit günstigste Frequenz zu wählen.

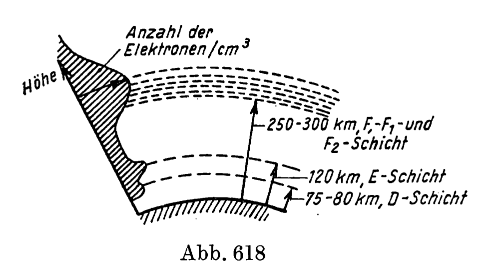


Abb. 618

Wir wollen nun kurz die bisher bekannten Erkenntnisse über die Struktur der Ionosphäre behandeln.

Sie ist in erster Linie komplex und besteht aus mehreren Schichten. In einer Höhe von 250–300 km findet man *nachts* die sogenannte F-Schicht, die sich tagsüber in zwei verschiedene Schichten F_1 und F_2 teilt. Darunter in etwa 120 km Höhe liegt die E-Schicht, die nur am Tage, und dann auch nur selten, auftritt. Schließlich liegt in der Höhe von etwa 80 km die D-Schicht, die erst in letzter Zeit entdeckt und im allgemeinen für die Absorption der Wellen maßgebend ist (Abb. 618).

Worin besteht nun die Ionisation dieser Schichten und wodurch wird sie hervorgerufen? Die in diesen Schichten existierenden Elektronen treten z.T. aus der Sonne, besonders während größerer Sonnenprotuberanzen, und bewegen sich auf Bahnen um die Kraftlinien des magnetischen Erdfeldes herum. Sie müssen dabei notwendig die Nähe der Magnetpole erreichen und können übrigens dort

als *Polarlicht* beobachtet werden, das besonders von dem Physiker Carl STOERMER untersucht wurde.

Neben diesen Elektronen findet man solche, die von der Ionisation der in diesen Höhen noch vorhandenen Luftmoleküle (hauptsächlich, aber nicht nur, Stickstoff-Moleküle) herrühren. Diese Ionisation erfolgt in seltenen Fällen durch Stöße zwischen Molekülen und kosmischen Teilchen, meist jedoch durch die ultraviolette Strahlung der Sonne, die auf der Erde nicht mehr wahrgenommen werden kann, da sie durch eben diesen Mechanismus absorbiert wird.

Die großen Raketen, die senkrecht in die Atmosphäre gesandt werden, durchdringen bereits die meisten ionisierten Schichten der Erde. Mit ihrer Hilfe gelang es, das Sonnenspektrum aufzunehmen und durch dieses den Nachweis der Existenz der meisten bisher nur angenommenen Strahlungen zu führen.

Außer den so erzeugten Elektronen entstehen positive Ionen mit einer gleichgroßen elektrischen Ladung, die jedoch bedeutend schwerer sind. Sie werden durch die von den Sendern der Erde ausgesandten elektrischen Felder kaum bewegt und tragen daher nicht merklich zur Ausbreitung bei. Wegen der beim Zusammenstoß mit Elektronen auftretenden *Rekombination*, bei der neutrale Moleküle entstehen, d.h. die Ionisation rückgängig gemacht wird, dürfen sie nicht vernachlässigt werden. Man stellt also eine Gleichgewichtsionisation fest. Die Sonnenstrahlung dissoziiert die Moleküle, während die Stöße deren Rekombination zur Folge haben. Dies gilt tagsüber. In der Nacht jedoch werden die ionisierten Schichten um so schneller abgebaut, je tiefer die betrachtete Schicht liegt, da die Dichte der Luft zunimmt und Stöße häufiger auftreten.

Ein bequemes Hilfsmittel zur Untersuchung dieser Effekte stellen die *Sonnenfinsternisse* dar. Während der Sonnenfinsternis, die am 20.5.1947 in Brasilien zu beobachten war, hatte eine französische Forschergruppe Gelegenheit, einige wichtige Tatsachen festzustellen. So wird die ultraviolette Strahlung der Sonne für einige Minuten durch den Mond verdeckt, und die Anzahl der Elektronen pro Kubikzentimeter kann je nach der Schicht um 35% bis 75% abnehmen. Die E- und die D-Schicht verschwinden in etwa 2–3 Minuten. Die F-Schicht, bzw. F_1 und F_2, besitzt eine größere „Zeitkonstante" und benötigt etwa 2 Stunden, bis sich ein gewisses Gleichgewicht eingestellt hat, so daß diese Schicht dann während der ganzen Nacht bestehen bleiben kann. Die *nächtliche Abkühlung*, die in der oberen Atmosphäre beträchtlich ist, trägt dazu bei, in niedrigen Höhen die Elektronendichte auch nachts aufrechtzuerhalten, da sich die oberen Schichten zusammenziehen, während die freien Elektronen rekombinieren.

Diese Ionisation wird von einer Reihe Effekte untergeordneter Bedeutung begleitet: Der Aussendung verschiedener Spektrallinien in den unteren Schichten (D und vielleicht E), durch die das Licht des nächtlichen Himmels erklärt wird und die von vielen Physikern in der ganzen Welt untersucht wird. Außerdem bildet sich *Ozon*, das die ultravioletten Strahlen stark absorbiert und so diese Strahlung zerstört. Erst dadurch wird ein Leben auf der Erdoberfläche überhaupt möglich.

Im vorigen Abschnitt haben wir gesehen, daß die Wirkung der HEAVISIDE-Schicht auf die Wellenausbreitung durch das Auftreten eines Brechungsindexes der Form

$$n^2 = 1 - \frac{A N}{\omega^2}$$

ausgedrückt wird. Dabei bezeichnen A eine Konstante, N die Anzahl der freien Elektronen pro Kubikzentimeter und ω die Frequenz der betrachteten Welle.

Bei tieferen Frequenzen, wie z. B. den Langwellen von MARCONI, kann man bei Elektronendichten, wie sie in den ionisierten Schichten vorhanden sind, einen *negativen Brechungsindex* finden. Dies gilt auch für Metalle, die eine große Anzahl von freien Elektronen pro Kubikzentimeter enthalten.

Wie wir schon gesagt haben, erfahren lange Wellen an der ersten ionisierten Schicht eine beträchtliche metallische Reflexion und werden zurückgeworfen.

Wächst die Frequenz jedoch an, so wird der Ausdruck $\frac{A\,N}{\omega^2}$ kleiner, und man wird immer eine Frequenz finden, die groß genug ist, damit die metallische Reflexion an der ionisierten Schicht nicht auftritt.

Dies wurde experimentell sehr gut durch die Anwendung des Radars zu diesem Zweck (seit 1928) bestätigt. Der Begründer dieses Radarverfahrens war Sir EDWARD APPLETON.

Sendet man von irgendeinem Punkt der Erde ein kurzes Signal, einen radioelektrischen Impuls auf einer bestimmten Trägerfrequenz nach oben aus, so wird nach einer Zeit in der Größenordnung $^1/_{1000}$ sec dieses Signal an der ionisierten Schicht reflektiert und kann in einem Empfänger auf der Erde festgestellt werden. Dieser Empfänger enthält meist einen Kathodenstrahloszillographen, auf dessen Schirm mit einer der Zeit proportionalen Auslenkung aufgezeichnet wird. Man erhält so viele Echos, wie in der Atmosphäre Schichten (E, F_1, F_2) enthalten sind, die wie Spiegel wirken (Abb. 619).

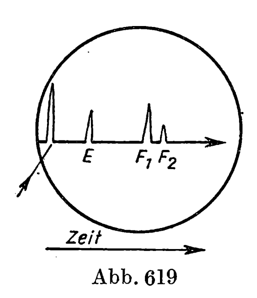


Abb. 619

Diesen Versuch kann man nun mit größeren Frequenzen wiederholen. Dabei wird man finden, daß oberhalb einer bestimmten Frequenz die Reflexion an einer bestimmten Schicht verschwindet. Diese Frequenz nennt man *kritische Frequenz* der Schicht. Diese Methode gestattet, die kritische Frequenz festzustellen, und ist die sogenannte *ionosphärische Sondierung*.

Die untere D-Schicht besitzt eine kritische Frequenz von 400 kHz, die kritische Frequenz der in 120 km Höhe liegenden E-Schicht liegt in der Größenordnung von 2000 kHz. Für die Schichten F_1 und F_2 verändert sich die kritische Frequenz stark mit der geographischen Breite, der Tageszeit usw. So wurde 1949 im Sommer um die Mittagszeit für die F_2-Schicht, die die wichtigere für Übertragungen ist, eine kritische Frequenz von etwa 5000 bis 8000 kHz gefunden.

Um die größtmöglichen Abweichungen festzustellen, erweist es sich als notwendig, die oben angeführten Untersuchungen im Bereich zwischen 1,5 und 20 MHz durchzuführen.

Die erhaltenen Resultate kann man auch mit einem Oszillographen aufnehmen, bei dem die vertikale Ablenkung proportional zur Zeit und die Seitenverschiebung eine Funktion der Frequenz ist (noch besser ist die Verschiebung eines Filmes). Der Schirm leuchtet nur im Scheitelpunkt des Echos auf, so daß man auf dem Schirm (oder auf dem Film) ein sehr deutliches Bild von der Höhe der ionisierten Schicht als Funktion der Frequenz erhält.

Dieses Bild hat das Aussehen der Abb. 620. Bis zu der kritischen Frequenz f_{cE} der E-Schicht erleiden die ausgesandten Impulse an dieser Schicht eine metallische Reflexion (in diesem Fall ist $f_{cE} = 3{,}7$ MHz). Außerdem sieht man, daß dann die gefundene Höhe der Schicht beträchtlich anwächst. Dies ist jedoch nur eine scheinbare Höhenzunahme, die darauf beruht, daß die Gruppengeschwindigkeit bzw. die Signalgeschwindigkeit der Welle, die in die Schicht einzudringen beginnt, stark verringert wird und die Reflexion folglich eine Verzögerung erleidet. Die gleichmäßig schnelle Ablenkung des Oszillographen berücksichtigt diese Verzögerung nicht. Die tatsächlichen Höhen der Schichten sind also in jedem Fall geringer als die auf diese Art gemessenen virtuellen Höhen. Aus dieser Höhenveränderung kann auf den Ionisationszustand und seine Verteilung in der Schicht geschlossen werden.

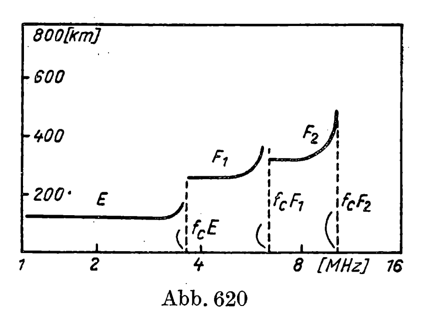


Abb. 620

Für Frequenzen unterhalb der kritischen Frequenz f_{cE} der E-Schicht sind die F-Schichten, die von diesen Wellen nicht erreicht werden können, ohne Einfluß. Für Frequenzen größer als f_{cE} ist die E-Schicht relativ durchlässig, und die gleichen Reflexionsphänomene treten an den Schichten F_1 und F_2 auf, die ihrerseits ebenfalls höhere kritische Frequenzen besitzen. Südlich des Äquators kann man eine weitere Schicht, die F_3-Schicht, in der Nähe von F_1 und F_2 beobachten.

Bestimmung der günstigsten Sendefrequenz

Wir wollen jetzt zu den Möglichkeiten der Vorausbestimmung der zur Übertragung geeigneten Frequenzen übergehen. Bei ihrem Weg zwischen einem Sender S und einem Empfänger E wird eine Radiowelle unter einem Winkel φ an einer Schicht reflektiert. Dieser Winkel kann leicht bestimmt werden, wenn die Höhe der Schicht bekannt ist. Man kann also zeigen, daß für diese Übertragung eine kritische Frequenz $f_c/\cos\varphi$ existiert; f_c ist dabei die kritische Frequenz, die bei senkrechtem Auftreffen auf die Schicht gemessen wurde. Die Vorausbestimmung der Frequenz läuft also darauf hinaus, aus den geographischen Verhältnissen den Winkel φ zu bestimmen und f_c zu messen sowie Regeln zu finden, mit deren Hilfe aus diesen Kenntnissen die für eine Übertragung günstigste Frequenz ermittelt werden kann.

Verfügt man über eine genügend große Leistung und kann sehr lange Wellen verwenden, so findet man immer solche, die eine Lösung bieten. Eine Welle von 50 kHz wird an der D-Schicht, wenn diese existiert, reflektiert werden. Ist keine D-Schicht vorhanden, so trifft die Welle auf die E-Schicht, und nachts tritt an der 200 km höher liegenden F-Schicht die Reflexion ein. Die Welle wird also in jedem Fall reflektiert und kann durch geeignete Wahl der Frequenz an jedem Punkt der Erde aufgefangen werden.

Die Verwendung von langen Wellen ist wegen der starken atmosphärischen Störungen, mit denen ihr Empfang verbunden ist, nicht immer möglich, und die Anzahl der Übertragungen auf niedrigeren Frequenzen ist begrenzt. Schließlich

ist auch oft der Wirkungsgrad von Interesse, da man die Senderleistung, die Höhe der Antenne usw. verringern will.

Notwendig wird man also auf die Verwendung *kurzer und ultrakurzer* Wellen geführt, deren Ausbreitung wir bereits betrachtet haben. Wir erinnern uns der *toten Zone* bei kurzen Wellen und der von ihnen verursachten Energiefokussierung. Diese *tote Zone* beginnt bei Wellenlängen von 80 m und wächst bis zu Wellenlängen von etwa 10 bis 8 m an. Bei sehr kurzen Wellen, den sogenannten Ultrakurzwellen, tritt niemals eine Reflexion ein, und die ausgesandte Welle erreicht niemals wieder die Erde.

Es erweist sich also als notwendig, wenn man mit geringstem Aufwand eine Radioübertragung von einem Sender S zu einem Empfänger E_1 durchführen will (die Entfernung betrage z. B. 3000 km), eine etwas kleinere als die dieser Entfernung entsprechende kritische Frequenz zu wählen. Da sich die HEAVISIDE-Schicht ständig bewegt (wegen der Luftströmungen), ist ein Sicherheitsfaktor von etwa 15% unterhalb der sogenannten kritischen Frequenz zweckmäßig. Diese kritische Frequenz verändert sich jedoch mit der Tageszeit. Es genügt also, die für die Sendung günstigste Zeit als Funktion der vorgegebenen Sendefrequenz bzw. die günstigste Sendefrequenz als Funktion der Sendezeit zu bestimmen. (Man kann jedoch nicht beide gleichzeitig wählen. Dieser Zusammenhang wurde nicht immer von allen Rundfunkgesellschaften beachtet.)

So erklärt sich mehr oder weniger die Tatsache, daß mit Leistungen, die nur Bruchteile eines Watts betrugen, Sendungen über den Atlantik und mit Leistungen von 5 W Übertragungen nach Australien gelangen. Diese einmaligen Sendungen waren jedoch von besonders günstigen Witterungs- und atmosphärischen Bedingungen abhängig und sind nicht reproduzierbar.[1])

Bestimmung und Vorhersage der zeitlichen Veränderungen der Sendebedingungen

Die eben betrachteten räumlichen Veränderungen sind jedoch nur ein Teil dieses Problems, da die Sendebedingungen auch von der Zeit abhängig sind. Betrachten wir z. B. die Fahrt eines Schiffes nach Tahiti und untersuchen, über welche Wellen man von diesem Schiff aus während der 6 monatigen Reise einen bestimmten Sender empfangen kann. Das gleiche Problem tritt im Flugwesen auf: Über welche Wellenlänge müssen die Übertragungen in 3 oder 5 Jahren durchgeführt werden, um einen guten Wirkungsgrad zu erreichen.

Glücklicherweise hat man festgestellt, daß sich die Intensität der Ionisation in jeder Schicht gleichmäßig mit bestimmten beobachtbaren Sonnenphänomenen verändert. Wir nennen als Beispiel Anzahl und Größe der Sonnenflecke. Man weiß seit sehr langer Zeit, daß diese Sonnenflecke in einem Rhythmus von 11 Jahren zwar nicht in ihren Einzelheiten, jedoch in ihrer Gesamtheit wiederkehren.

---

[1]) Während des letzten Krieges stand z. B. die französische *Resistance* vor Problemen ähnlicher Art. Es war notwendig, mit den vorhandenen tragbaren Sendern sehr geringer Leistung Verbindung mit London oder Algier aufzunehmen. Dazu erwies sich die tote Zone als besonders geeignet, um ein Abhören durch die Gestapo zu verhindern. Meist wurde daher eine Wellenlänge von 40 m benutzt, die dann allerdings später besonders aufmerksam überwacht wurde.

Die Radioelektrizität wird bereits seit einem Mehrfachen von elf Jahren untersucht. Besonders seit den Entdeckungen von APPLETON konnte man für die kritischen Frequenzen entsprechende Regeln aufstellen. So wußte man z. B., daß im Jahre 1946 alle kritischen Frequenzen aller Schichten etwa 1,6 mal so groß wie die kritischen Frequenzen des Jahres 1943 waren (selbstverständlich gleicher Monat, gleicher Tag, gleiche Stunde). Daraus folgt, daß eine Fluggesellschaft bzw. eine Schiffahrtsgesellschaft, die im Jahre 1943 eine genaue Tabelle der Sendebedingungen angelegt hatte, im Jahre 1946 wegen der Veränderungen eine beträchtliche Korrektur vornehmen mußte.

Mit Hilfe von Messungen der heutigen kritischen Frequenzen lassen sich also, kurz gesagt, unter Berücksichtigung der bekannten Sonnenfleckenrhythmen die kritischen Frequenzen für jeden beliebigen späteren Zeitpunkt bestimmen. Diese Bestimmung ist auch die Hauptaufgabe der speziell für den ionosphärischen Dienst eingerichteten Institute. Dabei genügt bereits eine Messung, um die günstigsten Bedingungen für alle möglichen Übertragungen vorher zu bestimmen, sofern man genaue Beobachtungen der Sonnenflecke durchgeführt hat und die Beziehungen zwischen diesen und den Übertragungsbedingungen kennt. Bei einem speziellen Problem wird man zuerst die geometrischen Verhältnisse betrachten, das heißt die möglichen Wege zwischen Sender und Empfänger, und untersuchen, ob auf diesem Wege mehrere Reflexionen an Erde und HEAVISIDE-Schicht notwendig sind (Abb. 615).

Dabei ist natürlich zu beachten, daß es für eine gute Übertragung besser ist, wenn die Zwischenreflexion an einer Ebene oder dem Meer erfolgt als z. B. am Himalaja, da an dessen zerklüfteten Wänden eine unvollkommene Reflexion eintritt. Dies sind jedoch die geringsten Schwierigkeiten.

Für einen festgesetzten Zeitraum bestimmt man also die kritischen Frequenzen, indem man die augenblicklichen kritischen Frequenzen mißt und ihre wahrscheinliche Veränderung mit der Zeit berechnet. Man muß jedoch darauf achten, daß für die Übertragung eine etwas unterhalb der kritischen liegende Frequenz verwendet wird. Diese darf wegen der *Absorption* jedoch nicht zu niedrig gewählt werden. Nehmen wir als Beispiel die kritische Frequenz senkrecht zu F_2 mit 8 MHz, die senkrecht zu F_1 mit 5 MHz an. Wird die Sendefrequenz nun zu 5,5 MHz gewählt, so unterliegt die Welle einer längeren andauernden Spiegelung in der F_1-Schicht und wird dadurch auch längere Zeit der Absorption ausgesetzt sein (d. h. während eines bedeutenden Bruchteils der Ausbreitungszeit). Wir haben bereits gesehen, daß die Elektronen der H-Schicht, die durch das Feld der einfallenden Welle bewegt werden, in ihrer Bewegung durch Stöße mit den Molekülen gehemmt werden, da sie bei diesen Stößen einen Energieverlust erleiden. Da diese Energie von der einfallenden Welle geliefert wird, muß man also von einer Absorption sprechen. Man kann sie grob berechnen. Eine andere Absorption tritt bei jeder Reflexion an der Erde auf. Daraus folgt, daß Übertragungswege mit vielen Reflexionen zwischen Sender und Empfänger im Empfänger nur ein schwaches Feld liefern und in der Praxis uninteressant sind.

Nun wird das Feld durch die Absorption zwar geschwächt, jedoch nicht völlig abgebaut. *Die untere Grenze der zur Übertragung verwendeten Frequenz* wird also durch die Größe der Leistung, den Wirkungsgrad der Antennen, die Höhe der zulässigen Störungen usw. bestimmt.

Beachtet man alle eben erwähnten Tatsachen, so kann man leicht Karten aufnehmen, auf denen sich die besten Übertragungsfrequenzen (als Ordinate) für alle Tageszeiten (als Abszisse) ablesen lassen.

In Abb. 621 ist eine solche Karte gezeigt. Sie gilt für eine Übertragung über 2500 km mit einer Leistung von 10 W im August 1947. Die Kurve (*1*) kennzeichnet die kritischen Frequenzen, Kurve (*2*) gibt die durch die Absorption bedingte untere Frequenz an [die Kurve (*2*) ist die einzige, die bei Veränderung der Leistung eine beträchtliche Verschiebung erleidet]. Die Kurven (*3*) und (*4*) begrenzen einen

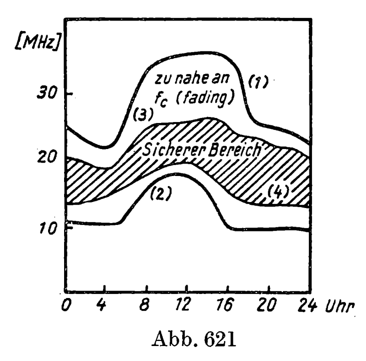


Abb. 621

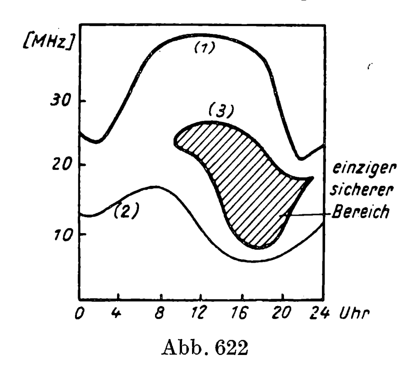


Abb. 622

definierten Sicherheitsbereich, in dem alle schnellen, mehr oder weniger bekannten Veränderungen der Schicht selbst berücksichtigt sind.

Bei Sendungen von längerer Dauer müssen sowohl die Übertragungsbedingungen tagsüber als auch nachts beachtet werden. Sollten Übertragungen über weite Entfernungen erfolgen, so können unter Umständen sehr unbequeme atmosphärische Bedingungen herrschen: für bestimmte Zeitintervalle fehlt, wie in Abb. 622 gezeigt ist, ein Sicherheitsbereich vollständig. Diese Karte bezieht sich auf eine Übertragung ebenfalls im August 1947 mit 1000 W über eine Entfernung von 18000 km.

Magnetische Stürme. Mögel-Dellinger-Effekt. Fade-out Bureau-Effekt. Sonnenrauschen

Man nennt *magnetische Stürme* sehr kleine Veränderungen des magnetischen Erdfeldes, die sich über mehrere Tage erstrecken und kaum 1 Milligauß erreichen. Ihre Bedeutung wird klar, wenn man überlegt, welche großen Veränderungen in der Sonne zu ihrem Entstehen notwendig sind. Diese magnetischen Stürme werden von Störungen in der radioelektrischen Ausbreitung begleitet. Es ist natürlich, diese Störungen elektrischen Strömen in der Ionosphäre zuzuschreiben.

Tatsächlich sind die Sonnenkatastrophen in ihrem Ursprung plötzliche und heftige Eruptionen, die eine zusätzliche Ionisierung der unteren ionisierten Schichten der Atmosphäre hervorrufen. Dadurch absorbiert die D-Schicht sehr stark, die kritischen Frequenzen wachsen ebenfalls an, und kurze Wellen können die F-Schicht nicht mehr erreichen, die sie reflektieren würde. Lange Wellen werden dagegen an der mit Elektronen angereicherten D-Schicht besser reflektiert.

In Frankreich wurden von BUREAU bei der Untersuchung der atmosphärischen Störungen experimentelle Beweise dafür geliefert, daß diese Verstärkung der langen Wellen gleichzeitig mit einem plötzlichen Schwund der Kurzwellen verbunden ist. Dieses totale Verschwinden oder „fade-out" der Kurzwellen ist auch unter dem Namen MÖGEL-DELLINGER-Effekt bekannt, und man weiß, daß es die Folge einer heftigen Sonneneruption ist. Manchmal tritt dieses Verhalten 1 oder 2 Tage nach einem mehr oder weniger lange anhaltenden magnetischen Sturm auf und wird durch langsame von der Sonne herrührende Teilchen (1000–2000 km/sec) verursacht.

In der letzten Zeit wurde von der Schule APPLETONS eine teilweise starke Emission radioelektrischer Wellen von 2–7 m Wellenlänge aus der Sonne entdeckt. Die Veränderungen dieser Emission stehen in einem bestimmten Verhältnis zu der Sonnenaktivität, da sie ebenso bedeutend und plötzlich verlaufen und im großen den ionosphärischen Störungen entsprechen. Später stellte man dieses von der Sonne verursachte Rauschen auch im Bereich noch kürzerer Wellen fest.

Vorhersage magnetischer Stürme und des fade-out

Eine Umdrehung der Sonne um sich selbst erfordert einen Zeitraum von 27 Tagen. Stellt man eine heftige Eruption an der Ostseite der Sonne fest, so weiß man, daß diese etwa 7 Tage später eine Spur (Flecke usw.) auf der der Erde zugewandten Seite zeigen wird. Es gibt also eine gewisse Wahrscheinlichkeit dafür, daß die Emission der Teilchen oder der Strahlung, die die Ionosphäre erreichen, gerade in diesem Augenblick stattfindet. Man hat tatsächlich gefunden, daß nicht nur die chromosphärischen Eruptionen, sondern auch die bedeutenden Veränderungen der *Sonnenkorona* eine gute Vorhersage gestatten. Diese kann jedoch niemals als sicher angesehen werden, da natürlich bestimmte Gegebenheiten auf der Sonne nach dem Durchgang durch die Ostseite einer Beobachtung entzogen werden.

Allgemeines über die Ausbreitung

Wir haben nun bereits ausführlich den Bereich der Kurzwellen, der etwa von 80 m bis 9 m Wellenlänge reicht, behandelt. Die Wellen von 20000 bis 800 m Länge etwa sind für die Anwendung uninteressant. Tatsächlich werden sie einzig für die Verbindung mit getauchten Unterseebooten verwendet. Der uns bereits von Seite 319 bekannte *Skineffekt* begrenzt allerdings die Eindringtiefe ins Meer auf 12 bis 15 m für eine Wellenlänge von 20 km. Diese Eindringtiefe verringert sich noch mit der Quadratwurzel von $\frac{1}{\lambda}$. Eine weitere Anwendung dieser Wellen ist bisher nicht bekannt. Der Wellenbereich von 600 m bis 200 m ist durch seine Verwendung in der Radioübertragung gut erforscht. Sein Verhalten ist einfach zu erklären: am Tage Reflexionen an der E-Schicht (niedrige Höhe), daher geringe Reichweite und unerwünschte zusätzliche Absorption in der D-Schicht; nachts sind die Verhältnisse günstiger. Dann verstärkt sich die E-Schicht, und es tritt eine gute Reflexion an der F-Schicht mit größeren Reichweiten größerer Stabilität ein, abgesehen von den Fadings bei den Veränderungen, die beim Sonnenuntergang erfolgen. Der Wellenbereich unterhalb von 120 m findet die schlech-

testen Bedingungen. Bereits in der E-Schicht findet eine starke Absorption dieser Wellen statt. Sie werden zur Übertragung über kurze Entfernungen, die jedoch größer als die Sichtweite sind, benutzt und bieten gerade wegen der starken Absorption den Vorteil, den Empfang auf einen bestimmten Bereich zu beschränken.

Die Wellen mit einer Wellenlänge von 120 m stehen in einem bestimmten Zusammenhang mit dem 0,5 Gauß betragenden magnetischen Erdfeld. Dieses veranlaßt, wie man weiß, die freien Elektronen, auf Kreisen mit veränderlichem Radius (entsprechend ihrer Geschwindigkeit) in konstanten Zeiträumen umzulaufen. Diese Umlaufszeit bestimmt die Frequenz, die gerade in der Größenordnung der Frequenz der eben betrachteten Wellen liegt. Diese Wellen werden also mit allen diesen freien Elektronen in Resonanz treten und ihnen dabei Energie zuführen. Dies ist der Grund für die besonders starke Absorption der Wellen mit $\lambda \approx 120$ m.

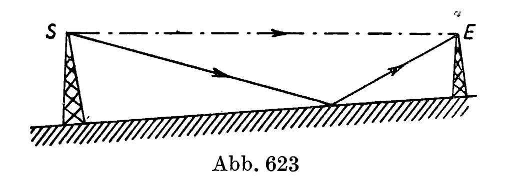


Abb. 623

An diesen Wellenbereich schließt sich zu kürzeren Wellenlängen hin der Bereich der bereits besprochenen Kurzwellen an. Danach gelangt man zu den Ultrakurzwellen ($\lambda < 10$ m). Bei diesen Wellen genügt es nicht, eine dem Licht entsprechende Ausbreitung anzunehmen. Man findet beim Empfang immer die Interferenz einer *direkt* vom Sender zum Empfänger laufenden Welle mit einer an der Erdoberfläche *reflektierten* Welle (siehe Abb. 623). Bei dieser Reflexion erleidet diese Welle einen Phasensprung um $\frac{\pi}{2}$. Dadurch wird, wenn Sender und Empfänger von der Erdoberfläche nur wenig entfernt sind, das Feld im Empfänger stark geschwächt.

Diese Bemerkung erklärt, daß eine Übertragung auf Ultrakurzwellen von Flugzeug zu Flugzeug einen bedeutend besseren Wirkungsgrad aufweist als die Übertragung auf der Erde.

Im Gebiet der Zentimeterwellen ($\lambda = 10$ cm — 3 cm, $\nu = 3 \cdot 10^9 - 10 \cdot 10^9$ Hz) spielt dieser Nachteil nicht mehr die gleiche Rolle, da es durch eine geringe Verschiebung des Empfängers möglich ist, von einem Zweig auf den anderen überzugehen. In den meisten Fällen können für die Berechnung die bekannten optischen Ausbreitungsgesetze benutzt werden.

Echos am Mond und Möglichkeiten zukünftiger interplanetarischer Verbindungen

Die ionisierte Schicht, die die von der Erde ausgehenden Wellen reflektiert, wirkt auch in entgegengesetzter Richtung, d.h., es ist nicht möglich, aus dem äußeren Universum herrührende Signale auf der Erde zu empfangen. Nun ist, wie wir gesehen haben, die Ionosphäre für Ultrakurzwellen, die sie ablenkt (indem sie sie mehr oder weniger absorbiert), durchlässig. Außerdem haben wir bereits gesagt, daß im Bereich der Wellenlängen von 2-7 m ein elektromagnetisches Rauschen auftritt. Man kann also sagen: „Das Tageslicht ist hörbar".

Während der Nacht kann man ein ähnliches Rauschen vernehmen, das seinen Ursprung in der Milchstraße hat und auf längeren Wellen bis $\lambda = 15$ m wahr-

nehmbar ist. Es scheint sicher zu sein, daß das von der Sonne herrührende und dieses eben beschriebene Rauschen die gleiche Ursache und die annähernd gleiche Frequenzverteilung aufweisen. Daß das nächtliche Rauschen auf längeren Wellen vernehmbar ist, beruht darauf, daß die ionisierte Schicht, die weniger Elektronen enthält, für Wellen dieser Wellenlänge durchlässiger ist.

Eine genauere Untersuchung dieser Strahlung ergab ein Maximum in Richtung des Sternbildes Schwan. Es ist nicht sehr ausgeprägt, jedoch eindeutig zu bestimmen.

Über die Ursache dieses Effektes existieren mehrere Theorien. Eine dieser Theorien geht von der gyromagnetischen Frequenz der Elektronen im Magnetfeld der Sonne aus. Aus spektroskopischen Messungen weiß man, daß dieses Magnetfeld einen geringen *mittleren Wert* (von etwa 1 Gauß) besitzt, daß es jedoch in den Sonnenflecken sehr viel stärker ist (bis zu 5000 Gauß). Diese Sonnenflecke müssen daher als starke Magnetpole angesehen werden. Einem Feld von 1 Gauß entspricht eine gyromagnetische Welle von 100 m Wellenlänge, einem Feld von 5000 Gauß eine solche von 2 cm Wellenlänge. Die festgestellte Energieverteilung (die Strahlung scheint der dritten Potenz der Wellenlänge entsprechend anzuwachsen) stimmt nicht mit der Strahlung der auf den Kreisen der gyromagnetischen Theorie befindlichen Elektronen überein. Der Effekt muß existieren, ist jedoch sehr gering.

Eine andere, wahrscheinlichere Theorie nimmt einige H-Kerne an, berechnet den Übergang von einer freien Elektronenbahn (Hyperbel) auf eine andere freie oder gebundene Bahn (Ellipse) und findet eine besser verteilte Strahlung. In klassischer Darstellung kann man sagen: Ein sich einem Wasserstoffkern näherndes Elektron wird angezogen und abgelenkt. Es erleidet eine Beschleunigung und emittiert eine entsprechende Strahlung. Gegen diese Theorie ist bis hier nichts einzuwenden. Sie ist besonders interessant, da sie elektromagnetisches Rauschen erfaßt, das seinen Ursprung *in den Sternen* haben könnte. Im interplanetarischen Raum können nach dem, was wir gesehen haben, von Zeit zu Zeit ohne weiteres ein Wasserstoffkern und einige Elektronen auftreten und zu diesem Rauschen Anlaß geben.

Schließlich bieten auch die *Instabilitäten des Plasmas* (siehe Kapitel V, Seite 587) gute Möglichkeiten der Emission des Rauschens. Die Intensität des Elektronenstrahls, der bei der Eruption von der Sonne ausgesandt wird, kann durch seine Wirkung auf das magnetische Feld der Erde bestimmt werden. Die in dem großen Plasma, das die Korona darstellt, auftretenden Effekte kann man berechnen und findet eine größenordnungsmäßige Übereinstimmung mit der Erfahrung.

Tatsächlich zeigt der Empfang solcher aus dem Weltraum herrührenden Strahlung grundsätzlich die Möglichkeit einer Ausstrahlung in diesen Raum. Sie ist nur eine Frage der für die Emission zur Verfügung stehenden Leistung. Es ist bekannt, daß das Nachrichtenkorps der amerikanischen Armee im Jahre 1947 photographische Aufnahmen von Radarechos am Mond veröffentlicht hat. Aus diesen Photographien kann man die Größenordnung der erforderlichen Leistung entnehmen. Sie liegt bei etwa 5 Millionen Watt. Außerdem sind besonders günstig dimensionierte Abstrahlungsflächen notwendig, damit die in einem Strahl ausgesandte Energie nicht zerstreut wird. Da es möglich ist, durch einfache Beugung am Mond einen Teil eines von der Erde ausgesandten Signals dort wieder zu

empfangen, ist bewiesen, daß Empfänger noch in sehr großen Entfernungen ansprechen werden. Wenn auch die Überwindung des interplanetarischen Raumes durch Raketen mit Besatzung noch eine Zukunftsaufgabe der Weltraumschiffahrt ist, so ist doch die Möglichkeit einer radioelektrischen Verbindung mit diesen Raketen bereits gesichert.

Störungen der Radiogoniometrie durch die Heaviside-Schicht

Keine der bisher bekannten Tatsachen fordert eine *horizontale* Lage der Heaviside-Schicht. Daher tritt die elektromagnetische Welle, die vom Sender S zum Empfänger E verläuft, nach den Gesetzen von Descartes aus der Vertikalebene SE aus. Ein neben dem Empfänger angebrachtes Radiogoniometer stellt dann den Sender in einer falschen Richtung fest. Dieses Phänomen tritt hauptsächlich bei Mittel- und Kurzwellen ($\lambda = 15$ bis 700 m) und nachts auf. Daher rührt der Name „Nachteffekte", der diesen Phänomenen zugeschrieben wurde.

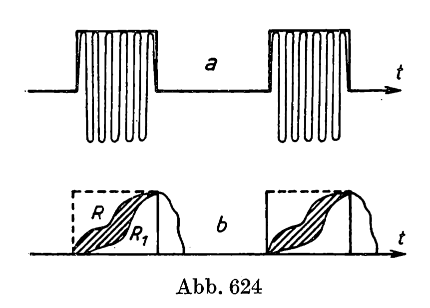


Abb. 624

Durch den folgenden Kunstgriff hat man versucht, diesen Nachteil in einem bestimmten Maß zu vermeiden. Dieser Kunstgriff kann jedoch nur benutzt werden, wenn der Sender S speziell moduliert ist, d.h., wenn er geeignet ist, sich anpeilen zu lassen. Die Emission besteht aus einer Folge von kurzzeitigen Rechteckimpulsen (Abb. 624a zeigt die Umhüllende der Modulation). Das Signal im Empfänger zeigt eine veränderliche Amplitude, die zeitabhängig ist, da die Wellen im allgemeinen auf verschiedenen Wegen (und damit in verschiedenen Zeiten) den Empfänger erreichen. Der Empfänger besitzt eine Rahmenantenne, und die Reproduktion der Modulationsamplitude erfolgt auf einem Kathodenstrahloszillographen, dessen Auslenkung mit der Frequenz der Emission synchronisiert ist (die Kurve R des empfangenen Signals liegt also immer an derselben Stelle). Der Rahmen wird nun so gerichtet, daß der Beginn des Signals verschwindet, und man erhält die Kurve R_1. Da der Beginn des Signals dem kürzesten Weg entspricht und da es eine bestimmte Wahrscheinlichkeit dafür gibt, daß dieser Weg in der Vertikalebene SE verläuft, nimmt man die so gefundene Rahmenstellung als richtig für die Peilung an.

Die nächtliche Navigation von Flugzeugen konnte durch diese Methode, die leider nur selten verwendet wird, bedeutend verbessert werden.

Luxemburg-Effekt

Dieser Effekt beruht ebenfalls auf einer Störung durch die Heaviside-Schicht. Einfache Berechnungen zeigen, daß ein starker Sender (*1*) mit etwa 100–500 kW Leistung in 100 bis 200 km Entfernung ein elektrisches Feld in die Heaviside-Schicht strahlt. Durch dieses Feld vergrößert sich die Geschwindigkeit der freien Elektronen dieser Schicht, und die Anzahl der Stöße dieser Elektronen mit den

Molekülen der verdünnten Luft pro sec verändert sich. Eine Veränderung erfahren also auch die Reflexions- und Absorptionseigenschaften dieser Schicht gegenüber einer anderen, von einem Sender (*2*) ausgehenden Welle. Da nun diese Veränderung im Takt mit der Modulation des Senders (*1*) erfolgt, ist es klar, daß ein Hörer, der seinen Empfänger auf die Frequenz des Senders (*2*) abgestimmt hat, in einem Zeitpunkt, in dem dieser nur die Trägerfrequenz aussendet (z.B. zwischen zwei Sendungen), die Modulation des Senders (*1*) wahrnimmt. Dieses Verhalten beruht auf der Nichtlinearität der HEAVISIDE-Schicht, die wie ein Frequenzwandler wirkt, der in Reihe gelegt ist. Um diesen Effekt hervorzurufen, genügt es, daß die Sender (*1*) und (*2*) den gleichen Azimut aufweisen wie der Empfänger, daß der Sender (*1*) sehr leistungsstark ist und daß die Reflexionsbedingungen an der H-Schicht für die Frequenz (*2*) nicht zu kritisch sind. Es kann nun der Fall eintreten, daß alle diese Bedingungen gleichzeitig erfüllt sind. Z. B. ist dies der Fall, wenn der Sender Radio Luxemburg mit voller Leistung auf $\lambda = 1150$ m sendet. Obzwar man diesen Effekt auch in einigen anderen Fällen gefunden hat, heißt er nach seinem ersten Auffinden (1930) Radio-Luxemburg-Effekt.

Einfluß des Erdbodens auf die Ausbreitung

Der Einfluß des Erdbodens auf die Ausbreitung hängt von vielen Faktoren ab. Wir wollen mit E das elektrische Feld und mit i die Stromdichte bezeichnen. Die Gleichung

$$\mathfrak{i} = \sigma\,\mathfrak{E} + \frac{\varepsilon}{4\,\pi}\,\frac{\partial \mathfrak{E}}{\partial t} = \left(\sigma + \frac{j\,\omega\,\varepsilon}{4\,\pi}\right)\mathfrak{E}$$

ergibt einen „leitenden" Erdboden, wenn die Leitfähigkeit σ sehr viel größer als $\frac{\varepsilon\,\omega}{4\,\pi}$ ist, und einen „dielektrischen" Erdboden im entgegengesetzten Fall. In elektrostatischen Einheiten beträgt ε etwa 4 (für Wasser 80) und

$$\sigma = \left(\frac{1}{\varrho}\right)\frac{\Omega}{\text{cm}}\cdot 9\cdot 10^{11} \quad \text{elektrostat. Einh.}$$

Im folgenden sollen einige Dielektrizitätskonstanten und Leitfähigkeitswerte angegeben werden:

Meerwasser	$\varepsilon = 80$	$\sigma = 4\cdot 10^{10}$	$\nu_0 = 10^9$	$\lambda = 30$ cm
Süßwasser	80	$45\cdot 10^6$	10^6	300 m
nasser Sand	9	$1\cdot 10^6$	$0{,}2\cdot 10^6$	1500 m
trockner Sand	4	$0{,}1\cdot 10^6$	$0{,}05\cdot 10^6$	6000 m
fruchtbarer Ackerboden	15–25	$50\text{-}150\cdot 10^6$	10^7	30 m

In der 3. Spalte der Tabelle steht die Frequenz ν_0, die sich aus

$$\frac{\varepsilon\,\omega}{4\,\pi} = \frac{\varepsilon\,\nu_0}{2} = \sigma; \quad \nu_0 = \frac{2\,\sigma}{\varepsilon}$$

ergibt.

Bei Frequenzen $\nu \ll \nu_0$ überwiegt der Leitfähigkeitsterm, und die Erde wirkt als Leiter. Bei Frequenzen $\nu \gg \nu_0$ dagegen stellt die Erde ein Dielektrikum dar. Wir betrachten den interessanten Fall von gewöhnlichem Erdboden und Meerwasser. Das *Meerwasser leitet alle üblichen Frequenzen mit Ausnahme der Zentimeterwellen.* Es wird also immer metallische Reflexion geben, und man wird zu der Annahme geführt, daß die Phänomene im Empfänger E auf der Bewegung von Elektronen in der Leitungsantenne und auf der *Bewegung von symmetrisch in der Erde angeordneten Spiegelladungen* (siehe Kapitel Elektrostatik) beruhen. Daraus er-

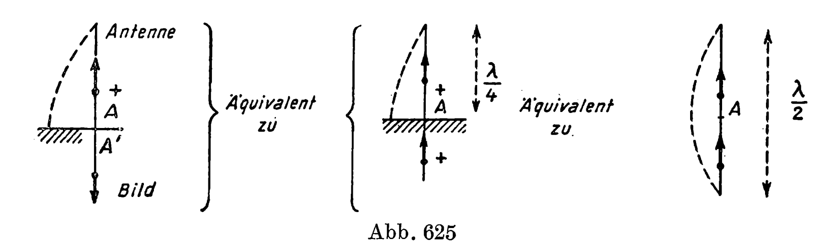


Abb. 625

geben sich Veränderungen des elektrischen Feldes, Interferenzen usw., die von dem Ort des Empfängers abhängen, und ein in der Erde auftretendes *Maximum des Feldes,* das nur wenig ausgeprägt ist und durch folgende Tatsache verursacht wird: Zu der von einem (z. B.) sich nach oben bewegenden Elektron erzeugten, von A ausgesandten Welle addiert sich eine von A' ausgehende, also den gleichen Weg zurücklegende Welle, deren Ursache ein Elektron mit *entgegengesetztem Vorzeichen* ist, das sich nach unten bewegt. Dies entspricht einem Strom gleichen Vorzeichens wie in A.

Man kann also zu einer mit $\frac{\lambda}{2}$ in A schwingenden Antenne (deren Strahlung der einer Antenne im freien Raum entspricht) eine Äquivalente herstellen, indem man in A eine geerdete Antenne der Länge $\frac{\lambda}{4}$ anbringt (Abb. 625).

Im Prinzip verursacht die Leitfähigkeit σ (i mit E in der Erde in Phase) eine Absorption. In der Praxis bildet sich hier, wenn die Erde als guter Leiter wirkt, ein Gitter von FOUCAULTschen Strömen, die ein Eindringen der Energie verhindern und so die Ursache der auftretenden metallischen Reflexion sind. Hier kann die Theorie der FOUCAULTschen Ströme angewandt werden, und wir wissen bereits, daß die Energie im Leiter in einer Oberflächenschicht mit der Dicke

$$\delta = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma\mu\omega}}$$

in kohärenten Einheiten verbleibt.

Diese Formel wenden wir nun auf Meerwasser an. Werte der Eindringtiefe δ für Kupfer haben wir bereits weiter vorn angegeben. Da das Meerwasser eine etwa $15 \cdot 10^6$ geringere Leitfähigkeit als Kupfer besitzt, finden wir bei gleichen Frequenzen eine ungefähr $4 \cdot 10^3$mal größere Eindringtiefe.

Die Eindringtiefe für Meerwasser, die sich für Frequenzen $\nu < 10^5$ als recht bedeutend herausgestellt hat, besitzt ein praktisches Interesse. Sie gestattet *getauchten* Unterseebooten in geringer Tiefe den Radioempfang über sehr lange Wellen.

$\nu =$	10^4	10^5	10^6	10^7 Hz
δ Kupfer	3 mm	1 mm	0,3 mm	0,1 mm
δ Meerwasser	12 m	4 m	1,2 m	0,4 m
δ Erde	240 m	80 m	24 m	8 m

Die noch größeren Eindringtiefen, die für die Erde gefunden wurden, erklären die Möglichkeit der Telegraphie durch die Erde, die während des Krieges 1914 bis 1918 angewandt wurde und die Erde direkt als Ausbreitungsmedium für mittlere Reichweiten (einige km) benutzte.

Über gewöhnlichem Erdboden finden wir praktisch die gleichen Phänomene wie über dem Meer, solange die Wellenlänge größer als eine (schlecht definierte) Grenzwellenlänge von etwa 30 m ist, d. h. für alle Wellen, die sich dank der HEAVISIDE-Schicht über große Entfernungen ausbreiten. Legt man also eine Empfängerantenne an Erde, so werden gegenüber der Verbindung mit beispielsweise einem Flugzeug kaum Verluste auftreten. Im Gegensatz dazu verändern sich die Ergebnisse bei Ultrakurzwellen sehr stark: Ein Sender S strahlt gegen einen Empfänger E eine direkte Welle (*1*) und eine reflektierte Welle (*2*) aus. Letztere unterliegt im Prinzip einer *nichtmetallischen* Reflexion und wird tatsächlich im Augenblick der Reflexion durch eine gewisse Absorption geschwächt. Eine weitere Schwächung rührt von der durch die Unebenheiten der Erde bedingten Beugung her (Abb. 626). (Tatsächlich bietet diese außerhalb des Bereiches A erfolgende Beugung für den Empfang gewisse Vorteile. In A erfolgt eine reguläre Reflexion. Auf Grund der irregulären Phasenverteilung dieser gestreuten Wellen ist keine Kompensation möglich. Das FERMATsche Prinzip gilt nicht mehr, wenn man die Wege SBE und SAE vergleicht.)

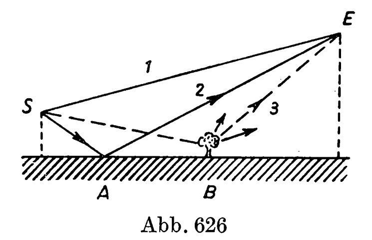


Abb. 626

Es soll hier nicht auf die Theorie der nichtmetallischen Reflexion, die in der Vorlesung über Optik behandelt wird, eingegangen werden. Wir wollen uns nur daran erinnern, daß ein Phasensprung um π eintritt, wenn das reflektierende Medium den größeren Brechungsindex besitzt. Die bei der Reflexion auftretende Absorption läßt sich übrigens berechnen, indem man in der MAXWELLschen Theorie den allgemeineren Ausdruck

$$i = \sigma E + \frac{\varepsilon}{4\pi} \frac{\partial E}{\partial t}$$

an Stelle von

$$i = \frac{\varepsilon}{4\pi} \frac{\partial E}{\partial t}$$

benutzt.

Kann die Erde als *leitend* angesehen werden, so erreicht die reflektierte Welle SAE den Empfänger E mit der Phase, die dem direkten Weg SAE in der Luft entspricht (tatsächlich besitzen die Leiter ebenso wie die HEAVISIDE-Schicht einen Brechungsindex $n < 1$).

Kann die Erde als *Dielektrikum* angesehen werden, so besitzt die reflektierte Welle SAE im Empfänger eine Phasenvergrößerung gegenüber dem direkten Weg SAE um π (da der Brechungsindex der Erde in diesem Fall größer als Eins ist).

Daraus folgt bei einer Anordnung der Antenne von S dicht über dem Erdboden und einer geringen Höhe von E ein direkter Weg SE beider Wellen (wenn die Erde als Dielektrikum angesehen werden kann, d.h. es sich um Ultrakurzwellen handelt). Das Feld besitzt in der Aufwärtsrichtung lange Zeit eine Proportionalität zur Höhe.

Man findet darüber hinaus übrigens ein System von Interferenzstreifen, und es ist sehr interessant, dieses zu untersuchen.

Verwendung von Ultrakurzwellen bei Blindlandungen

Kurven konstanten Feldes haben bei Ultrakurzwellen die in Abb. 627 gezeigte Form. Im Falle einer vertikalen Emissionsantenne schmiegt sich z.B. ein Ast der Kurve in der Nähe des Senders der Erdoberfläche an. Dieser Effekt kann bei Blindlandungen von Flugzeugen ausgenutzt werden. Ein Sender E wird dabei am

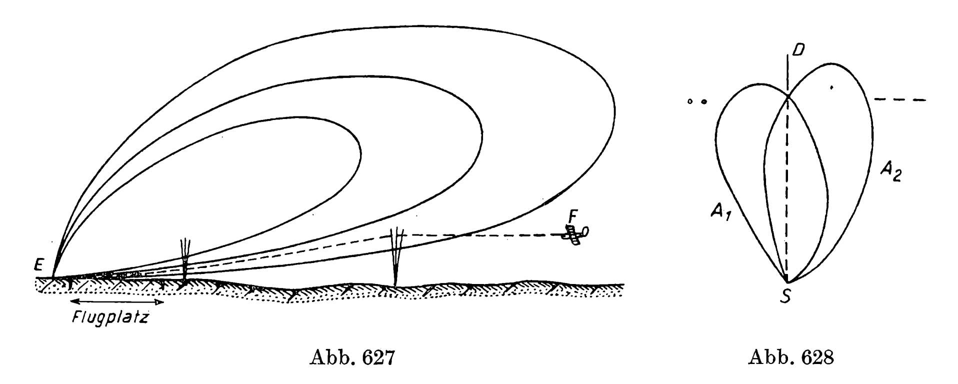


Abb. 627 Abb. 628

Rande des Flugplatzes angebracht. Fliegt nun ein Flugzeug F in Richtung auf den Sender in konstanter Höhe, so wird der Empfang der Wellen an Bord des Flugzeuges ständig stärker. Sobald der Empfang eine bestimmte Stärke erreicht, werden Flugrichtung und -höhe so gewählt, daß er konstant bleibt. Da sich das Flugzeug dabei auf einer Kurve konstanten Feldes bewegt, gelangt es langsam zur Erde. Zur Vervollständigung dieses Einweisungsverfahrens ordnet man zwei kleinere Sender als Einflugzeichen an, deren Signale das Flugzeug nur direkt über den Sendern empfangen kann und die die Entfernung vom Flugplatz angeben. Durch diese genaue Zwischenangabe werden dem Flugzeugführer die Zeitpunkte für die entsprechenden Landevorbereitungen angegeben (Ausfahren des Fahrgestells, Öffnen der Landeklappen, Motoren drosseln usw.).

Um das Flugzeug in einer genauen Richtung zu halten, wendet man ein sehr einfaches Verfahren an: Der Richtstrahlsender S besitzt zwei in ihrer Lage unterschiedliche Strahlungsdiagramme A_1 und A_2. Die Signale auf dem Strahlungsdiagramm A_1 erfolgen als Punkte, die auf dem Diagramm A_2 als Striche, die zwischen den Punkten liegen. Ein Flugzeug, das sich auf der Geraden D bewegt, vernimmt also einen kontinuierlichen Ton, während es bei einer Abweichung nach links Strichsignale, bei einer Abweichung nach rechts Punktsignale wahrnimmt (Abb. 628).

Aufteilung des Frequenzbereiches

Um zu verhindern, daß der Empfang einer bestimmten Sendung durch den einer anderen gestört wird, ist es notwendig, beide Übertragungen in verschiedenen Frequenzbändern durchzuführen. Die Breite eines solchen Bandes ist von der Breite des zu übertragenden Frequenzbereiches abhängig. Bei Radioübertragungen (Sprache und Musik) ist man übereingekommen, die Bandbreite mit 9000 Hz festzulegen. Für eine gute Wiedergabe ist dies jedoch ungenügend, da diese $2 \cdot 16000 = 32000$ Hz erfordern würde. Betrachten wir nun den Bereich der Kurzwellen von 200 bis 600 m. Dabei ergibt sich die Anzahl der möglichen Übertragungen zu $\frac{\nu_1 - \nu_2}{9000}$, wenn ν_1 und ν_2 die Grenzfrequenzen des Bereiches sind. Für die Wellenlängen von 600 m bzw. 200 m ergeben sich nun $\nu_2 = 500000$ Hz bzw. $\nu_1 = 1500000$ Hz, d.h. $\frac{1000000}{9000} = 111$ Sender.

Der Bereich der Mittelwellen ist bereits vollständig aufgeteilt, und es ist nicht möglich, einen weiteren Sender dort unterzubringen, ohne die Empfangsbedingungen zu verschlechtern. Ähnliche Betrachtungen gelten für Kurz- und Ultrakurzwellen. *Der Weiterentwicklung des Rundfunks sind daher durch diese Schwierigkeiten natürliche Grenzen gesetzt.*

Die Prinzipien der modernen Telephonie

Da wir die Verfahren, die bei der modernen Telephonie über große Entfernungen angewandt werden, bereits betrachtet haben, können wir uns hier kurz fassen. In den letzten Jahren wurde ein umfangreiches Programm realisiert:

a) Es wurden Möglichkeiten für Telephonate von einem beliebigen Punkt zu einem anderen, irgendwo auf der Erde gelegenen Punkt geschaffen. Zu diesem Zweck mußten die in den Kabeln und Leitungen auftretenden Verluste kompensiert werden. Man schaltete daher bei langen Kabeln etwa alle 70 oder 80 km Verstärker ein, die die Signale automatisch wieder auf die ursprüngliche Stärke bringen. Außerdem mußten Verbindungen mit den Modulatorkreisen, den Sendern der drahtlosen Überseetelephonie usw. geschaffen werden.

b) Der Wirkungsgrad der vorhandenen Anlagen sollte erhöht werden. Zu diesem Zweck ging man zu mehreren Übertragungen auf der gleichen Leitung über und nutzte dabei die Tatsache aus, daß für die kommerzielle Telephonie der Frequenzbereich zwischen 250 Hz und 2700 Hz ausreicht. In diesem Frequenzbereich möge

die erste Verbindung hergestellt sein. Ein zweites Gespräch überlagert man einer Trägerwelle von 4000 Hz. Nach der Überlagerung benötigt man also die Frequenzbänder $\omega + \alpha$, $\omega - \alpha$, d.h. in unserem Beispiel 4000 + 250 Hz bis 4000 + 2700 Hz bzw. 4000 — 250 Hz bis 4000 — 2700 Hz. Durch ein Hochpaßfilter wird nun das untere dieser beiden Frequenzbänder unterdrückt und das obere Frequenzband über den gleichen Stromkreis übertragen wie das Gespräch (*1*). Am Empfangsort ordnet man nun ein Tiefpaßfilter an, das die unterhalb 4000 Hz liegenden Frequenzen und damit das Gespräch (*1*) separiert. Der restliche Frequenzbereich wird einer neuen Trägerwelle von 4000 Hz überlagert. Durch die niedrigere Überlagerung $\omega - \alpha$ erhalten wir nur das Frequenzband 2700 bis 250 Hz, das der zweiten Verbindung entspricht, die man nach dem Filtern zwischen den Teilnehmern herstellen kann.

Dies ist das Prinzip der *Trägertelephonie*. Systeme mit drei Kanälen sind weit verbreitet, und auch Systeme mit zwölf Kanälen sind in Betrieb. In Amerika werden Versuche mit Breitbandkabeln durchgeführt, über die 200 Gespräche gleichzeitig übertragen werden. Dabei muß für jeden Kanal ein Frequenzbereich von 4000 Hz zur Verfügung stehen. Systeme für viele Gespräche erfordern also die Möglichkeit, sehr hohe Frequenzen übertragen zu können. Man benötigt also Kabel, in denen die hohen Frequenzen nicht wesentlich geschwächt werden. Daraus resultiert die Technik der *Koaxialkabel*, die wir bereits (Kapitel Ausbreitung auf Drähten) behandelt haben.

Beträchtliche Störungen erleidet die moderne Telephonie durch Interferenzen mit Hochspannungsleitungen sowie Interferenzen zwischen benachbarten Telephonkreisen (*Diaphonie*). Durch verschiedene Unvollkommenheiten (kapazitive oder induktive Kopplung zwischen verschiedenen Kabeln), die man mit Hilfe der bereits (Seite 328) beschriebenen Abschirmungen oder durch Kompensation und Aufhebung der Kopplung zu verhindern sucht, können Gespräche von einem Stromkreis auf den anderen übergehen.

Anmerkung: In den letzten Jahren hat sich infolge der großen technischen Fortschritte die Trägertelephonie immer weiter durchgesetzt. Die Untersuchungen des Sonnen- und des galaktischen Rauschens führten zu einem neuen Zweig der Wissenschaft, der Radioastronomie, die sich sehr schnell entwickelt.

IONENLEITER. ELEKTROLYSE. HALBLEITER

I. KAPITEL

Die Elektrolyse

Wird der Stromdurchgang durch eine Substanz von bestimmten chemischen Effekten begleitet (abgesehen von der einfachen Erwärmung durch den JOULEschen Effekt), so nennt man diese Substanz einen *Elektrolyt* und die Gesamtheit der beobachteten Tatsachen *Elektrolyse* (oder elektrolytische Zersetzung).

Säuren, Basen und Salze sind Elektrolyte. Es ist jedoch möglich, daß diese Substanzen eine zur Beobachtung der eintretenden Effekte nicht ausreichende Leitfähigkeit besitzen. In diesem Fall erwärmt man die entsprechende Substanz, es zeigt sich jedoch nur ein größenordnungsmäßiger Unterschied zwischen Isolator (z. B. kaltem Glas) und Elektrolyt (weiches Glas bei 450° oder geschmolzenes Glas zwischen 550° und 600 °C).

Für destilliertes Wasser findet man eine sehr geringe Leitfähigkeit von etwa $1-2 \cdot 10^{-6}\ \Omega^{-1}\ \mathrm{cm}^{-1}$. Nach KOHLRAUSCH besitzt *sehr reines* Wasser eine noch 30–40 mal geringere Leitfähigkeit. Löst man in 1 l Wasser jedoch z. B. 0,1 g Kaliumchlorid, so steigt die Leitfähigkeit bereits auf $160 \cdot 10^{-6}\ \Omega^{-1}\ \mathrm{cm}^{-1}$ an. Man hat dann eine *elektrolytische Lösung* hergestellt, bei der sich die Phänomene der Elektrolyse besonders ausgeprägt zeigen. Säuren, Basen und Salze bilden, in Wasser oder in anderen Lösungsmitteln gelöst, natürlich ausgezeichnete Elektrolyte.

Die Betrachtung der Leitfähigkeit von Lösungen läßt sich nur durch eine allgemeine Untersuchung der Lösungseigenschaften durchführen. In diesem Kapitel soll ein kurzer Abriß der *wesentlichen Grundlagen* zum Verständnis der folgenden Kapitel gegeben werden, wobei die Theorie der Ionen und ihre Entwicklungen nicht erwähnt werden.

Experimentelle Feststellungen

I. Wir betrachten eine wäßrige Kupfersulfat-($CuSO_4$-)Lösung, durch die zwischen zwei in die Lösung getauchten Kupferplatten (den *Elektroden*) ein Strom fließt. Nach einer allgemeinen Übereinkunft nennt man die Elektrode, durch die der Strom *eintritt*, *Anode* und die *Austrittselektrode Kathode*. Diese Definition ist, wie wir sehen, mit der Bezeichnungsweise bei Elektronenröhren (Dioden, Trioden usw.) übereinstimmend. Im Falle der Elemente und Akkumulatoren wird diese Definition noch eine Erklärung benötigen, da sie zweideutig ist. Die aus Trog und Elektroden bestehende Anordnung nennt man elektrolytische Zelle.

Man kann nun folgende Tatsachen beobachten:

1. Die Masse der $CuSO_4$-Lösung *ändert sich nicht* (abgesehen von einer geringen Erwärmung durch den JOULEschen Effekt). Die *Gesamtkonzentration* bleibt konstant.

2. *Die Anode* (d.h. die mit dem +-Pol des den Strom liefernden Generators verbundene Kupferelektrode) löst sich auf, und das Kupfer wandert in Form von Kupfersulfat in die Lösung.

3. *Die Kathode* (die mit dem —-Pol des Generators verbunden ist) wird schwerer, da sich auf ihr aus der Lösung herrührendes Kupfer abscheidet.

4. In der Nähe der beiden Elektroden treten *Konzentrationsänderungen* auf. Im betrachteten Falle zeigt sich an der Anode eine Konzentrationszunahme und an der Kathode eine Konzentrationsminderung.

II. Wir betrachten die gleiche $CuSO_4$-Lösung, diesmal jedoch mit *Platinelektroden* (und nicht mehr Kupferelektroden). Dabei beobachten wir:

1. Auf der Kathode scheidet sich wieder Kupfer ab.

2. Die Platinanode wird nicht aufgelöst. In der Nähe der Anode tritt freie Schwefelsäure H_2SO_4 auf, während sich auf der Oberfläche der Platinanode gasförmiger Sauerstoff (als Bläschen) anlagert.

III. In anderen Fällen verursachen *Sekundärreaktionen* auf der Oberfläche der Elektroden verschiedene andere Erscheinungen.

1. Benutzt man zwei Platinelektroden und als Elektrolyt eine verdünnte H_2SO_4-Lösung, so bildet sich an der Kathode gasförmiger Wasserstoff und an der Anode Sauerstoff, während sich Schwefelsäure in der Lösung wiederbildet.

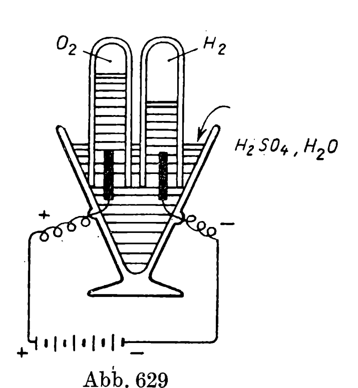


Abb. 629

Dieses Verhalten läßt sich leicht mit einem *Voltameter* nachweisen. Dies besteht aus einem Gefäß mit zwei Platinelektroden, an denen die freigewordenen Gase gesammelt werden (Abb. 629).

In diesem Falle läuft also die Elektrolyse offensichtlich auf eine Zersetzung des Wassers hinaus, während die Säure nur als chemischer Katalysator wirkt.

2. Benutzt man eine NaCl-Lösung als Elektrolyt, so bildet sich an der Kathode freier Wasserstoff, während man an der Anode je nach der Konzentration der Lösung und der Art der Elektroden das Auftreten von freiem Chlor, eine Auflösung der Anode oder, wie bei der Zersetzung des Wassers, freien Sauerstoff beobachtet.

Es kann offensichtlich angenommen werden, daß sich Na an der Kathode abscheidet, dort mit dem Wasser reagiert und Wasserstoff frei wird, während an der Anode Chlor frei wird. Die Elektrolyse besteht also in einer Umwandlung von NaCl in NaOH, wobei einerseits Wasserstoff und Chlor abgeschieden werden und andererseits das Wasser verbraucht wird.

Anionen und Kationen. FARADAYsche Gesetze

Die Gesamtheit der beobachteten Tatsachen läßt sich immer durch eine scheinbar von dem Strom hervorgerufene Zersetzung erklären, die jedoch aus einer einfachen Dissoziation der einzelnen Moleküle des Elektrolyts in zwei Teile, die sogenannten *Anionen* und die *Kationen*, resultieren kann. Die Anionen sammeln sich dabei an der Anode, während die Kationen zur Kathode wandern. Dabei ist noch zu beobachten, daß diese *Ionen* (Anionen und Kationen) auf den Elektrodenoberflächen Sekundärreaktionen hervorrufen können.

Das erstmals 1800 von VOLTA konstruierte Element ist ein gutes Hilfsmittel zur Untersuchung der Elektrolyse. 1806/07 entdeckte DAVY die elektrolytischen Eigenschaften, und es gelang ihm, Soda und Pottasche, die bis dahin als Element angesehen wurden, zu zerlegen. M. FARADAY veröffentlichte 1833 quantitative Untersuchungen, die ihn auf folgende Gesetze führten:

Die Menge des während einer bestimmten Zeit an jeder Elektrode abgeschiedenen Stoffes ist der während dieser Zeit vom Strom durch den Elektrolyt transportierten Elektrizitätsmenge proportional.

Die durch gleiche Elektrizitätsmengen abgeschiedenen Stoffmengen verschiedener Elektrolyte sind einer Größe proportional, die für jeden Stoff charakteristisch ist und elektrochemisches Äquivalent genannt wird.

Dieses elektrochemische Äquivalent oder Äquivalentgewicht kann als Verhältnis des *Atomgewichts* zur *Wertigkeit* dargestellt werden, wenn man die Elektrizitätsmenge zu 96490 Coulomb wählt.

Wir können also sagen: 96490 *Coulomb verschieben ein Grammäquivalent. Dies gilt für alle elektrolytischen Stoffe.* (Man nennt 96490 die FARADAYsche Konstante.)

Die Äquivalentgewichte werden in g/Coulomb oder in g/A · h angegeben. Betrachten wir z. B. einwertiges Silber, wie es in den meisten seiner Salze auftritt, so finden wir sein elektrochemisches Äquivalent zu 0,0011183 g/Coulomb oder 4,026 g/A · h.

Durch die angegebenen FARADAYschen Gesetze wird die Elektrolyse in chemischer Hinsicht beschrieben.

Stromdurchgang im Elektrolyt

Die gleichen FARADAYschen Gesetze geben eine Vorstellung des *elektrischen Mechanismus* der Elektrolyse. Die Erklärung scheint sehr einfach: Jedes Ion ist Träger elektrischer Elementarladungen, deren Anzahl gleich seiner Wertigkeit ist. Die Anionen tragen negative Ladungen (Elektronen), die Kationen positive Ladungen (d. h., es sind weniger Elektronen vorhanden, als zu einer Neutralisation des Ions erforderlich sind). Die Verschiebung dieser mit den Anionen und Kationen verbundenen Ladungen im angelegten elektrischen Feld verursacht den Stromtransport. Die geladenen Ionen führen keine chemischen Reaktionen aus. Erreichen sie dagegen die Elektroden, so geben sie ihre Ladungen an den äußeren Stromkreis ab und können anschließend an eventuellen chemischen Reaktionen teilnehmen, als Niederschlag ausfallen oder in Gasform entweichen. Aus dieser Erklärung folgt notwendig, daß Ne (wobei e die Elementarladung und N die LOSCHMIDTsche Zahl sind) gerade gleich 96490 Coulomb ist, was durch von N und e unabhängigen Messungen gut bestätigt wurde.

Diese numerische Übereinstimmung gestattete einen weiteren Fortschritt in der Erklärung: Die elektrolytische Zersetzung ist nicht nur auf den Stromdurchgang zurückzuführen, sondern die zum Stromdurchgang erforderliche Tatsache, da sie die Bewegung der Ladungen verursacht.

Der *Wasserstoff* der Säuren, die *Metalle* in Basen und in Salzen stellen immer Kationen dar, d.h., sie sind positiv geladen, während die Radikale von Säuren, Basen und Salzen immer Anionen, d.h. negativ geladen, sind.

In der Praxis werden die Ionen in chemischen Formeln mit einem +- oder —-Zeichen, je nach dem Charakter ihrer Ladungen, versehen.

Elektrische Beschreibung der Elektrolyse. Elektromotorische Gegenkraft des Elektrolysentroges. Polarisation des Voltameters

Es ist selbstverständlich, daß der Stromdurchgang in einem Elektrolyt durch einen *Widerstand* bestimmt wird, der der Leitfähigkeit des Troges entspricht.

Dieser Widerstand zeigt sich z.B. bei einem Bad aus Kupfersulfat mit zwei Kupferelektroden: Der Gesamteffekt ist einem Metalltransport von Anode zu Kathode äquivalent, es tritt keine zuzuführende oder zu absorbierende Energie einer chemischen Reaktion auf, und die einzige zu überwindende Potentialdifferenz ist durch das OHMsche Gesetz gegeben. Bei der üblichen Wahl der Stromdichten liegt diese Potentialdifferenz in der Größenordnung einiger $^1/_{100}$ Volt und ist gleich dem mit dem *inneren Widerstand* des Troges multiplizierten Strom.

Verwendet man dagegen zwei *verschiedene* Elektroden, so tritt bei ihrem Eintauchen in das Bassin sofort eine elektromotorische Kraft zwischen ihnen auf. Wir haben also ein *elektrisches Element* gebildet (siehe weiter unten das Kapitel über Elemente). Diese elektromotorische Kraft beträgt etwa 1 bis 2 Volt.

Läßt man mit Hilfe eines *äußeren Generators* in diesem Element einen Strom fließen, so addiert oder subtrahiert sich die elektromotorische Kraft je nach der Richtung des Stroms zu der elektromotorischen Kraft des Generators, während der OHMsche Spannungsabfall immer die elektromotorische Kraft, die den Stromdurchgang hervorruft, vermindert (verallgemeinertes OHMsches Gesetz).

Unabhängig von dieser elektromotorischen Kraft des Bassins und der Elektroden sowie in Fällen, in denen diese elektromotorische Kraft wegen der Symmetrie zwischen den Elektroden Null ist, stellt man das Auftreten einer beträchtlichen *elektromotorischen Gegenkraft, die vom Durchgang des Stromes herrührt*, immer dann fest, wenn der Stromdurchgang eine Veränderung des Elektrodenzustandes hervorruft. Obwohl diese Veränderungen im allgemeinen von Sekundärreaktionen herrühren, müssen sie doch beachtet werden, da sie sich bei den meisten Anwendungen stark bemerkbar machen.

Unterliegen die Elektroden einer vom Durchgang des Stromes herrührenden Veränderung, so spricht man von einer *Polarisation*. Diese Polarisation äußert sich immer durch eine *dem Stromdurchgang im Elektrolyt entgegengesetzte elektromotorische Gegenkraft*. Tritt diese in einer Batterie auf, so wird sie deren elektromotorische Kraft *verringern*.

Wir wollen nun ein $CuSO_4$-Bad mit zwei Kupferelektroden betrachten. Während sich die Anode auflöst, zeigt die Kathode eine Massenzunahme. Die Natur der Elektroden verändert sich jedoch nicht. Die an der Anode stattfindende Sekundär-

reaktion bildet wieder Schwefelsäure, sobald das SO_4^{--}-Anion an der Anode seine beiden Elektronen abgegeben hat:

$$SO_4 + H_2O \rightarrow H_2SO_4 + O.$$

Die Säure greift dann wieder das Kupfer der Anode an, und es bildet sich $CuSO_4$ und H_2O. An der Anode entweicht dabei kein freier Sauerstoff. *Durch diese Sekundärreaktion wird also glücklicherweise eine Polarisation der Zelle verhindert*, und es tritt keine elektromotorische Gegenkraft der Polarisation auf. Das Kation Cu^{++} hat indessen seine beiden positiven Ladungen unabhängig davon zur Kathode transportiert und deren Masse vergrößert.

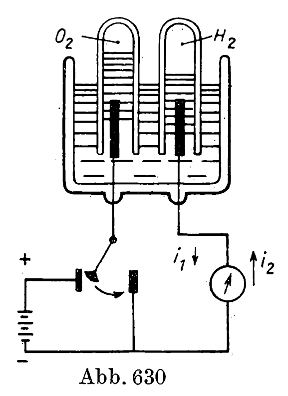


Abb. 630

Nun betrachten wir dagegen ein *Voltameter* mit Platinelektroden in verdünnter Schwefelsäure und behandeln folgendes Experiment (Abb. 630).

Über einen Kommutator kann dieses Voltameter entweder von einer Batterie geringer elektromotorischer Kraft (etwa 3 Volt) gespeist oder als Element geschaltet werden. Außerdem liegt ein Milliamperemeter oder, besser noch, ein Oszillograph im Stromkreis.

Ist das Voltameter anfänglich in einem neutralen Zustand, so fließt kein Strom durch das Milliamperemeter. Schließt man den Stromkreis über eine Batterie, so beobachtet man einen sehr steilen Stromanstieg, der jedoch in Bruchteilen einer Sekunde wieder auf einen Gleichgewichtswert i_1 absinkt. Dieses Absinken wird auf eine *Polarisation* der Elektroden durch den freigewordenen Sauerstoff an der Anode und den freigewordenen Wasserstoff an der Kathode verursacht. Die Elektroden zeigen ein ähnliches Verhalten wie die Zellen einer Batterie, und es entsteht eine elektromotorische Gegenkraft (in der Größenordnung von 2 V), die dem Stromdurchgang entgegenwirkt. Im Gleichgewichtszustand zersetzt der reduzierte Strom das Wasser des Voltameters mit einer konstanten Geschwindigkeit, und die elektromotorische Gegenkraft ist die elektrische Form der zur Aufrechterhaltung dieser chemischen Zersetzung des Wassers notwendigen Leistung. Die Zersetzungsgeschwindigkeit wird durch den Stromdurchgang nach den FARADAYschen Gesetzen bestimmt.

Nun legen wir den Schalter sehr schnell in die Rechtsstellung um. *Während einiger Sekunden* zeigt sich im Instrument ein rasch abnehmender Strom i_2, dessen Richtung umgekehrt zu i_1 verläuft. Das so gebildete Voltameter mit polarisierten Elektroden wirkt, wenn es belastet wird, wie ein *Element*. Durch die entgegengesetzte Richtung des Stromes erfährt auch die Polarisation eine Umkehrung, d. h., die Elektroden werden *depolarisiert*. In diesem Fall werden sich freier Wasserstoff an der in Abb. 630 links dargestellten Elektrode und freier Sauerstoff an der rechten Elektrode abscheiden. Nach kurzer Zeit befinden sich die Elektroden wieder in neutralem Zustand. Der Strom und die elektromotorische Kraft verschwinden und bleiben Null.

Der ebenbeschriebene Vorgang ist das bekannte Experiment der *Polarisation eines Voltameters*, bei dem während einiger Sekunden eine *Akkumulatorwirkung* zu

beobachten ist. Durch Verbesserung der praktischen Bedingungen gelangt man zu den gebräuchlichen Akkumulatoren (siehe weiter unten).

Bei diesen Betrachtungen muß jedoch auch die *Nomenklatur* beachtet werden: Wird der Schalter S umgelegt, so verändert sich die Richtung des Stromes. Die linke Elektrode in Abb. 630, die im Fall (*1*) *Anode* war, wirkt im Fall (*2*) als *Kathode*, bleibt allerdings +-Pol. Entsprechendes gilt natürlich für die rechte Elektrode und für jede andere Zelle. Diese Bezeichnungen stimmen mit den von FARADAY gewählten überein. Die Darstellung hat den Vorteil, daß der Wasserstoff oder das Metall (d.h. das Kation) sich *in jedem Fall gegen die Kathode* bewegt. Interessiert man sich dagegen nur für Strom, Spannung usw., so wählt man an Stelle von *Kathode* und *Anode* zweckmäßiger die Bezeichnungen —-Pol und +-Pol. Bei den üblichen Akkumulatoren ist nicht die *Anode* (z.B.) durch eine bestimmte Farbe gekennzeichnet, sondern der entsprechende Pol.

Bei Elementen dagegen ist die Anode immer durch den —-Pol, die Kathode durch den +-Pol gegeben, wenn das Element als Generator wirkt und damit die Stromrichtung festliegt.

Technische Anwendungen

Wir wollen kurz die wichtigsten technischen Anwendungen der Elektrolyse erwähnen.

1. *Metallurgie, Herstellung bestimmter Metalle durch Elektrolyse ihrer geschmolzenen Salze.* Ein typisches Beispiel ist die Aluminiumherstellung durch Elektrolyse geschmolzenen Kryoliths (siehe die entsprechenden chemischen Lehrbücher).

2. *Elektrolytische Reinigung von Kupfer.* In einem Trog mit $CuSO_4$-Lösung werden die Anode aus zu reinigendem Kupfer, die Kathode aus reinem Kupfer (99,99% Cu) gebildet. Bei ordnungsgemäß durchgeführter Elektrolyse wird nur das reine Kupfer zur Vergrößerung der Kathodenmasse beitragen. Dabei sind natürlich die *Arten der Anodenverunreinigungen* zu beachten. Sobald die Anode in das Bad eintaucht, bilden die metallischen Verunreinigungen mit dem umgebenden Kupfer ein *kurzgeschlossenes Element.* Es ist erforderlich, darauf zu achten, daß die Verunreinigungen auf der Anode verbleiben und nicht zur Kathode wandern, d.h. es spielen also sowohl Konzentration und Temperatur als auch die Stromdichte eine große Rolle.

3. *Galvanoplastik.* Zu künstlerischen oder technischen Zwecken soll manchmal ein bestimmtes Objekt mit einem Metallüberzug versehen werden. Dazu bringt man das Objekt als Kathode in ein Elektrolysebad. Beim Stromdurchgang schlagen sich die Kationen als gleichmäßige Auflage auf dem Objekt nieder. Handelt es sich um einen Gegenstand aus nichtleitendem Material, so bestreicht man ihn gleichmäßig dünn mit Graphit und erhält, wenn man nun eine Elektrolyse durchführt, eine metallische Form des betreffenden Objektes. Diese Form kann man dann leicht ablösen. Die Güte, die Gleichmäßigkeit und die Dicke des Überzuges hängen von einigen wählbaren Parametern ab: Temperatur, Konzentration, Stromdichte, Form der Elektroden usw.

Diese Technik wird besonders beim elektrolytischen Vernickeln ausgenutzt. In vielen Fällen erweist es sich als zweckmäßig, Stahl oder andere Metalle durch einen Nickelüberzug gegen Korrosion zu schützen. In neuerer Zeit ist das Vernickeln

jedoch durch elektrolytisches Verchromen verdrängt worden, da sich der Chromüberzug von verschiedenen Gesichtspunkten aus (Haltbarkeit, Politur, Festigkeit, Reibungswiderstand, usw.) als günstiger erwiesen hat.

4. *Das elektrolytische Polieren* ist eine Weiterentwicklung der Galvanoplastik. Bei der Elektrolyse bewegen sich in dem Trog mehr oder weniger gleichmäßig und turbulent verschiedene in der Lösung enthaltene oder durch Sekundärreaktionen hervorgerufene Substanzen. Diese Bewegungen werden durch die im Trog freiwerdende JOULEsche Wärme beeinflußt. Sie müssen, wenn eine gleichmäßige Politur angestrebt wird, beherrscht werden. Die Erfahrung hat gezeigt, daß bei der Wahl eines *extrem viskosen Bades* (z.B. durch Hinzufügen einiger Tropfen Glyzerin, konzentrierter Phosphate usw.) auf der Oberfläche der Elektroden eine Steuerung allein durch die Diffusion erreicht werden kann. Verwendet man eine *lösliche Anode*, so werden sich ihre kleinen Unebenheiten schneller auflösen als die angrenzenden Flächen, und man erzielt gute Poliererfolge (z.B. bei verschiedenen Anwendungen in der Mechanik, wo eine geringe Reibung erwünscht ist, oder in der Metallographie).

II. KAPITEL

Elektrische Akkumulatoren

Im Jahre 1801 beobachtete der französische Physiker GAUTHEROT, daß ein Voltameter, durch das ein Strom aus einem Voltaelement geflossen war, während einer kurzen Zeit nach dem Abschalten einen Strom in entgegengesetzter Richtung zeigte. Ein solches Voltameter bezeichnete er daher als „Sekundär“.[1])

Einige Jahre später experimentierten RITTER und noch etwas später LARIVE mit verschiedenen Metallen und Elektrolyten, und im Jahre 1825 befaßte sich KASTNER mit der Verwendung von Blei als Elektrodenmaterial. 1843 brachte WHEATSTONE durch chemische Verfahren Bleiüberzüge auf Platinplatten an, und diese Experimente, die 1854 von SISTENDEN wiederholt wurden, boten eine sehr gute Möglichkeit, die Entladungszeit zu verlängern.

GASTON PLANTÉ schließlich gelang es 1860, den ersten verwendbaren Akkumulator herzustellen, nachdem er 1859 Verfahren gefunden hatte, dem Blei eine große wirksame Oberfläche zu geben.

Obgleich bereits zahlreiche Elektrodenpaare bekannt waren, dauerte es nahezu 40 Jahre, bis die Aufmerksamkeit der Forscher auf die Verwendung von Alkalielektrolyten für Akkumulatoren gerichtet wurde. Die in dieser Zeit entwickelten Akkumulatoren waren eine Verbesserung der zuerst von LALANDE und CHAPERON (1881) mit Kupferoxyd, Kalilauge und Zink und von ARON (1868) mit Quecksilberoxyd, Kalilauge und Zink hergestellten Elemente. Nach und nach ging man dann zur Verwendung von Kupfer, Eisen, Nickel und Cadmium über.

Von allen diesen Kombinationen haben sich zwei bis heute erhalten: Der EDISON-Akkumulator (1899) mit Nickel- und Eisenelektroden in Kalilauge und der von JUNGNER mit Cadmium- und Nickelelektroden entwickelte Akkumulator.

---

[1]) Dieses Experiment der Polarisation des Voltameters wurde bereits auf Seite 661 beschrieben.

1899 stellte JUNGNER fest, daß auch Silber in Verbindung mit einer Kupferelektrode zu den aktiven Materialien gehört. JIRSA und SCHNEIDER (1927) arbeiteten mit einer negativen Eisen- und einer Silberelektrode. 1936 wurde das Eisen durch lösliches Zink und dieses 1944 durch unlösliches Zink ersetzt. Auf diese Weise gelang es, besonders leichte Akkumulatoren herzustellen.

Bleiakkumulatoren

Der Bleiakkumulator besteht aus zwei in verdünnte Schwefelsäure getauchten Bleiplatten. Verbindet man diese Platten mit einer Gleichstromquelle, so tritt eine Dissoziation des Elektrolyts in H_2^{++}- und SO_4^{--}-Ionen auf. Die SO_4^{--}-Ionen wandern zum +-Pol, die H_2^{++}-Ionen zum —-Pol.

Während dieses Versuches zeigt sich auf der Anode PbO_2, und auf der Kathode entweicht der Wasserstoff, ohne mit der Bleielektrode zu reagieren.

Die chemische Formel dieses Vorganges lautet

$$Pb + H_2SO_4 + 2\,H_2O + Pb = PbO_2 + H_2SO_4 + Pb + 2\,H_2 .$$

Es verbleiben also als Batterieelemente

$$\oplus\ PbO_2 - H_2SO_4 - Pb\ \ominus,$$

deren Entladung praktisch unmöglich ist, da die negative Bleielektrode eine zu geringe aktive Oberfläche besitzt und sich während der Aufladung nicht verändern kann und auch während der Entladung nur an der Oberfläche Sulfat bildet.

Die Beobachtung dieser Tatsache führte PLANTÉ im Jahre 1860 auf eine Methode, die negative Elektrode zu formieren. Sie besteht darin, während anwachsender Zeiten die Elektroden abwechselnd als Anode und als Kathode zu benutzen, um die Bildung von PbO_2 und $PbSO_4$ zu verstärken.

Die Formation wird als vollständig bezeichnet, wenn das reine Blei gerade noch ausreicht, einen mechanischen Aufbau der Elektroden zu gestatten. Diese Elektroden bestehen dann aus einer porösen metallischen Masse.

Die Richtung des Aufladestromes ist also eindeutig festgelegt, und man erhält einen eine längere Zeit andauernden Entladungsstrom in entgegengesetzter Richtung. Die Polarität des Akkumulators wird nicht verändert, d.h., die bei der Aufladung mit dem +-Pol verbundene Elektrode bildet auch bei der Entladung den +-Pol. Beobachtet man die H_2SO_4-Konzentration des Elektrolyts, so findet man wegen der Bildung von Bleisulfat auf jeder Elektrode nach der Entladung eine beträchtliche Konzentrationsverringerung.

Das Experiment zeigt weiterhin, daß die durch den Entladungsstrom erzeugte Bleisulfatmenge proportional der durch den folgenden chemischen Prozeß erhaltenen Elektrizitätsmenge ist:

$$\underbrace{\oplus\ PbO_2 + 2\,H_2SO_4 + Pb\ \ominus}_{\text{aufgeladener Akkumulator}} \rightarrow \underbrace{PbSO_4 + 2\,H_2O + PbSO_4}_{\text{entladener Akkumulator}} .$$

Die Bleisulfatbildung auf der positiven Elektrode während der Entladung scheint im Widerspruch zu den *Reduktionsphänomenen* zu stehen, die *a priori* an dieser Elektrode auftreten müßten. Früher wurde diese Sulfatbildung als ein

Sekundäreffekt angesehen, und verschiedene Forscher nahmen an, daß sich die Schwefelsäure während der Aufladung in der positiven Materie in Form von $H_2S_2O_7$ konzentriert, welches dann das Bleisulfat angreifen würde, um Peroxyd zu bilden. Diese Auffassung erwies sich jedoch aus zwei Gründen als unzutreffend:

1. Eine solche Reaktion, die man selbst durch Zugabe von $H_2S_2O_7$ nicht auslösen kann, würde eine Abnahme der elektromotorischen Kraft verursachen, während man tatsächlich einen Anstieg festgestellt hat.

2. Wegen der bei den üblicherweise verwendeten Akkumulatoren geringen Elektrolytkonzentrationen bildet sich nur eine sehr geringe Menge $H_2S_2O_7$.

Durch die Bildung von Bleisulfat bei der Entladung entsteht um die Elektroden herum ein schwefelsäurearmer Raum. Es bildet sich Wasser an der positiven Elektrode, die mit SO_4 reagiert, wodurch der erforderliche Sauerstoff frei wird, während an der negativen Elektrode direkt $PbSO_4$ gebildet wird. Die Gesamtgleichung lautet also

$$PbO_2 + Pb + 2\,H_2SO_4 \rightarrow 2\,PbSO_4 + 2\,H_2O\,.$$

Es tritt schließlich eine Reduktion des Bleioxyds durch den Wasserstoff ein, und es bildet sich Wasser. Das vorhandene Blei verbindet sich dann mit dem Anion SO_4.

Eine ganze Anzahl von Theorien stehen zu dieser Sulfatbildung an beiden Elektroden bei der Entladung im Widerspruch und sind Ursache für Diskussionen, die heute noch nicht erloschen sind. Sie beruhen auf der Annahme, daß sich besondere Verbindungen des Bleis bilden, welche die Abweichungen zwischen den gemessenen Werten der elektromotorischen Kräfte und den nach der THOMSONschen Formel berechneten erklären. (In der THOMSONschen Formel

$$E \cdot 96490 = Q \quad \text{(siehe Seite 675)}$$

ist der Temperaturkoeffizient ungerechtfertigt vernachlässigt.)

Eine solche Theorie wird z.B. von CH. FÉRY vertreten, der behauptet, daß bei der Entladung eine Umwandlung der positiven Elektrode von Pb_2O_5 in PbO_2 erfolgt.

H_2SO_4 in %	Dichte bei 15° C	Elektromotorische Kraft[1])		
		Positiv PbO_2-H_2 [Volt]	Negativ $Pb-H_2$ [Volt]	Gesamt PbO_2-Pb [Volt]
4,86	1,428	1,610	0,269	1,879
9,33	1,064	1,617	0,282	1,899
19,76	1,141	1,654	0,317	1,971
26,36	1,192	1,682	0,339	2,021
52,93	1,428	1,801	0,426	2,227

[1]) Die hier angegebenen partiellen elektromotorischen Kräfte sind zwischen der angegebenen und einer sogenannten Standardelektrode, der Wasserstoffelektrode, gemessen. Letztere besteht aus einer Platinplatte, deren Oberfläche vollständig mit Wasserstoff gesättigt ist und die in bezug auf die Polarisation besonders gut definiert ist.

Tatsächlich kann keine Theorie so genau mit der Praxis übereinstimmen wie die der Doppelsulfatbildung. Es ist jedoch nicht ausgeschlossen, Zwischenreaktionen anzunehmen, bei denen sich kompliziertere Produkte als die bisher betrachteten bilden.

Neben der Hauptrolle der Schwefelsäure hängt die elektromotorische Kraft eines Bleiakkumulators von der Konzentration seines Elektrolyts in der in der vorstehenden Tabelle gezeigten Weise ab.

Außerdem verändert sich die elektromotorische Kraft des Bleiakkumulators bei einer Temperatur zwischen 0° und 24° C mit einem negativen Temperaturkoeffizienten (0,72 mV/° C) bei einem schwachsauren Elektrolyt, zwischen 0° und 5,8° Baumé ist dieser Null und erscheint als positiver Temperaturkoeffizient (0,37 mV/° C) zwischen 15° und 20° Baumé.

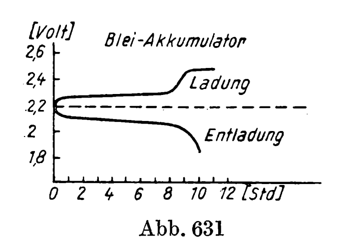


Abb. 631

Die Spannung an den Klemmen eines Bleiakkumulators verändert sich bei Auf- und Entladung entsprechend den Kurven in nebenstehender Abb. 631. Die Entladung des Akkumulators ist im allgemeinen nach 10 Betriebsstunden abgeschlossen, wobei die Spannung zwischen den Klemmen dann nur noch 1,8 V beträgt. Diese Spannung hängt von dem Entladungsstrom und ebenfalls *vom Konzentrationsausgleich des Elektrolyts zwischen den Elektroden ab.*

In einer zu schnell entladenen Batterie tritt ein sehr hoher innerer Widerstand auf, da die Konzentration des Elektrolyts in der Nähe der positiven Platte zu stark abnimmt. Einige Minuten später wird diese Konzentrationserniedrigung durch Diffusion wieder ausgeglichen.

Nach Beendigung der Aufladung werden durch die von der Erhöhung der Spannung an den Klemmen verursachte Zersetzung des Wassers bei einer Spannung von etwa 2,5 V Wasserstoff und Sauerstoff abgeschieden.

Nach vollständiger Aufladung liefert der Akkumulator bei der Entladung wegen der Reversibilität der bei der vorhergehenden Elektrolyse gespeicherten Gase zuerst eine höhere Spannung. Diese fällt dann schnell auf einen Wert ab, der den normalen Reaktionen im Akkumulator entspricht und zwischen 2,1 und 1,9 V schwankt. Diesen Wert behält die Spannung, solange der Elektrolyt genügend Schwefelsäure enthält, um das Blei anzugreifen, und dieses noch nicht vollständig in Bleisulfat umgewandelt ist. Die chemische Reaktion hört nach der Entladung ziemlich plötzlich auf, wodurch der schnelle Abfall von 1,9 V auf wenigstens 1,8 V erklärt wird.

Der *innere Widerstand* eines Bleiakkumulators ist sehr gering und hängt von den Widerständen der Elektroden und des Elektrolyts ab. Die Konzentration des Elektrolyts wird so gewählt, daß sein spezifischer Widerstand einen minimalen Wert (1,5 Ω cm) besitzt. Die Konzentrationsveränderungen können höchstens zu einer Verdoppelung dieses Wertes führen, wenn man von sehr langen Entladungszeiten absieht.

Ein Minimum des inneren Widerstandes eines Bleiakkumulators erreicht man durch Annäherung der Platten. Dabei muß allerdings berücksichtigt werden, daß die wirksame Bleimenge in einem vernünftigen Verhältnis zur Menge der Schwefelsäure stehen und die mechanische Sicherheit gewährleistet sein muß, damit der Akku funktioniert.

Um das Gewicht eines Bleiakkumulators zu verringern, entwickelte FAURE 1880 Gitter aus antimonhaltigem Blei, die er als Gerüst für Oxydplatten benutzte. Die von PLANTÉ eingeführte Formierung wurde durch diese Verbesserung überflüssig.

Diese Oxydplatten, die aus einem mit einer auf der Grundlage von Schwefelsäure hergestellten Bleioxydpaste ausgefüllten Gitter bestehen, werden noch heute verwendet. Untersuchungen zur Verbesserung der Legierung und zur Verlängerung der Lebensdauer sind bisher nicht abgeschlossen.

Entsprechend der Dicke seiner Elektroden gestattet der Bleiakku eine Reihe von Verwendungsmöglichkeiten, die einen Kompromiß zwischen der Leichtigkeit und der entnehmbaren Leistung erfordern (von 30 Wh/kg bei 100 Auf- und Entladungen bis zu 15 Wh/kg bei maximal 1000 Auf- und Entladungen). Ein Auto-Akkumulator z. B. leistet etwa 23 Wh/kg.

Nickelakkumulatoren

Diese Art von Akkus besitzt gegenüber den eben betrachteten Bleiakkumulatoren eine viel größere Robustheit, da die verwendeten Metalle nicht von den alkalischen Elektrolyten (Kalilauge oder Ätznatron) angegriffen werden.

Die positive Elektrode wird auf der Grundlage von $Ni_2O_3 \cdot 3\,H_2O$ oder NiO_2 hergestellt, indem man Nickel oder Nickeloxyd chemisch präpariert. Meist wird jedoch ein anderes, besseres Verfahren benutzt. Auf einer Stahlfolie läßt man abwechselnd Kupfer- und Nickelniederschläge ablagern. Nachdem sich etwa 125 Kupfer- und ebensoviel Nickelschichten niedergeschlagen haben, trennt man den Niederschlag vom Stahlblech ab und teilt ihn in Quadrate von ungefähr 2,5 mm Seitenlänge. Das Kupfer wird nun auf chemischem Wege aus diesen Quadraten herausgelöst und es verbleiben Nickelflocken von etwa 0,001 mm Dicke. Diese werden entweder in perforierten Stahlröhren oder zwischen dünnen perforierten Stahlblechen angeordnet. Die Perforierung ist dabei so, daß etwa 100 Löcher auf einem Quadratzentimeter entfallen.

Die negative Elektrode besteht aus fein verteiltem Eisen und wird entweder zwischen perforierten Eisenplatten oder in Röhren angebracht, die den Röhren der positiven Elektroden ähnlich sind.

Beim EDISON-Akkumulator bestand die negative Elektrode zuerst aus Eisen, dem gelbes Quecksilberoxyd zugesetzt war.

Nach der durch JUNGNER eingeführten Verbesserung wählte man als Material für die negative Elektrode mit Eisenpulver gemischtes Cadmium, um ein Härten des aktiven Materials zu verhindern.

Diese eben beschriebenen Elektroden werden heute fast ausschließlich verwendet.

Um eine Härtung der positiven Elektrode möglichst zu vermeiden, wird zu der 20–30%igen ätzenden Kalilauge bis zur Sättigung Lithiumhydroxyd hinzugefügt.

Mit Hilfe chemischer Formeln ist versucht worden, die Arbeitsweise des NiFe-Sammlers zu beschreiben. Dabei ergeben sich jedoch Unterschiede, die von dem verschieden angenommenen Hydratationsgrad des Eisens herrühren. Läge das Eisen nach der Entladung in Form von $Fe(OH)_2$ vor (FOERSTER), so kann man schreiben

$$Ni_2O_3 \cdot 6\,H_2O + Fe \cdot 2\,H_2O + 2\,H_2O = 2\,NiO \cdot 9\,H_2O + Fe(OH)_2 \,.$$

Befände es sich dagegen im Zustand FeO, so gilt

$$Ni_2O_3 \cdot 6\,H_2O + Fe + 3\,H_2O = 2\,NiO \cdot 9\,H_2O + FeO\,.$$

Durch die Verwendung von Cadmium als negative Elektrode kann die Lebensdauer des Nickelakkumulators vergrößert werden, da sich nur das Eisen mit der Zeit im Elektrolyt löst und auf der positiven Nickelelektrode abscheidet und so einen Kapazitätsverlust verursacht.

Dagegen bildet Eisen-Cadmium kein lokales Element, da die Bildungswärme des Eisenoxyds nur wenig höher als die des Cadmiumoxyds ist. Die einzig mögliche Reaktion

$$Fe + CdO = FeO + Cd$$

verringert die Kapazität nicht.

Die Spannung an den Klemmen eines Akkumulators mit einer Nickel- und einer Eisen-Cadmium-Elektrode ist bei der Aufladung etwas niedriger und bei der Entladung etwas höher als die eines Ni-Fe-Sammlers. Die in Abb. 632 dargestellte Charakteristik entspricht einem Nickel-Cadmium-Akkumulator, wie er von JUNGNER eingeführt wurde und meist verwendet wird.

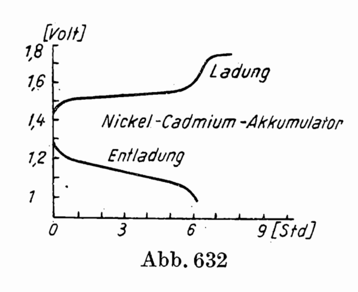


Abb. 632

Der Wirkungsgrad eines Nickelakkumulators in bezug auf Elektrizitätsmenge und Energie ist schlechter als der eines Bleiakkumulators. Er beträgt etwa 58,5 bis maximal 80%, während der des Bleiakkus zwischen 70 und 90% liegt. Diese Tatsache beruht darauf, daß wegen des perforierten Eisen- bzw. Eisen-Nickel-Schutzes eine etwa 20–30% größere Elektrizitätsmenge aufgewandt werden muß, um die eingeschlossene aktive Substanz umzuwandeln. Außerdem variieren Lade- und Entladungsspannung stärker als beim Bleiakkumulator.

Die Kapazität eines Nickelakkumulators verringert sich sehr langsam. Ein starker Leistungsabfall tritt jedoch ein, wenn sich im Elektrolyt Karbonate bilden, wenn z.B. CO_2-haltige Luft hinzutritt. Es erweist sich daher als notwendig, nach etwa 300maliger Aufladung den Elektrolyt zu erneuern. *Diese Karbonatbildung ist der große Nachteil aller Alkaliakkumulatoren.* Man versucht ihm entgegenzutreten, indem man einen Luftzutritt zum Elektrolyt verhindert.

Der innere Widerstand eines Ni-Akkus ist etwa im Verhältnis 2 : 1 größer als der eines Pb-Akkus, da der spezifische Widerstand der Kalilauge größer ist als der von verdünnter Schwefelsäure und außerdem der Plattenabstand größer ist.

Bei tiefen Temperaturen verringert sich die Leistung des Nickelakkumulators stärker als die des Bleiakkus, da sein spezifischer Widerstand bei tiefen Temperaturen stärker ansteigt.

Im unbelasteten Zustand verliert der Nickelakku weniger Ladung als der Bleiakku, es treten jedoch unerwünschte nachteilige örtliche Reaktionen auf, die der Sulfatbildung analog sind.

Die Energie des Ni-Akkus liegt bei Akkumulatoren von wenigstens 10 kg Gewicht in der Größenordnung von 25 Wh pro kg. Obwohl das Gewicht aus Fabri-

kationsgründen nicht wesentlich verringert werden kann, bietet er bei gleicher Beanspruchung gegenüber dem Blei-Akkumulator Vorteile, da dieser bei 2000 Ladungszyklen nur etwa 10 Wh pro kg leistet.

Silberakkumulatoren

Die neueste Konstruktion eines Akkumulators verwendet eine Silberperoxyd- und eine Zinkelektrode in Kaliumzinkat. Der Elektrolyt dieses Elementes verändert sich im Gegensatz zu Elementen mit löslichen Zinkelektroden nicht.

Die Elektroden dieses Akku-Types werden im Gegensatz zu allen bisher betrachteten in pulverisierter Form in Zellophanbeuteln angeordnet.

Die charakteristischen Reaktionen beim Auf- bzw. Entladen lauten

$$Ag + Zn(OK)_2 \rightleftarrows AgO + Zn + H_2O.$$

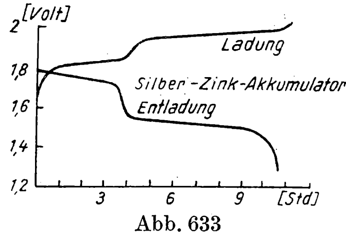


Abb. 633

Der Elektrolyt $Zn(OK)_2$ verändert sich nicht und ist bei allen Ladungs- und Entladungszuständen stark gesättigt.

In keinem Augenblick während der unter normalen Bedingungen erfolgenden Arbeit des Akkus findet ein Zinkaustausch zwischen Elektrolyt und Elektroden statt.

Die in obenstehender Abb. 633 gezeigten Kurven für Auf- und Entladung eines solchen Silber-Zink-Akkumulators wurden in den letzten Jahren von H. André aufgenommen.

Die Knicke in den beiden Kurven werden durch den Übergang von Ag_2O in Silberperoxyd, Ag_2O_2 verursacht und in geringem Maße auf die Absorption und Adsorption von Sauerstoff durch die positive Elektrode zurückgeführt.

Der innere Widerstand dieses Akkus liegt in der gleichen Größenordnung wie der eines Nickelakkus.

Ein sehr großer Vorteil ist der beinahe 98% erreichende Wirkungsgrad in bezug auf die Elektrizitätsmenge. Daher erreicht auch der Wirkungsgrad der Energie einen sehr hohen Wert (85%).

Eine Möglichkeit zu beträchtlicher Gewichtsverringerung beim Silberakku ist dadurch gegeben, daß der außerhalb von Trog und Klemmen auftretende Spannungsabfall vernachlässigbar klein gemacht werden kann. Tatsächlich ist wegen der großen Leitfähigkeit des Silbers und seiner Oxyde kein besonderes Gitter zur Zuführung des Stromes erforderlich. Das negative Zink unterliegt während des Aufladens einer Reduktion und behält während der Entladung seinen leitenden Charakter. Außerdem besitzt es eine sehr große Bildungswärme und entsprechend ein hohes elektrochemisches Äquivalent (1,22 g pro Ah).

Die Energie des Silberakkumulators liegt zwischen 60 Wh pro kg für Elemente von 32 g und 120 Wh pro kg für Elemente in der Größenordnung eines kg, d. h., sie beträgt also das 2- bis 6fache der Energie eines Bleiakkumulators.

Seine Energie pro Volumeneinheit ist ebenfalls höher als die eines Bleiakkus. Obwohl diese Silberakkumulatoren noch in der Entwicklung stehen, kann man ihnen doch eine große Zukunft voraussagen.

III. KAPITEL

Elektrochemische Generatoren

Galvanische Elemente

Arbeitsweise eines galvanischen Elementes

Wir haben bereits im Kapitel über die Elektrolyse (S. 657) gesehen, daß zwei verschiedene leitende Körper, Metalle z. B., die in einen wäßrigen Elektrolyt getaucht werden, einen offenen Stromkreis mit einer Potentialdifferenz darstellen. Zwischen zwei Platten, deren eine aus Kupfer, die andere aus Zink besteht, tritt so in verdünnter Schwefelsäure eine Spannung von etwa 1 V auf.

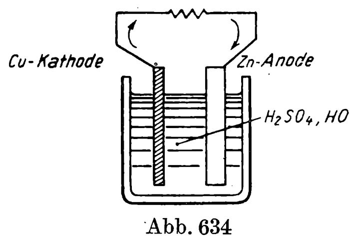


Abb. 634

Verbindet man diese Metallplatten durch einen äußeren Leiter (Abb. 634), so verhalten sich die beiden Metalle wie die Elektroden eines elektrolytischen Bades, die von einem Gleichstrom aus einer äußeren Quelle durchflossen werden. An der Anode, die bei dieser Betrachtung der negative Pol des Elementes (Zinkplatte) sein wird, findet eine Oxydation statt, die eine Auflösung des Metalls verursacht. Am positiven Pol, den die Kathode (Kupferplatte) bildet, findet eine Reduktion statt, die sich im Freiwerden von Wasserstoff zeigt. (Über die Bezeichnung Anode–Kathode siehe Seite 662.)

Diese beiden Reaktionen sind durch die Dissoziation der verdünnten Schwefelsäure bedingt. Die Dissoziationsprodukte reagieren mit den Elektroden exotherm oder endotherm.

In dem eben betrachteten Fall hat man einen offenen Stromkreis:

$$Cu + H_2SO_4 + Zn.$$

Schließt man diesen Stromkreis, so bilden sich

an der Anode $ZnSO_4$,

an der Kathode 2 H;

dieser Wasserstoff entweicht in Form des Moleküls H_2, ohne mit der Elektrode direkt chemisch reagieren zu können.

Diese erste Feststellung zeigt uns, daß nur an der Anode eine chemische Reaktion stattfindet, durch die elektrische Energie an der Elektrode frei werden kann. An der Kathode dagegen entweicht der Wasserstoff ohne weiteren Nutzen.

Polarisation der Elektroden eines galvanischen Elementes

Nach einer sehr kurzen Zeit fließt kein Strom mehr, und entsprechend wird auch kein freier Wasserstoff mehr abgeschieden. Die elektromotorische Kraft des Elementes wird Null, da der bereits auf der Elektrode abgeschiedene Wasserstoff in

dem System Kupfer-Elektrolyt eine „neue Elektrode" bildet, deren elektromotorische Kraft derjenigen der Hauptelektrode entgegenwirkt. Außerdem wächst wegen der Gasschicht auf der Kathode der innere Widerstand des galvanischen Elementes an.

Die elektromotorische Kraft wird nicht immer durch die Polarisation aufgehoben. Betrachtet man z.B. das System Fe—KOH—Zn, so findet man zuerst eine Potentialdifferenz von etwa 1,5 V, die jedoch sehr schnell auf 0,5 V abfällt und dann konstant bleibt, obwohl an der Kathode (+-Pol) immer noch eine intensive Wasserstoffbildung erfolgt. Im Gegensatz zum System Cu—H_2SO_4—Zn wird in diesem Falle die elektromotorische Kraft nicht vollständig durch die Polarisation aufgehoben.

Die Polarisation hängt also von den verwendeten Materialien ab. Sie kann entweder auf beiden Elektroden einzeln oder gleichzeitig auftreten und ist auf den Kontakt der Oxydations- und Reduktionsprodukte mit den Elektroden zurückzuführen. Dennoch kommt der Kathode immer die größere Bedeutung zu.

Will man die Polarisation rückgängig machen, so oxydiert man den freien Wasserstoff in der Nähe der Kathode. Kann man dies vollkommen erreichen, so findet man die gleichen elektromotorischen Kräfte wieder, die der chemischen Reaktion des Elementes entsprechen.

Depolarisation der Kathode eines galvanischen Elementes

Galvanische Elemente mit zwei Flüssigkeiten

Nach der Entwicklung des ersten galvanischen Elementes durch Volta (1800) vergingen etwa 30 Jahre, bis die Phänomene der Polarisation erklärt und die ersten Verfahren zur Depolarisation entwickelt werden konnten.

Die Einführung von Sauerstoff in den Elektrolyten zur Oxydation des Wasserstoffs schien ein geeignetes Verfahren zu sein. Es zeigte sich jedoch, daß bei Zinkelektroden eine direkte Oxydation des Zinks durch die Elektrolyte verursacht wurde, ohne Elektrizität zu erzeugen. Um dies zu verhindern, bot sich die Möglichkeit, zwei verschiedene Elektrolyte zu verwenden, wobei beide mechanisch voneinander getrennt werden mußten, ohne daß jedoch der Ionenaustausch behindert werden durfte.

In dem 1829 von Becquerel entwickelten galvanischen Element wurde dieses Problem auf folgende Weise gelöst: Der Elektrolysetrog wurde durch eine poröse Membran in zwei Teile geteilt, von denen einer, der die Zink-Elektrode enthielt, mit einer Zinksulfatlösung und der die Kupfer-Elektrode enthaltende mit einer Kupfernitratlösung gefüllt war. Die elektromotorische Kraft dieses Elementes betrug 1,12 V.

1836 verwendete Daniell in England einen anderen, aber ähnlichen Aufbau: Die Kupfernitratlösung wurde durch eine Kupfersulfatlösung und die Querwand durch ein Gefäß aus porösem Ton ersetzt. Die zweite Elektrode aus amalgiertem Zink tauchte in eine Lösung von Zinksulfat. Die elektromotorische Kraft dieses Elementes betrug jedoch nur 1,09 V (Abb. 635).

Mit der 1838 von Grove verwendeten Platinkathode in Salpetersäure wurden 1,96 V erreicht. Im folgenden Jahr ersetzte Grove die Platinkathode durch eine

Graphitelektrode. Die chemische Gleichung der Entladung dieses Elementes lautet

$$Zn + H_2SO_4 + 2\,HNO_3 = ZnSO_4 + 2\,NO_2 + 2\,H_2O.$$

Dieser Aufbau wurde etwas später (1843) von BUNSEN beträchtlich verbessert, wobei dieser die Graphitelektrode durch eine Kathode aus Retortekohle ersetzte. Die elektromotorische Kraft lag ebenfalls in der Nähe von 2 V. Für lange Zeit blieb dieses Element von BUNSEN wegen seiner Leistung und seiner Konstanz ein wertvoller Generator, obwohl es den Nachteil des starken Entweichens schädlicher Gase besaß (Abb. 636).

POGGENDORFF vermied diesen Nachteil, indem er die Salpetersäure durch Chromsäure ersetzte. Die Chromsäure gewann er durch Mischung von Kalium-

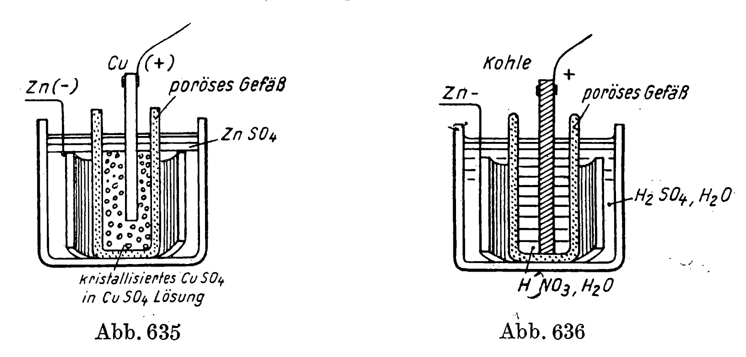


Abb. 635 Abb. 636

bichromat und Schwefelsäure, wobei ein Rückstand von Chromalaun verbleibt. Die elektromotorische Kraft beträgt auch hier etwa 2 V.

Beim Element von GRENET wurde auf die Membran verzichtet, und das Zink konnte sich über der Flüssigkeit befinden.

Elemente mit unlöslichen Depolarisationsstoffen

In dem 1868 von LECLANCHÉ entwickelten Element wurden zum ersten Mal feste und unlösliche oxydierte Substanzen in der Nähe der Kathode zur Absorption des sich bildenden Wasserstoffs ausgenutzt.

Der positive Pol dieses Elementes wurde von einer Mittelelektrode aus Kohle oder gepreßtem Graphit gebildet und war von einem mit Graphit gemischten pulverförmigen Manganbioxyd umgeben. Diese letztere Mischung wurde in einen Stoffbeutel oder in ein poröses Tongefäß gepreßt. Der negative Pol bestand aus einem Stift oder einer Folie aus amalgiertem Zink und wurde außerhalb des porösen Gefäßes angeordnet. Als Elektrolyt diente eine Lösung von Ammoniumchlorid. Die elektromotorische Kraft dieses Elementes schwankte zwischen 1,5 und 1,6 V. Die charakteristische Entladungsgleichung lautet

$$Zn + 2\,NH_4Cl + 2\,MnO_2 = ZnCl_2 + 2\,NH_3 + H_2O + Mn_2O_3.$$

Die sogenannten „Trockenelemente“, die von dieser Anordnung abgeleitet wurden, enthalten einen Elektrolyt fester Form, der meist aus einer neutralen or-

ganischen oder mineralischen Substanz besteht (Agar-Agar, Stärke usw.). Das Zink amalgiert sich automatisch durch die Zugabe von Quecksilberbichlorid zum Elektrolyt.

Das 1882 von LALANDE und CHAPERON entwickelte Element bestand aus Zink-Kalilauge-Kupferoxyd CuO. Die chemische Entladungsgleichung lautet

$$\mathrm{Zn} + 2\,\mathrm{KOH} + \mathrm{CuO} = \mathrm{Zn(OK)_2} + \mathrm{H_2O} + \mathrm{Cu}.$$

Die elektromotorische Kraft beträgt etwa 0,9 V.

Die Elektrode aus Kupferoxyd befindet sich auf dem Boden eines Gefäßes und wird durch einen isolierten Kupferdraht mit dem über den Elektrolyt hinausragenden Teil verbunden.

Die Zinkelektrode wird am Deckel des Gefäßes über der Kathode aufgehängt.

In den neueren Anordnungen befindet sich die Zinkelektrode auf dem Boden des Troges und taucht in ein kleines mit Quecksilber angefülltes Gefäß. Darüber wird eine Platte aus CuO angebracht.

Etwas später (1886) erreichte H. ARON eine Erhöhung der elektromotorischen Kraft auf 1,36 V durch Verwendung der Kombination Zink-Kalilauge-Quecksilberoxyd.

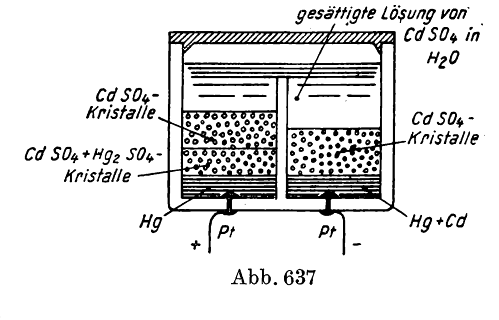


Abb. 637

Diese Anordnung wurde 1942 von RUBEN verbessert, der die Kalilauge durch $\mathrm{Zn(OK)_2}$ ersetzte. Damit erreichte er eine bedeutende Steigerung der Speicherung. Besonders während des letzten Krieges erfuhren derartige Elemente eine große Entwicklung.

Für die Praxis muß noch auf die Magnesiumelemente verwiesen werden. Diese werden durch Ersetzen des Zinks mit Magnesium in den obigen Schemata erhalten. Im allgemeinen wird das Magnesium durch die Elektrolyte so stark angegriffen, daß diese Elemente nicht besonders haltbar sind. Dagegen sind sie sehr praktisch, *da der Elektrolyt erst im Augenblick der Verwendung zugegeben zu werden braucht* oder wenn sie nur für eine einmalige Benutzung verwendet werden (so z.B. für militärische Zwecke). Gegenwärtig versucht man, Magnesiumelemente zu konstruieren, in denen Meereswasser als Elektrolyt verwendet wird.

In den *Normalelementen* hat sich die Verwendung von festen depolarisierenden Stoffen durchgesetzt, da diese eine beträchtliche Verringerung der lokalen Reaktion auf den Elektroden bewirken.

Das Normalelement von WESTON z.B. besitzt eine Anode aus amalgiertem Cadmium, die mit kristallisiertem Cadmiumsulfat bedeckt ist, und eine Quecksilberkathode, über der eine Mischung von Quecksilbersulfat- und Cadmiumsulfat-Kristallen liegt. Die Sulfate über Anode und Kathode sind durch eine gesättigte wäßrige Lösung von Cadmiumsulfat verbunden. Diese beiden Teile sind nebeneinander angeordnet, und der Elektrolyt fließt über beiden Teilen (Abb. 637). Die elektromotorische Kraft des WESTONschen Normalelementes beträgt 1,083 V bei 20° C.

Gouy ersetzte in seinem Normalelement die Anode durch in Zinksulfat tauchendes Zink. Dadurch erreichte er eine Erhöhung der elektromotorischen Kraft auf 1,39 V bei sehr guter Konstanz.

Depolarisation durch atmosphärische Luft

Beobachtungen an Leclanché-Elementen, bei denen das poröse Tongefäß hermetisch nach oben abgeschlossen ist, haben gezeigt, daß diese Elemente einen geringeren Strom liefern als direkt mit atmosphärischer Luft in Verbindung stehende. Durch diese Feststellung veranlaßt, versuchten mehrere Forscher (z. B. Ch. Féry), zur Depolarisation den Sauerstoff der Luft auszunutzen.

Zum Verständnis der Arbeitsweise der durch Luft depolarisierten Elemente wollen wir folgendes Experiment von H. André betrachten:

Ein Glasgefäß (Abb. 638) wird mit einer 25%-KOH- oder -NaOH-Lösung gefüllt. In diesem Gefäß befindet sich eine Zinkanode, die mit einer der beiden Klem-

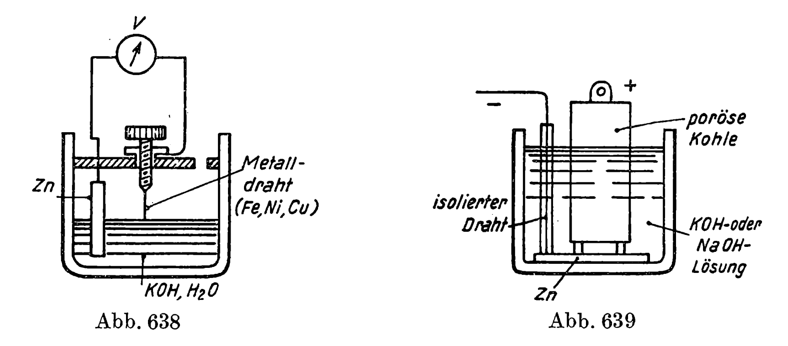


Abb. 638 Abb. 639

men eines empfindlichen Voltmeters verbunden ist. Die andere Klemme des Voltmeters ist mit einem Eisen- oder Nickeldraht verbunden, dessen Spitze mit Hilfe einer Mikrometerschraube langsam in den Elektrolyt tauchen oder aus diesem herausgezogen werden kann.

Taucht der Draht in den Elektrolyt, so tritt nur eine sehr geringe, maximal 0,5 V betragende Potentialdifferenz auf, deren Wert konstant bleibt. Auf diese Weise hat man ein bereits weiter oben beschriebenes galvanisches Element Zn—KOH—Fe hergestellt, dessen positive Elektrode inaktiv ist.

Zieht man nun den Draht langsam mit Hilfe der Schraube aus dem Elektrolyt heraus, so tritt bei der Unterbrechung des Kontaktes zwischen Draht und Oberfläche des Elektrolyts ein plötzlicher Wiederanstieg der elektromotorischen Kraft bis auf 1,25 V auf.

Die Natur des Kathodenmetalls scheint nur einen sekundären Einfluß auf den Wert der elektromotorischen Kraft zu haben. Dies beweist, daß die Wirkung des Sauerstoffs der Luft auf den bei der Elektrolyse an der Kathode gebildeten freien Wasserstoff unabhängig vom Kathodenmaterial ist.

Um die Erfahrung dieses Experimentes praktisch auszuwerten, kann man das beobachtete Phänomen auf geometrische Art durch eine dreifache Unterteilung flüssig-gasförmig-fest verstärken, wobei jedoch der Zutritt der Luft und des Elek-

trolyts zur Kathode nicht beeinträchtigt werden darf. Dies erreicht man, indem man mit einem kapillaren Steigrohr den Elektrolyt über sein normales Niveau hinaus bis an die Kathode steigen läßt. Auf diese Weise kann man Kathoden herstellen, die beträchtliche Ströme zu liefern in der Lage sind.

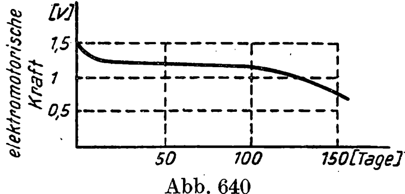


Abb. 640

In dem FÉRYschen Element (Abb 639.) wird als Elektrolyt NaOH verwendet. Die Entladung erfolgt nach der chemischen Formel

$$Zn + 2\,NaOH + O_2 \text{ der Luft} = Zn(ONa)_2 + H_2O.$$

Ein durch Luft depolarisiertes Element kann auch mit Ammoniumchlorid arbeiten. Dabei werden seine Dimensionen geringer, da die Löslichkeit des Zinks in diesem Elektrolyt größer ist. Die elektromotorische Kraft steigt auf 1,5 V an, jedoch sind diese Elemente weniger wirtschaftlich als die gleichen Elemente mit NaOH.

Die Entladung folgt der Gleichung

$$Zn + 2\,NH_4Cl + O_2 \text{ der Luft} = ZnCl_2 + 2\,NH_3 + H_2O.$$

Diese eben beschriebenen luftdepolarisierten Elemente können heute als rationellste Lösung eines elektrochemischen Generators angesehen werden, da in ihnen nur das Zink verbraucht wird.

In Abb. 640 ist die Konstanz der elektromotorischen Kraft eines durch Luft depolarisierten galvanischen Elementes dargestellt.

Theoretische Betrachtung der galvanischen Elemente

Chemische Theorie der Elemente

In den galvanischen Elementen treten chemische Reaktionen eines ganz bestimmten Charakters auf: Sie finden nur statt, solange der Stromkreis offen ist. Schließt man ihn dagegen und es fließt ein Strom, so wird durch den Stromdurchgang der Elektrolyt zersetzt, und die Dissoziationsprodukte greifen die Elektroden an. Diese, oder wenigstens eine von ihnen, werden dabei verbraucht. Die Reaktionen, bei denen eine der Elektroden aufgelöst wird, verlaufen meist exotherm, so daß man aus Gründen der Energieerhaltung die folgende Gleichung annehmen kann:

$$E \cdot 96490 = Q,$$

wobei Q die Reaktionswärme in Joule für ein *Grammäquivalent* und E die elektromotorische Kraft in Volt sind und 96490 Coulomb erzeugt werden.

Die Gleichung, die diese chemische Theorie ausdrückt, bezeichnet man als THOMSONsche Formel.

Betrachten wir nun ein Element mit je einer Elektrode aus Zink und Platin in verdünnter Schwefelsäure. Die Reaktion, bei der die Zinkelektrode von der Schwefelsäure angegriffen und Zinksulfat gebildet wird, besitzt für zweiwertiges

Zink eine Bildungswärme von 37320 Kalorien; das mechanische Wärmeäquivalent des Zinks beträgt 4,2:

$$Q = \frac{37320 \cdot 4{,}2}{2}.$$

Daraus ergibt sich für die elektromotorische Kraft

$$E = \frac{37320 \cdot 4{,}2}{96490 \cdot 2} = 0{,}82\ \mathrm{V}.$$

In dem DANIELLschen Element treten allerdings kompliziertere Berechnungen auf.

In ein durch eine poröse Wand geteiltes Gefäß taucht in den mit einer Zinksulfatlösung gefüllten Teil eine Zinkelektrode und in den anderen mit einer Kupfersulfatlösung gefüllten Teil eine Kupferelektrode. Die beiden Lösungen sind durch die poröse Wand in Verbindung, so daß ein Stromdurchgang möglich ist. Es treten also zwei Reaktionen auf: Die Bildung des Zinksulfats mit 37320 cal und die Zersetzung des Kupfersulfats mit weiteren 12400 cal. Für die gesamte elektromotorische Kraft ergibt die Berechnung

$$E = \frac{(37320 + 12400) \cdot 4{,}2}{96490 \cdot 2} = 1{,}09\ \mathrm{V}.$$

Dieser Wert stimmt gut mit den experimentellen Ergebnissen überein.

Trotzdem gibt es Elemente, deren elektromotorische Kraft auf diese Art nicht vorausbestimmt werden kann.

Thermodynamische Theorie der reversiblen Elemente

Diese Theorie gestattet, eine exakte Beziehung zwischen E und der chemischen Wärme Q anzugeben:

Wenn die Beziehung $E \cdot 96490 = Q$ exakt gilt, dann bedeutet dies, daß die gesamte chemische Energie vollständig in elektrische Energie umgewandelt wird.

Gleichzeitig würde es bedeuten, daß die elektromotorische Kraft des Kontaktes (nach VOLTA) nur ein Maß für die chemische Reaktionswärme ist. *Diese Theorie ist jedoch dann nicht richtig, wenn man während der Benutzung eine Abkühlung oder eine Erwärmung des Elementes feststellen kann,* was oft der Fall ist.

Erwärmt sich das Element, so wandelt sich nur ein Teil der chemischen Energie in elektrische Energie um. Die restliche Energie wird zur Erwärmung des Elektrolyts verbraucht. In diesem Fall gilt

$$E < \frac{Q}{96490}.$$

Zeigt sich dagegen eine Abkühlung, ist es umgekehrt, und es gibt eine von außen zugeführte Wärme, die zu Q addiert werden muß:

$$E > \frac{Q}{96490}.$$

Weiter gilt die VOLTAsche Theorie wieder,[1]) und die elektromotorische Kraft E kann je nach der Art des Metalls berechnet werden. Man erhält also ein galvanisches Element, wenn man in der Lage ist, eine chemische Reaktion zu finden, die den Wärmeaustausch mit dem Äußeren, d.h. die Veränderungen der elektromotorischen Kraft ausgleicht.

Nach der thermodynamischen Theorie wird immer eine *Reversibilität* angenommen, d.h. eine Umkehrung der Phänomene (besonders der chemischen Reaktionen) bei Stromdurchgang in umgekehrter Richtung. Die JOULEsche Wärme Ri^2 muß also vernachlässigbar sein (da sie immer positiv ist). Man nimmt nun eine Reversibilität an, solange die fließenden Ströme nur klein sind. Das DANIELLsche Element ist in chemischer Hinsicht reversibel und ein gutes Beispiel.

Wir wollen mit Q_T die auf thermischem Wege zugeführte Wärme bezeichnen. Kennzeichnet Q die chemische Wärme, so müssen wir aus Gründen der Energieerhaltung schreiben

$$96490\,E = Q + Q_T\,.$$

Einen Ausdruck für Q_T kann man durch die sogenannte CLAPEYRONsche Formel (siehe Lehrbücher der Thermodynamik) erhalten.

Die elektromotorische Kraft eines Elementes bei der Temperatur T werde mit E und die bei der Temperatur $T + dT$ mit $E + dE$ bezeichnet. Das Element möge bei der Temperatur $T + dT$ gerade q Coulomb liefern, d.h., es liefert die elektrische Energie $q(E + dE)$. Nun erniedrigt man die Temperatur auf T und läßt bei dieser Temperatur q Coulomb in entgegengesetzter Richtung fließen, d.h., man führt die elektrische Energie qE zu. Erhöht man die Temperatur wieder auf $T + dT$, so ist der Kreislauf geschlossen. Bei einem solchen Kreislauf beträgt die vom Element *geleistete Arbeit*

$$q(E + dE) - qE = q\,dE\,.$$

Die zugeführte Wärme wurde dazu benutzt, das Element während des Versuchs auf der Temperatur $T + dT$ zu halten und ist nach Definition gerade Q_T. Diese Größe ist in jedem Fall von der chemischen Wärme unabhängig. Nach dem II. Hauptsatz der Thermodynamik ergibt sich für einen Umlauf der Wirkungsgrad $\frac{dT}{T}$, und daraus folgt

$$Q_T = \frac{dT}{T} = q\,dE\,,$$

und daraus schließlich

$$Q_T = q\,T\,\frac{\partial E}{\partial T}\,.$$

Dieser Ausdruck gestattet uns, bei Annahme von $Q_T = 96490$ Coulomb, die HELMHOLTZsche Formel anzugeben:

$$E = \frac{Q}{96490} + T\,\frac{\partial E}{\partial T}\,.$$

[1]) Hierbei handelt es sich um die Kontaktpotentialdifferenz; siehe auch den letzten Abschnitt dieses Kapitels.

Aus dieser Gleichung kann man bei Beachtung der Reversibilität, d. h. bei geringer Belastung, sofort die folgenden Schlüsse ziehen:

Wächst die elektromotorische Kraft E eines Elementes mit der Temperatur T an, so ist diese elektromotorische Kraft größer als das chemische Äquivalent $\frac{Q}{96490}$. Die Belastung des Elementes erfordert mehr Energie, als von der Reaktion geliefert wird, und das Element kühlt sich während der Benutzung ab. Nimmt die elektromotorische Kraft dagegen mit zunehmender Temperatur T ab, so muß umgekehrt geschlossen werden, und das Element erwärmt sich bei Belastung.

Entsprechend kann man je nach der Tatsache, ob sich das Element bei einer geringen Stromentnahme erwärmt oder abkühlt, den Ausdruck $\frac{\partial E}{\partial t}$ als positiv oder negativ bestimmen.

Bei starker Belastung muß die JOULEsche Wärme berücksichtigt werden, und die Reversibilität wird dadurch in jedem Fall aufgehoben.

Die HELMHOLTZsche Formel gilt im allgemeinen auch für Elemente, bei denen wegen der Sekundärreaktionen offensichtlich keine Reversibilität vorliegt. Sie kann auch auf solche speziellen Elemente angewandt werden, bei denen die Asymmetrie zwischen den Elektroden nicht von einem Unterschied in der Natur der beiden Elektroden, sondern von einem unterschiedlichen Medium herrührt. Als Beispiel wollen wir das Element von GROVE angeben oder das sogenannte Sauerstoff-Wasserstoff-Element:

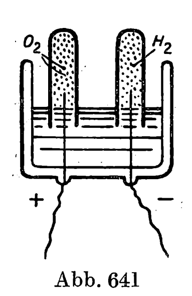


Abb. 641

Zwei Platinelektroden tauchen in ein Gefäß mit verdünnter Schwefelsäure. Über der einen Elektrode befindet sich eine mit Wasserstoff, über der anderen eine mit Sauerstoff gefüllte Glasglocke (siehe Abb. 641).

Das Platin wird nicht angegriffen, und die elektromotorische Kraft rührt von dem die Elektroden umgebenden Wasserstoff bzw. Sauerstoff her. Als Reaktion tritt die Bildung von Wasser auf, wobei 68300 cal pro Mol, d.h. 34150 cal pro Grammäquivalent, frei werden. Das chemische Äquivalent ergibt sich also zu

$$\frac{34150 \cdot 4{,}2}{96490} = 1{,}48\ \mathrm{V},$$

während experimentell nur 1,07 V gemessen werden. Die Differenz entspricht gerade $T\frac{\partial E}{\partial T}$. Dieser Ausdruck ist in diesem Fall negativ. Der Wert von $\frac{\partial E}{\partial T}$ beträgt für das eben betrachtete Element $-0{,}00141$ pro Grad.

Ursprung der elektromotorischen Kraft der Elemente

Wie alle Gleichungen der Thermodynamik ist auch die HELMHOLTZsche Formel nur ein experimentell gefundene Koeffizienten verbindender Rahmen und kann theoretisch nicht erklärt werden. Wir wollen nun versuchen, einen Mechanismus zu finden, der das Entstehen einer elektromotorischen Kraft beim Eintauchen zweier verschiedener Metalle in einen Elektrolyt zu erklären gestattet.

Bei einem solchen Versuch darf man sich nicht auf die ***Austrittsarbeit*** der Elektronen aus nur einem Metall beschränken, wie es bei der ***thermoionischen Emission*** und dem *photoelektrischen Effekt* getan wird. Da die Austrittsarbeit der Elektronen aus beiden Elektroden nicht gleich ist, resultiert daraus eine Kontaktpotentialdifferenz, die sich in der Erzeugung eines Stromes äußert, sobald die beiden metallischen Elektroden aus verschiedenem Material leitend verbunden werden. Tatsächlich fließt jedoch kein Strom, da alle Kontakte betrachtet werden müssen, die im Endeffekt eine vollständige Kompensation verursachen.

Wir bezeichnen mit A, B und C (Abb. 642) die drei Kontaktstellen dreier Drähte aus verschiedenen Metallen M_1, M_2, M_3. Die resultierende Differenz der Kontaktpotentiale

$$V_{M_1} - V_{M_2} + V_{M_2} - V_{M_3} + V_{M_3} - V_{M_1}$$

ist identisch Null.

Es fließt in diesen Drähten jedoch ein Strom, wenn sich die Drähte oder wenigstens die Kontaktstellen auf *verschiedenen Temperaturen* befinden. Daraus folgen PELTIER-Effekt, Thermopaare usw., deren Betrachtung in anderem Zusammenhang gegeben wird (Elektronentheorie der Metalle).

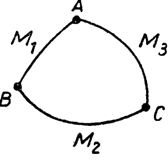


Abb. 642

Ein Strom fließt auch, wenn eines dieser Elemente durch einen Elektrolyt gebildet wird. Tatsächlich erhält man auf diese Weise ein galvanisches Element. Durch welchen Mechanismus des Elektrolyts wird jedoch in diesem Fall das Gesetz, daß die Resultierende der elektromotorischen Kräfte Null ist, aufgehoben?

Der Term V_{M_1} kann als die Potentialdifferenz zwischen dem Inneren des Metalls M_1 und dem Vakuum interpretiert werden. Taucht das Metall M_1 in einen Elektrolyt, der Salze dieses Metalls enthält, so wird die Potentialdifferenz durch die in der Lösung enthaltenen Ionen um ΔV_{M_1} geändert. Wir wollen annehmen, daß in der Kette das Metall M_2 durch den Elektrolyt ersetzt wird und M_3 die zweite Metallelektrode darstellt. Dabei ist deren Eigenpotential gegenüber dem Elektrolyt gegeben zu $V_{M_3} + \Delta V_{M_3}$.

Wir erhalten also jetzt eine Resultante der Form

$$V_{M_1} + \Delta V_{M_1} - V_{M_3} - \Delta V_{M_3} + V_{M_3} - V_{M_1} = \Delta V_{M_1} - \Delta V_{M_3} \neq 0 .$$

Die Austrittsarbeiten der Elektronen können also unberücksichtigt bleiben, und es braucht nur die Existenz der Potentiale ΔV_{M_1} und ΔV_{M_3} in Betracht gezogen zu werden. Dies wurde, wenigstens schematisch, von NERNST bereits durchgeführt, der folgende Überlegungen anstellte. Man taucht ein Metall in einen Elektrolyt, in dem bereits ein osmotischer Partialdruck p der Ionen dieses Metalls vorhanden ist. Ist dieser Druck kleiner als ein bestimmter Lösungsdruck P, so wird sich das Metall auflösen, und die Auflösungsarbeit pro Mol kann wie bei der Entspannung eines idealen Gases zu $R\,T \ln \frac{P}{p}$ berechnet werden. Nehmen wir zur Vereinfachung das Metall als einwertig an, so können wir

$$96490\, \Delta V_{M_1} = R\,T \ln \frac{P}{p} \text{ in Joule}$$

schreiben. ΔV_{M_1} ist dabei in Volt anzugeben.

Die nach dieser Formel berechnete Potentialdifferenz stellt den Beitrag der Elektrode zur elektromotorischen Kraft dar. Wenn die andere Elektrode von der ersten verschieden ist, dann bewirkt sie beim Eintauchen, daß p sehr schnell gegen P geht, und liefert einen ähnlichen Beitrag $R\,T \ln \frac{P'}{p'}$. Die resultierende elektromotorische Kraft beträgt also

$$\frac{1}{96\,490}\,R\,T\left(\ln\frac{P}{p} - \ln\frac{P'}{p'}\right).$$

Um mit Hilfe dieser Formel die elektromotorische Kraft der gebräuchlichen galvanischen Elemente ausdrücken zu können, müssen für P und P' extrem hohe oder extrem niedrige Werte angenommen werden, was jedoch im Gegensatz zu den zur Erklärung des osmotischen Drucks angenommenen idealen Gasgesetzen steht, so daß dieser Theorie nur wenig praktische Bedeutung zukommt. Geht man jedoch zu einer Korrektur wie bei den Zustandsgleichungen für die realen Gase über, so erhält man für P mit dem Experiment besser übereinstimmende Werte.

Außerdem gestattet diese Formel, die elektromotorische Kraft von *Konzentrationselementen* zu erklären:

Wir betrachten zwei Elektroden aus dem gleichen Metall, deren eine in eine $^1/_{10}$-, deren andere in eine $^1/_{100}$-Lösung des gleichen Salzes tauchen. Die beiden Lösungen stehen durch eine poröse Wand in Kontakt. $P = P'$ und $\ln\frac{P}{p} = \ln\frac{P'}{p'}$ ist in diesem Fall gleich $\ln {}^{100}/_{10}$. Bei einer Temperatur von $T = 300°$ C ergibt sich wegen $R = 8{,}32$ eine Größenordnung einiger hundertstel Volt (dabei muß bei der Berechnung auf die *Wertigkeit* der Ionen geachtet werden); diese Größenordnung wird tatsächlich gemessen.

IV. KAPITEL

Die Aufspeicherung elektrischer Energie

Elektrische Energie kann industriell nur mit verhältnismäßig großem Materialaufwand anderen Energieformen gegenüber gespeichert werden.

Wir wollen z.B. einen Kondensator von 4 μF bei 600 V betrachten, der etwa 300 g wiegt. Die gespeicherte Energie beträgt also $^1/_2\,C\,U^2 = 0{,}72$ Joule, d.h. etwa 0,07 m kg. Es genügt andererseits, dieser Masse von 300 g eine Geschwindigkeit von 2,5 m/sec zu erteilen, um die gleiche Energiemenge in kinetischer Form auf sie zu übertragen. Erhöht man die Spannung des Kondensators, so schlägt dieser durch, während man die Geschwindigkeit der gleichen Masse beträchtlich erhöhen kann.

Andererseits entsprechen 0,72 Joule gerade $\frac{0{,}72}{3600}$ Wh, so daß die Anzahl der Wattstunden pro Kilo in diesen Kondensatoren gegeben ist zu

$$\frac{0{,}72}{0{,}300 \cdot 3600} = \frac{2{,}4}{3600} = 0{,}0007\,.$$

Vergleicht man diese kleine Zahl mit der Leistung von 23 Wh pro kg einer Autobatterie, so sieht man sofort, daß letztere eine viel bessere Möglichkeit zur Speicherung elektrischer Energie bietet. Wollen wir jedoch diese Leistung bei kinetischer Energie erreichen, so wäre eine Beschleunigung auf etwa 400 m/sec notwendig, d.h. ein freier Fall aus etwa 8000 m Höhe.

Chemische Energie, wie sie z.B. im Benzin enthalten ist, stellt allerdings eine noch konzentriertere Form dar. Setzt man so für das Akkumulatorgewicht eines Elektrowagens $^1/_3$ des Wagengewichtes an, erreicht man für diesen Wagen eine Fahrstrecke von etwa 80 km. Verwendet man jedoch die gleiche Gewichtsmenge Benzin als Antriebsmittel eines Autos mit gleichem Gewicht, so kann dieses 5000 km mit bedeutend höherer Geschwindigkeit fahren. Dabei ist noch zu berücksichtigen, daß bei schnellerer Fahrt mehr Energie verbraucht wird. Das Benzin weist daher gegenüber einem Akkumulator einen etwa 100mal besseren Wirkungsgrad auf.

Wir werden noch zeigen, daß trotz der großen Unterschiede zwischen Kondensator und Akkumulator in bezug auf die Energie pro kg Masse zwischen beiden ein gleichmäßiger Übergang gefunden werden kann (vom Kondensator mit geringer Kapazität und augenblicklicher Entladung zum Akkumulator mit großer Kapazität und langer Entladungsdauer).

Als Beispiel wollen wir einen Alkaliakkumulator betrachten, dessen positive Elektrode durch ein Silberblech und dessen negative Elektrode durch ein Zinkblech gebildet werden. Die Auf- und Entladungszeit dieses Elements ist sehr kurz und liegt in der Größenordnung von $^1/_{1000}$ sec. Die Kapazität des Systems beträgt etwa 10000 μF/cm^2. Ersetzt man die negative Elektrode durch ein Silberblech, so bildet das System einen auch bei Wechselstrom arbeitenden Kondensator, dessen Kapazität bei etwa 1000 μF/cm^2 liegt und dessen WATTsche Verluste bei 50 Hz und einer angelegten sinusförmigen Spannung von 1 V effektiv etwa 10% der Gesamtleistung ausmachen.

Der einzige materielle Unterschied eines solchen Kondensators gegenüber einem Kondensator mit üblichem Dielektrikum (Papier, Glas usw.) besteht in der Formierung und der periodisch mit dem Strom verlaufenden Reduktion des Silberoxyds durch Elektrolyse.

Wir sehen also zwei gemeinsame Charakteristika:

1. Die Geschwindigkeit der Aufladung und

2. die Formierung des Dielektrikums, in dem in beiden Fällen die elektrische Energie gespeichert wird, unabhängig von den verschiedenen geometrischen Formen und den sehr verschiedenen Oberflächenverteilungen.

Die Dissoziation des Elektrolyts bezieht sich in einer solchen Anordnung nur auf die zum Auftreten oder Verschwinden des Dielektrikums notwendigen Mengen an Sauerstoff und Wasserstoff. Sie besitzt nur bei Werten oberhalb von 1,5 bis 1,7 V einen beständigen Charakter und trägt keinesfalls zur Vergrößerung der Kapazität bei.

Es ist jedoch möglich, diese Spannungswerte noch zu übersteigen, ohne daß eine Zersetzung des Elektrolyts auftritt, wenn die Konzentration entsprechend erhöht wird.

Zu einem einfachen Experiment verwenden wir einen Elektrolyt, dessen Konzentration leicht erhöht werden kann, z.B. Schwefelsäure, und unlösliche Elektroden.

Verwendet man an Stelle einer 5%igen eine 60%ige H_2SO_4-Lösung als Elektrolyt eines Bleiakkus, so steigt die Spannung um 0,5 V an. Eine stärkere Konzentration kann nicht verwendet werden, da sonst die Bleielektroden von der Schwefelsäure angegriffen werden.

Ersetzt man die Bleielektroden durch eine gegen konzentrierte Schwefelsäure beständige Legierung, wie z.B. Nickel-Silizium oder einfach Nickel oder einfach Eisen, so kann man rechnerisch feststellen, daß die Spannung um einige $^1/_{10}$ V erhöht wird, während die Kapazität zur Oberfläche der Elektroden (die man chemisch oder mechanisch vergrößern kann) proportional bleibt. Die Elektrolyse ist hier nur ein nebensächliches, zur Bildung des Dielektrikums erforderliches Phänomen.

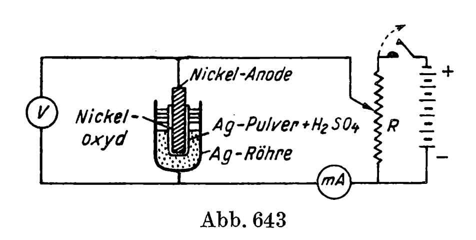


Abb. 643

Aus der sogenannten Polarisationszelle, d.h. dem Akkumulator mit ebenen Elektroden, entwickelte man den elektrolytischen Kondensator mit freiem Elektrolyt, dann den elektrochemischen Kondensator, bei dem es bereits gelungen war, die elektrolytische Funktion der Flüssigkeit zu reduzieren. Es gelang, selbst den Elektrolyt durch Halbleiter oder Leiter (pulverisierte leitende Substanzen auf dem Oxyd des Dielektrikums) zu ersetzen.

Die Kapazität steht in allen diesen Fällen mit der mechanischen Masse des Dielektrikums in Zusammenhang, wobei dieses von einer direkten Bildung durch die Elektrolyse oder eine anodische Behandlung in einem gesonderten Gefäß herrührt.

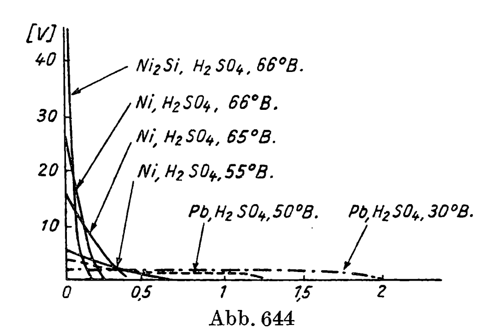


Abb. 644

Die anlegbare Spannung steigt mit abnehmender Leitfähigkeit des zwischen den Elektroden befindlichen Elektrolyts.

In Abb. 643 ist der experimentelle Aufbau einer Zelle dargestellt, die eine Zwischenstufe zwischen einem Akkumulator und einem Kondensator mit eingeschobenem Dielektrikum ist.

Man sieht, daß die Anode mit einem Silberpulver umgeben werden kann, dessen Leitfähigkeit nun an die Stelle der Leitfähigkeit der Schwefelsäure tritt (die wegen der geringen Konzentration fast Null ist).

Die Kurven in Abb. 644[1]) zeigen deutlich einen stetigen Übergang im kapazitiven Verhalten zwischen einem Akkumulator und einem chemischen Kondensator. Diese Kurvenschar könnte noch bis zu einem Luftkondensator vervollständigt werden.

---

[1]) Die auf der Abszisse aufgetragene Zeit ist in willkürlichen, dem gewählten Entladungswiderstand entsprechenden Einheiten dargestellt.

Diese experimentellen Kurven der Entladungsgesetze als Funktion der Zeit wurden aus einer anfänglichen Potentialdifferenz gewonnen, die von der Aufhebung des Ladestroms herrührte. Jedes Element *entlädt* sich also über einen festen Widerstand, der mit der auftretenden Polarisationsspannung anwächst, so daß in jedem Falle eine Energiemenge der gleichen Größenordnung gespeichert wird. Wir können also drei verschiedene Typen von elektrische Energie speichernden Elementen unterscheiden:

1. *Akkumulatoren*, die sich in einer Zeit zwischen einigen Minuten und mehreren Stunden vollständig entladen (Blei-, Nickel-, Silberakkus usw.).

2. *Chemische Kondensatoren*, deren Entladungszeit in der Größenordnung einer Sekunde liegt (Silberelement).

3. *Kondensatoren mit augenblicklicher Entladung* (Elemente mit permanentem Dielektrikum).

Obgleich die Verwendung der unter 1. und 3. genannten Anordnungen häufiger ist als der unter 2., kann auch dieser „chemische Kondensator" durch die fortschreitende Technik bis zur Verwendungsreife verbessert werden.

V. KAPITEL

Einige Bemerkungen über die Ionentheorie und die Leitfähigkeit der Elektrolyte

Bisher haben wir die Elektrolyse und ihre technischen Anordnungen, die galvanischen Elemente und Akkumulatoren, betrachtet, ohne näher auf die möglichen Hypothesen über die eine Rolle spielenden Elementarprozesse einzugehen. Trotzdem haben wir bereits die NERNSTsche Theorie über die elektromotorische Kraft der galvanischen Elemente erwähnt. Es ist nunmehr notwendig, die Elemente der elektrolytischen Dissoziationstheorie in der ursprünglich von ARRHENIUS und später mit bedeutender Verbesserung von DEBYE und HÜCKEL angegebenen Form einzuführen.

Dissoziation. Ionisationsgrad

Man gelangt zu der Annahme, daß die gelösten Moleküle des die leitende Lösung bildenden Stoffes, wenigstens teilweise, bereits vor jedem Fließen eines Stroms in Ionen zerlegt werden, die *Träger entgegengesetzter Ladungen* sind. Legt man zwischen die beiden Elektroden eine Potentialdifferenz, so werden diese Ionen von den Elektroden mit jeweils entgegengesetztem Vorzeichen angezogen. Durch diese Verschiebung der Ionen tritt ein Stromtransport auf, durch den die Konzentrationsveränderung in der Nähe der Elektroden erklärt werden kann.

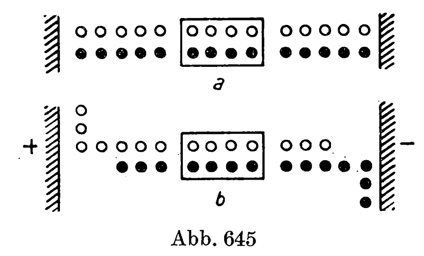


Abb. 645
a) ohne Potentialdifferenz,
b) mit angelegter Potentialdifferenz

Die in Abb. 645 gezeigte Darstellung erklärt diesen Vorgang ohne weiteren

Kommentar. Die schwarzen und weißen Kreise stellen die positiv bzw. negativ geladenen Ionen dar.

Mit α wollen wir den *Ionisationsgrad* bezeichnen. Dissoziiert z. B. ein Molekül in zwei Ionen, so sind, wenn der Bruchteil α der vorhandenen Moleküle dissoziiert, $(1 + \alpha)$ mal mehr Teilchen in der Lösung enthalten. Es ist bekannt (RAOULTsches Gesetz), daß z. B. die Gefrierpunktserniedrigung bei einer dissoziierten $(1 + \alpha)$ mal so groß wie bei einer nichtdissoziierten Lösung ist. Bei *schwachen* Elektrolyten bestätigt das Experiment diese Überlegungen und liefert für α die erwarteten Werte, die meist in der Nähe von 1 liegen. Auf die Betrachtung *starker* Elektrolyte werden wir später zurückkommen.

Nach diesen kurzen Überlegungen kann man bereits eine Berechnung der Leitfähigkeit durchführen.

Wir wollen annehmen, daß Mg der gelösten Substanz (M = Molekulargewicht) M_1g Ionen mit einer Ladung nF Coulomb (n = Wertigkeit oder Anzahl der einwertigen Ionen pro Molekül; F = 1 Faraday = 96490 Coulomb), und M_2g Ionen mit der entgegengesetzten Ladung $-nF$ Coulomb liefern. Als *Anionen* bezeichnen wir die Ionen mit negativer Ladung, die von der Anode (der mit dem +-Pol der Stromquelle verbundenen Elektrode) angezogen werden, und als *Kationen* entsprechend die von der Kathode, dem −-Pol, angezogenen Ionen.

Bei einer Feldstärke von 1 V/cm nehmen die Anionen eine Geschwindigkeit v_0 und die Kationen eine Geschwindigkeit u_0 an. Bezeichnen wir die Spannung zwischen den als eben und parallel in einer Entfernung l zueinander angenommenen Elektroden mit U, so hat das elektrische Feld in der Lösung den Wert $E = \frac{U}{l}$ (da das Medium elektrisch neutral bleibt und $\Delta U = 0$ mit $E = -\frac{\partial U}{\partial x}$ gilt). Die Geschwindigkeit der Anionen und Kationen beträgt entsprechend $v_0 \frac{U}{l}$ und $u_0 \frac{U}{l}$. Die von einem einzigen Molekül herrührenden Anionen transportieren ebenso wie die entsprechenden Kationen n Elementarladungen.

Lösen wir p Gramm einer Substanz mit dem Molekulargewicht M in 1 cm³ Lösung, so ist die Anzahl der Mol pro Volumeneinheit zu p/M gegeben. Den Bruchteil in Ionen dissoziierter Moleküle bezeichnet man mit α und die LOSCHMIDTsche Zahl mit N, dann finden wir in 1 cm³ Lösung

$$\left(\alpha \frac{p}{M} N\right) n$$

positive und genauso viele negative Ladungen auf den Kationen bzw. den Anionen.

Die Verschiebung der Teilchen mit entgegengesetzten Ladungen in entgegengesetzten Richtungen entspricht zwei Strömen gleicher Richtung. Daraus ergibt sich, daß durch jeden cm² des Querschnittes pro Sekunde

$$\left(\alpha \frac{p}{M} N\right) n e (u_0 + v_0) \frac{U}{l}$$

Elementarladungen fließen, wobei e die Elementarladung ist und $eN = F$ (FARADAYsche Zahl) gilt.

Dieser Ausdruck stellt gerade die Stromdichte $\jmath$ im Elektrolyt dar, die durch das OHMsche Gesetz

$$\jmath = \sigma \frac{U}{l}$$

gegeben ist. Für die Leitfähigkeit folgt also der Ausdruck

$$\sigma = \alpha \frac{p}{M} n F (u_0 + v_0) .$$

Lösen wir nun 1 Grammäquivalent in 1 cm³, d.h. wählen $p = \frac{M}{n}$, so finden wir einen Wert, den wir mit λ bezeichnen und *Äquivalentleitfähigkeit der Lösung* nennen:

$$\lambda = \alpha (u_0 + v_0) F .$$

Diese Äquivalentleitfähigkeit λ vereinfacht die Betrachtungen, da sie alle Parameter umfaßt, nach denen zu fragen in der Theorie der Ionen von Interesse ist, und außerdem die geometrischen und quantitativen Parameter eliminiert.

Konzentrationsabhängigkeit der Leitfähigkeit

Wir wollen kurz die experimentellen Ergebnisse angeben: Lösungen anorganischer Säuren leiten besser als Laugen, wobei letztere noch besser leiten als Salzlösungen. Mit wachsender Konzentration wächst auch die Leitfähigkeit an. Dieses Anwachsen erfolgt jedoch nicht linear, sondern wird bei höheren Konzentrationen geringer. Bei stark löslichen Substanzen besitzt die Leitfähigkeit für eine bestimmte Konzentration, die meist in der Größenordnung von 4–6 Grammäquivalent pro Liter liegt, ein Maximum (1 Grammäquivalent entspricht einem Mol, dividiert durch die Wertigkeit der Ionen).

Interessant ist der Bezug dieser Veränderungen auf die Äquivalentleitfähigkeit, nachdem man die Leitfähigkeit bei verschiedenen Konzentrationen gemessen hat. Bezeichnen wir mit λ_∞ die Leitfähigkeit bei sehr schwachen Konzentrationen, so wird für $C = \frac{p}{M}$ angenähert der Ausdruck

$$\lambda = \lambda_\infty - a \left(\frac{p}{M}\right)^{1/3} = \lambda_\infty - a C^{1/3}$$

gelten. a ist dabei eine Konstante, die, wenn auch nur in geringem Maße, von dem Elektrolyt abhängt.

Zur Erklärung dieser Tatsachen wurden viele theoretische Deutungen angeführt, von denen jedoch keine so zwingend war, daß sie sich durchgesetzt hätte.

Dennoch kann man immer die Existenz eines Gleichgewichts zwischen den dissoziierten und den nichtdissoziierten Molekülen des Elektrolyts annehmen:

Bezeichnet α den Dissoziationsgrad, so beträgt die Anzahl der Ionen der einen und der anderen Art gerade αC. Wir beziehen uns auf ein Molekül, das in nur zwei

Ionen dissoziiert (z. B. HCl, KCl, ...). Die Rekombinationsgeschwindigkeit ist dann gegeben zu $K_1(\alpha C)^2$. Dabei ist K_1 ein Koeffizient. Eine Verdoppelung der Konzentration verursacht eine 4mal so große Wahrscheinlichkeit für einen Zusammenstoß entgegengesetzt geladener Ionen.

Die Dissoziationsgeschwindigkeit wird durch die Molekülstöße, die Energieabsorption durch die Moleküle usw. bestimmt; sie ist jedoch immer der Anzahl der anwesenden nichtdissoziierten Moleküle $(1-\alpha)C$ proportional. Im Gleichgewichtszustand sind Dissoziations- und Rekombinationsgeschwindigkeit einander gleich:

$$K_1(\alpha C)^2 = K_2(1-\alpha)C.$$

Daraus folgt der Ausdruck

$$\frac{\alpha^2 C}{1-\alpha} = \text{const}.$$

Diese Konstante ist natürlich temperaturabhängig.

Eine solche Theorie ergibt also eine Konzentrationsabhängigkeit von α, d.h. auch von λ, wie es das Experiment bei sogenannten *schwachen* Elektrolyten, deren Lösung nur wenig leitend ist, und bei nur schwachdissoziierten Elektrolyten (z.B. organische Säuren und Salze) gut bestätigt. Selbstverständlich wird dabei angenommen, daß u_0 und v_0 charakteristische Konstanten für jedes Ion (unabhängig von der Konzentration) sind.

In *starken* Elektrolyten jedoch, bei denen man wegen der vollständigen Dissoziation eine wenigstens genauso gute Gültigkeit der Theorie erwarten müßte, findet man keine befriedigenden Resultate.

DEBYE und HÜCKEL gelang es, die Vorgänge in Lösungen starker Elektrolyte (HCl, H_2SO_4 usw.) durch weiter unten angegebene Berechnungen zu klären. Daneben kann auch die *Polarisation* des Mediums unter der Wirkung des jedes Ion umgebenden starken COULOMB-Feldes betrachtet werden. Die starken permanenten Dipole der Wassermoleküle führen zu einer Anlagerung dieser Moleküle an die beweglichen Ionen, deren Beweglichkeit in der Lösung dadurch verändert wird. In großen Zügen, kann man sagen, ist so eine prinzipielle Deutung der Vorgänge gefunden.

Messung der Beweglichkeiten

Man nennt *Beweglichkeiten* die Geschwindigkeiten u_0 und v_0 der Ionen im Einheitsfeld.

In einer sehr verdünnten Lösung bedeutet das ionische Dissoziationsgleichgewicht, daß $\alpha = 1$. Man findet also

$$\lambda_\infty = F(u_0 + v_0).$$

Die Messungen der Leitfähigkeit ergeben die Gesamtkonstante $u_0 + v_0$. Für gelöstes NaCl findet man z.B. $u_0 + v_0 = 1{,}14 \cdot 10^{-3}$ cm/sec; es ist jedoch bedeutend schwieriger, die beiden Beweglichkeiten u_0 und v_0 separat zu bestimmen.

In dem speziellen Fall zweier verschiedener Lösungen, z.B. $CuSO_4$ und $ZnSO_4$, die durch eine poröse Wand getrennt und elektrolysiert sind, gestattet offensichtlich die Tatsache, daß das Zinkion durch die poröse Wand hindurchwandert,

durch chemische Dosierung die Wanderungsgeschwindigkeit der Zinkionen abzuschätzen. Dies ist jedoch ein Ausnahmefall.

Ähnliche Verhältnisse herrschen indessen immer an den Elektroden selbst: Die Kathode z. B. erreichen in der Sekunde $\alpha \frac{n p}{M} u_0 \frac{U}{l}$ Kationen, die einen bestimmten Strom transportieren, während zur Erklärung des *Gesamtstroms* $\alpha n \frac{p}{M} (u_0 + v_0) \frac{U}{l}$ Ionen ankommen müßten. Dies wird durch den Elektrolyt, in dem zwei verschiedene Ionenarten mit entgegengesetztem Vorzeichen zum Stromtransport beitragen, realisiert. Auf der Anode und der Kathode jedoch ist eine Kompensation erforderlich, die sich in einer Wanderung des Elektrolyts äußert und ihrerseits wieder durch eine Auflösung der Elektroden (sofern diese stattfindet) oder durch eine Veränderung der Konzentration kompensiert wird. Die Untersuchung dieser verschiedenen Effekte gestattet in Fällen, in denen sie eindeutig bekannt sind, u_0 und v_0 getrennt abzuschätzen.

Betrachtungen über die tatsächliche Natur der Ionen

Bewegt sich eine Kugel mit dem Radius r unter der Wirkung einer Kraft eE in einem Medium mit der Viskosität η, so erreicht sie sehr bald eine Maximalgeschwindigkeit, die dadurch gegeben ist, daß die Kraft durch eine der Geschwindigkeit proportionale Reibung mit dem Wert

$$6\pi\eta r v = eE$$

ausgeglichen wird. Daraus ergibt sich die Geschwindigkeit v umgekehrt proportional zu r. Diese Formel für v ist das sogenannte STOKESsche Gesetz.

Setzt man in dieser Formel für v entweder v_0 oder u_0 ein und für η die Viskosität des Wassers (die bei 25° C ungefähr 0,01 CGS-Einheiten beträgt), so erhält man für r Radien, die größenordnungsmäßig mit den Dimensionen der Moleküle übereinstimmen (10^{-8} cm).

Die STOKESsche Formel ergibt sich aus einer korrekten Integration eines Problems der Hydrodynamik viskoser Flüssigkeiten und war nicht für Kugeln entwickelt worden, deren Größe nur wenig von der gelöster Moleküle abweicht. Aus diesem Grunde darf man auch keine genaue Übereinstimmung von Theorie und Experiment erwarten. Trotzdem findet man bisweilen Radien von dieser Größe oder solche Abweichungen in den Verhältnissen u_0/v_0, daß man eine Hydratation der Ionen annehmen muß. Jedes Ion umgibt sich mit einer Schicht von Wassermolekülen (für ein K-Ion mit 22, für ein OH-Ion in Wasser mit 11; dagegen hydratisiert das H-Ion nicht). Die bereits erwähnte Theorie von DEBYE und HÜCKEL sucht die gleichen Tatsachen in einer weniger „chemischen“ Art zu berechnen, indem direkt die anwesenden Kräfte betrachtet werden und auszudrücken versucht wird, daß die Ionen mit entgegengesetztem Vorzeichen eine Neigung zur Gruppierung besitzen, ohne dabei die Existenz von dauernden Bindungen mit stets gleichen Ionenkonfigurationen anzunehmen.

Prinzip der Erklärung in der von DEBYE *und* HÜCKEL *entwickelten Theorie*

Diese Theorie versucht die *Wechselwirkungen zwischen den Ionen* in nicht zu sehr verdünnten Lösungen zu berechnen. Sie bezieht sich also auf starke Elektrolyte, die als vollständig dissoziiert angenommen werden.

Bezeichnen wir nun mit n die Gesamtzahl aller Ionen pro cm^3 (sowohl positiver als auch negativer), die ohne Anlegen eines elektrischen Feldes vorhanden sind, dann ist die Ladungsdichte in einem Punkt mit dem elektrischen Potential V nach dem BOLTZMANNschen Gesetz (das wir bereits bei der Behandlung des Paramagnetismus, Seite 147 angegeben haben) gegeben zu

$$\varrho = n e \left[\exp\left(-\frac{eV}{kT}\right) - \exp\left(+\frac{eV}{kT}\right)\right] = -2ne\frac{eV}{kT},$$

wenn man $\frac{eV}{kT} \ll 1$ annimmt und mit k die BOLTZMANN-Konstante R/N bezeichnet.

Besitzt nun V eine kugelsymmetrische Form um ein gegebenes Ion, so lautet die POISSONsche Gleichung mit ε als Dielektrizitätskonstante der Lösung $\Delta V = -\frac{4\pi\varrho}{\varepsilon}$. Setzt man in diese Gleichung den angenäherten Wert von ϱ ein, so findet man

$$\frac{d^2V}{dr^2} + \frac{2}{r}\frac{dV}{dr} - \frac{8\pi n e}{\varepsilon}\left(\frac{eV}{kT}\right) = 0.$$

Man sieht sofort, daß

$$V = \frac{e^{-\frac{r}{r_0}}}{r}$$

eine mögliche Lösung der obigen Gleichung ist, wenn r_0 durch den Ausdruck

$$\frac{1}{r_0^2} = \frac{8\pi n e^2}{\varepsilon k T}$$

bestimmt ist.

Es existiert also ein Radius $r_0 = \sqrt{\frac{\varepsilon k T}{8\pi n e^2}}$, der in einer mehr oder weniger statistischen und gemittelten Weise die Ausdehnung der Kugel bestimmt, die von den das gegebene Ion umgebenden Ionen gebildet wird. Dabei wird diese Ionenwolke vornehmlich aus dem Zentralion entgegengesetzt geladenen Ionen bestehen. Außerhalb der Entfernung r_0 werden die elektrischen Wirkungen des Zentralions durch die die Atmosphäre bildenden Ionen sehr schnell aufgehoben. Bei diesen Rechnungen sind also die Grenzbedingungen zu beachten: Die Anzahl n aller Ionen pro cm^3 bleibt unverändert usw. Allgemein ist einzusehen, daß die Existenz dieser Atmosphäre mit zum Zentralion entgegengesetztem Vorzeichen eine Erklärung aller der Tatsachen gestattet, die bisher in starken Elektrolyten als Ursache für die Abnahme des Dissoziationsgrades angesehen wurden.

VI. KAPITEL

Halbleiter. Transistoren

Halbleiter-Kristalldioden

Wir haben bereits weiter oben Kupferoxydul-Gleichrichter beschrieben und Selen-Gleichrichter behandelt. Bestimmte natürliche oder künstliche Kristalle (Silizium, Germanium) ergeben völlig ähnliche Effekte, wenn eine der an ihnen angebrachten Elektroden als Spitze ausgebildet ist. Die in den Anfängen der Rundfunkübertragung als Detektoren verwendeten Bleisulfidkristalle sind jedoch vollkommen instabil, d.h., der Gleichrichtungseffekt ist stark von der Verschiebung und dem Druck der Spitze abhängig und zeigt außerdem eine zeitliche Abhängigkeit, bei sehr großen Strömen kann der Kontakt zerstört werden usw. Dagegen wurden die Detektorkristalle aus Silizium und Germanium – man nennt sie häufig auch Silizium- bzw. Germaniumdioden – während des letzten Krieges 1939–1945 besonders genau untersucht, und man fand Formen, die in bezug auf die Gleichrichtung von Frequenzen von einigen 10^9 Hz nahezu gleichmäßig arbeiteten und in Radargeräten Verwendung fanden. Ihre durch die geringen Dimensionen (einige mm^3) gesicherten kleinen Kapazitäten gestatten ihre Wirksamkeit auch bis zu diesen sehr hohen Frequenzen.

Es soll hier nicht unsere Absicht sein, den physikalischen Mechanismus dieser Kristalldioden zu untersuchen. Wir wollen uns vielmehr auf die Feststellung beschränken, daß diese Kristalle immer vom Typ der Verunreinigungshalbleiter sind. Das bedeutet, daß diese Halbleiter bei genau stöchiometrischer Zusammensetzung zu *Isolatoren* werden. Enthalten sie indessen einige Fremdatome, so werden diese sich, entsprechend ihrer Natur, ionisieren und dabei einige Elektronen freisetzen oder einige Elektronen aus dem Gitter aufnehmen und an den entsprechenden Stellen ein „positives Loch“ zur Folge haben. Im ersten Fall spricht man von einem Halbleiter des Typs n (negativ), im zweiten Fall vom p-Typ. Das üblicherweise präparierte[1]) Germanium ist vom Typ n, man kann jedoch auch den p-Typ erhalten. Das normale n-Germanium kann an seiner Oberfläche einige Sauerstoff-Atome adsorbieren und sich dort so in den p-Typ umwandeln. Diese Umwandlung in den p-Typ reicht bis zu einer Tiefe von einigen hundertstel Millimeter. An der Grenze bildet sich eine *isolierende* Schicht aus, die nur von solchen Elektronen überstiegen werden kann, die eine bestimmte Energie besitzen, d.h., es entsteht ein Potentialwall. Setzt man nun auf diesen Kristall eine metallische Spitze – meist aus Phosphorbronze, obwohl an sich die Natur des Metalls keine Rolle spielt –, so bewirkt die Geometrie dieser Anordnung, daß der Wall sehr leicht von Elektronen überwunden werden kann, wenn sich diese von der Basis zur Spitze

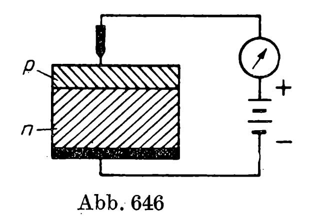


Abb. 646

[1]) In der Praxis gewinnt man einen Einkristall, indem man einen Keim sehr langsam aus der Schmelze herauszieht. Durch die genaue Dosierung der Verunreinigungen kann man nun willkürlich die Typen n oder p erhalten, ja selbst diese noch innerhalb eines Kristalls verändern. Die in der V. Gruppe des Periodischen Systems stehenden Elemente (P, As, Sb) ergeben als Verunreinigungen den Typ n, die Elemente der III. Gruppe (B, Al, Ga, In) den Typ p.

bewegen, d.h., wenn die Spitze positiv ist (Abb. 646). Ist jedoch die Spitze negativ, so ist dieser relativ leichte Übergang nicht mehr möglich. Man sagt: die Diode „leitet" in Richtung positive Spitze – negative Basis, in entgegengesetzter Richtung leitet sie nicht. Bei Potentialdifferenzen von Bruchteilen eines V kann man tatsächlich sagen, daß der Widerstand z. B. 200–300 Ω im ersten, dagegen 100000 Ω im zweiten Fall beträgt.

Die Leitfähigkeit dieser Halbleiter wird übrigens nicht nur durch die Bewegung der freien Elektronen verursacht: Wir betrachten ein positives Loch, wie es weiter oben definiert wurde, d.h. ein Atom, das ein Elektron abgegeben hat. Dieses Atom kann nun natürlich ein Elektron von einem anderen Atom binden, mit anderen Worten: *Das Loch wandert.* Bewegt sich nun ein Loch von einer (positiven) zu einer anderen (negativen) Elektrode, so haben wir eine *echte Leitung durch die Löcher.*

Die Untersuchung aller aus diesen Konzeptionen folgenden Möglichkeiten beruhen auf der Kenntnis der Aktivierungsenergien, die Löcher entstehen lassen, und der Kenntnis der Energien der Gitterelektronen. Es soll jedoch hier nicht näher darauf eingegangen werden.

Der Transistor

Bei einem Germaniumkristall vom n-Typ, wie er in Dioden verwendet wird, bringen wir nun in einer Entfernung von einigen $^1/_{100}$ mm zwei dünne Phosphorbronze-Spitzen an. Dies wäre ein *Transistor.* Selbstverständlich muß eine dritte Elektrode oder Basis vorhanden sein, die eine große Kontaktfläche mit dem Kristall sichert. Diese Anordnung besitzt eine bemerkenswerte Besonderheit:

Legt man eine der beiden Spitzen auf ein gegenüber der Basis schwaches *positives* Potential (diese Spitze nennt man *Emitter*), so stellt man fest, daß der von der Basis zu der anderen Spitze (dem *Kollektor*), die auf einem höheren negativen Potential (— 10 bis V — 40 V) liegt, fließende Strom von dem Emitterstrom gesteuert wird und dessen Veränderungen folgt. Dieser Kollektorstrom besitzt natürlich die entgegengesetzte Richtung des Emitterstroms, vergrößert oder verringert sich jedoch gleichzeitig mit diesem.

Messen wir nun den Scheinwiderstand zwischen Emitter und Basis, so finden wir einen geringen Wert, z. B. 800 Ω; für den Scheinwiderstand zwischen Kollektor und Basis ergibt sich dagegen ein großer Wert, z. B. 40000 Ω. Da beide Ströme von gleicher Größenordnung sind, wird also im Kollektorkreis eine große Leistung Ri^2 durch eine geringe Leistung ri^2 (mit $r \ll R$) im Emitterkreis gesteuert. Der Transistor besitzt also Verstärkungseigenschaften, die mehr oder weniger denen einer Triode entsprechen, obwohl zwischen beiden keine vollständige Analogie besteht. Der Hauptunterschied ist der niedrige Scheinwiderstand des Eingangs- oder Steuerkreises beim Transistor gegenüber dem sehr hohen Scheinwiderstand bei der Triode. Trotzdem kann der Transistor alle Funktionen einer Triode übernehmen, und wir wollen daher seine Verwendung näher betrachten.

Der Transistor wurde 1948 von J. Bardeen in den Bell Telephone Laboratories entwickelt. Mehrere Mitarbeiter dieser Firma (W. Brattain, W. Shockley) haben wichtige Arbeiten über seine Eigenschaften veröffentlicht, und auch andere Firmen sind mit der Weiterentwicklung zur industriellen Fertigung beschäftigt.

Arbeitet man mit Germanium vom p-Typ, so erhält man im Prinzip die gleichen Effekte, indem man die Polarität der Elektroden umkehrt.

Allgemeine Betrachtungen über die Wirkungsweise eines Transistors

Der negativ geladene Kollektor (Abb. 647) entspricht einer schlechten Leitfähigkeit und wird also von einem Potentialwall umgeben. Der positive Emitter emittiert sehr leicht positive Löcher, die sich zum Kollektor bewegen, der einerseits die am nächsten gelegene und andererseits die negativste Elektrode bildet.

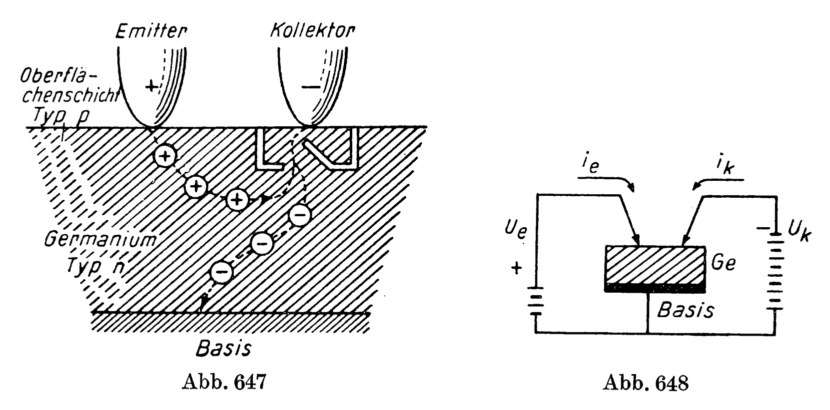


Abb. 647 Abb. 648

Jedes Loch, das durch den Potentialwall tritt, zerstört ihn lokal für einen Augenblick und gestattet einer geringen Anzahl von Elektronen, auszutreten. Diese Elektronen bilden den Kollektorstrom, der vollständig durch die vom Emitter zum Kollektor wandernden Löcher gesteuert wird.

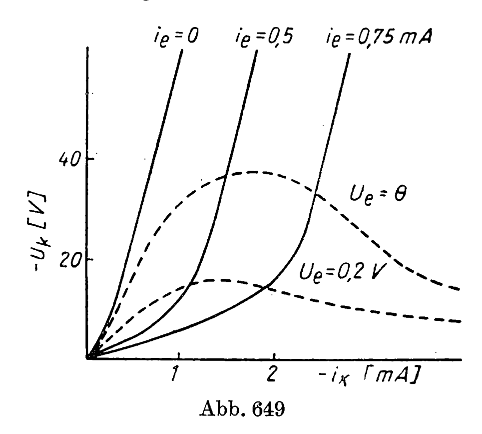


Abb. 649

Obgleich diese Vorstellung nicht den Anspruch erhebt, eine Erklärung zu sein, so kann man doch mit ihrer Hilfe die Koeffizienten leicht angeben. Wir betrachten einen gegebenen Transistor (Abb. 648) mit z. B. folgendem Arbeitspunkt:

$$U_e = +0{,}7\,\mathrm{V};\quad U_k = -30\,\mathrm{V};$$
$$i_e = 0{,}75\,\mathrm{mA};\quad i_k = -2\,\mathrm{mA}.$$

Nun können die Koeffizienten

$$R_{11} = \left(\frac{\partial U_e}{\partial i_e}\right)_{i_k = \text{const}} = 800\,\Omega\,; \qquad R_{12} = \left(\frac{\partial U_e}{\partial i_k}\right)_{i_e = \text{const}} = 300\,\Omega\,;$$

$$R_{21} = \left(\frac{\partial U_k}{\partial i_e}\right)_{i_k = \text{const}} = 100000\,\Omega\,; \quad R_{22} = \left(\frac{\partial U_k}{\partial i_k}\right)_{i_e = \text{const}} = 40000\,\Omega$$

gemessen werden.

Tragen wir nun alle Charakteristiken in einem Koordinatensystem auf, so erhalten wir die in Abb. 649 angegebene Darstellung.

Wir müssen dabei jedoch zwei Kurvenscharen auftragen: einmal U_k als Funktion von i_k bei $i_e = \text{const}$ und U_k als Funktion von i_k für $U_e = \text{const}$, um die weiter oben definierten vier Koeffizienten zu finden.

Betrachtung einer Verstärkerschaltung

Wir wollen nun einen *Widerstandsverstärker*, der durch Einführung eines Widerstands R in den Kollektorkreis entsteht (Abb. 650), formelmäßig betrachten und beschränken uns dabei auf die Annahme kleiner linearer Verschiebungen um einen Punkt (d.h., wir wollen R_{11}, R_{12}, R_{21}, R_{22} als konstant annehmen). Gegeben sind die Spannungen U und die die kleinen Veränderungen um einen Punkt beschreibenden i:

$$U_e = R_{11} i_e + R_{12} i_k,$$

$$U_k = R_{21} i_e + R_{22} i_k,$$

sowie

$$U_k = -R i_k.$$

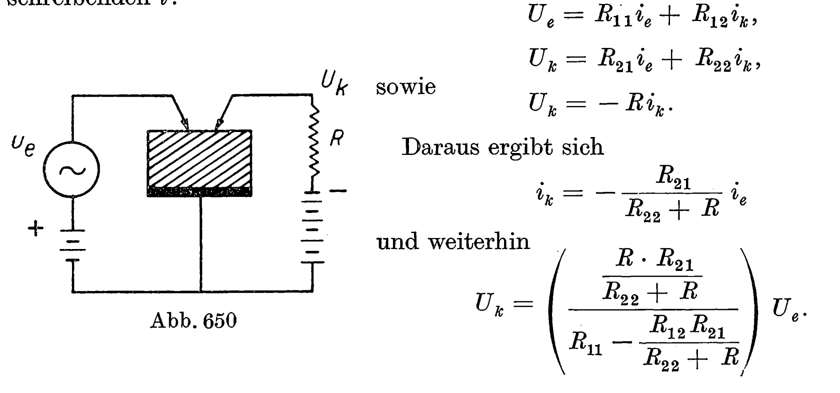


Abb. 650

Daraus ergibt sich

$$i_k = -\frac{R_{21}}{R_{22} + R}\, i_e$$

und weiterhin

$$U_k = \left(\frac{\dfrac{R \cdot R_{21}}{R_{22} + R}}{R_{11} - \dfrac{R_{12} R_{21}}{R_{22} + R}}\right) U_e.$$

Bei numerischer Berechnung mit $R = 40000\,\Omega$ und den weiter oben angegebenen Werten für R_{11} ... erhalten wir mit

$$\frac{U_k}{U_e} = 117$$

einen hohen Wert, dem interessante praktische Anwendungsmöglichkeiten entsprechen.

Weiterhin stellen wir fest:

1. U_k und U_e besitzen *gleiche Vorzeichen*, das Potential des Emitters sowie das des Kollektors wachsen bzw. nehmen, im Gegensatz zu den Vorgängen

für Gitter und Anode einer Röhre in einem Widerstandsverstärker, gemeinsam ab.

2. Verringert man den Belastungswiderstand R, so kann der Nenner in der Gleichung für U_k verschwinden; die Verstärkung wird dann unendlich und die Schaltung *instabil*. Besonders ein Transistor mit den angegebenen Charakteristiken, der über die Spannungsquellen U_k und U_e kurzgeschlossen ist, wäre instabil. Dabei würden beträchtliche Kurzschlußströme fließen.

Aus dieser letzten Bemerkung ergibt sich sofort eine *Oszillatorschaltung* (siehe Abb. 651): Der Belastungsscheinwiderstand im Kollektorkreis enthält außer einem großen Widerstand in der Gleichspannungszuführung einen abgestimmten L-C-Reihenresonanzkreis mit einem Widerstand r. Es ist klar, daß im Resonanzfall und bei Strömen hoher Frequenz die Anordnung instabil ist und mit der Frequenz ω schwingt, so daß $LC\omega^2 = 1$.

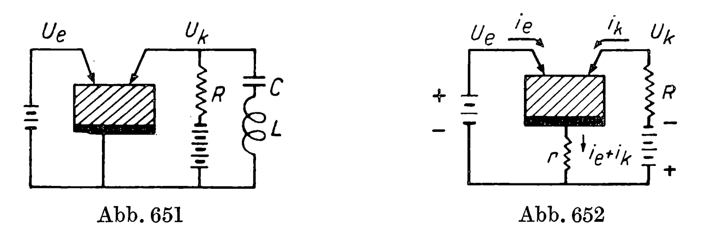


Abb. 651 Abb. 652

Rückkopplung durch einen Widerstand in der Basisleitung

Wir legen jetzt die Basis B nicht an Masse, sondern schalten einen Widerstand r in Reihe (Abb. 652). Durch diesen Widerstand fließt nun die Summe der beiden Ströme i_k und i_e, und die gültig bleibenden Transistorgleichungen müßten nun an Stelle von U_k und U_e entsprechend auf $U_e - U_b$ und $U_k - U_b$ angewandt werden. Dann ergibt sich

$$U_e - U_b = R_{11} i_e + R_{12} i_k,$$
$$U_k - U_b = R_{21} i_e + R_{22} i_k,$$
$$U_b = r(i_k + i_e).$$

Daraus folgt

$$U_e = (R_{11} + r)\, i_e + (R_{12} + r)\, i_k,$$
$$U_k = (R_{21} + r)\, i_e + (R_{22} + r)\, i_k.$$

Wir finden also einfach eine Vergrößerung jedes der Koeffizienten R_{11}, R_{12}, R_{21}, R_{22} um r.

Betrachten wir nun noch einmal speziell den Widerstandsverstärker, so erhalten wir diesmal unter Berücksichtigung von r

$$U_k = \frac{R\left(\dfrac{R_{21} + r}{R_{22} + r + R}\right)}{R_{11} + r - \dfrac{(R_{12} + r)\,(R_{21} + r)}{R_{22} + r + R}}\, U_e'.$$

Da r tatsächlich in der Größenordnung von R_{11}, R_{12} liegt, jedoch gegenüber R_{22} und R_{21} vernachlässigt werden kann, ergeben sich Vereinfachungen, aus denen folgt:

$$U_k \approx \frac{\dfrac{R \cdot R_{21}}{R_{22} + R}}{R_{11} + r - \dfrac{(R_{12} + r)\, R_{21}}{R_{22} + R}}\, U_e = \frac{\left(\dfrac{R \cdot R_{21}}{R_{22} + R}\right) U_e}{\left(R_{11} - \dfrac{R_{12} R_{21}}{R_{22} + R}\right) + r\left(1 - \dfrac{R_{21}}{R_{22} + R}\right)}.$$

Wir sehen, daß r die Verstärkung vergrößert, wenn $1 - \dfrac{R_{21}}{R_{22} + R}$ negativ ist, d. h., wir haben eine *positive Rückkopplung*, wodurch die Schaltung selbsterregt wird.

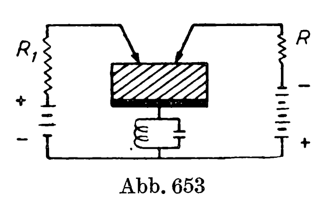


Abb. 653

Aus diesem Ergebnis folgt sofort eine Oszillatorschaltung, bei der der Widerstand r selbst durch einen Schwingkreis ersetzt wird. Die Widerstände R und R_1 verbleiben, um die Rückkopplung etwas zu steuern (Abb. 653).

Analogie zwischen Transistor und einigen Elektronenröhren

Der Transistor stellt ein teilweises Analogon zu einem *Dynatron* (Abb. 654) dar, d.h. zu einer Elektronenröhre mit einem in bezug auf die Kathode sehr positiven Gitter und einer Anode, deren Spannung niedriger als die des Gitters ist. Häufig schaltet man Schirmgitterröhren als Dynatron, indem man an die Anode eine niedrigere Spannung als an das Schirmgitter legt. Unter diesen Bedingungen zeigt die Anode eine Sekundäremission. Sie sendet dabei unter dem Einfluß des primären Elektronenstroms i_e einen Strom i_k aus, der übrigens i_e übersteigen kann. Die Pfeile in der Abbildung deuten die Richtung der Elektronenbewegung an, die zur üblichen Stromrichtung entgegengesetzt verläuft. Die Basis des Transistors ist also das Analogon zur Anode des Dynatrons, der Emitter zur Kathode und der Kollektor zum Gitter. Daneben kann ein Strom vom Emitter zum Kollektor auftreten. Der Unterschied zwischen Dynatron und Transistor beruht auf der Tatsache, daß im Dynatron alle Ströme Elektronenströme sind, während beim Transistor der Emitter positive Löcher aussendet. Die Ströme im Anodenkreis addieren (sich wobei sie jedoch verschiedene Vorzeichen besitzen) ebenso wie im Basiskreis des Transistors (dabei hat i_k jedoch die entgegengesetzte Richtung zu i_e). Der Transistorschwingkreis in Abb. 653 ist also ein genaues Analogon zu dem als Dynatron geschalteten Oszillator (Abb. 654) mit einem Schwingkreis im Anodenkreis.

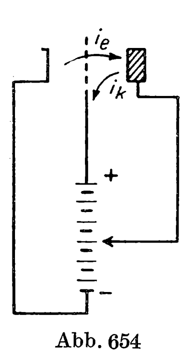


Abb. 654

Einem Transistor äquivalenter T-Kreis

Sieht man die Klemmen Emitter und Basis als Eingang und Kollektor und Basis als Ausgang an, so stellt der Transistor einen Quadrupol dar. *Wäre er passiv*, so könnte man ihn also durch eine T-Schaltung darstellen.

Ein T-Glied mit den drei Widerständen R_e, R_k, R_b (Abb. 655) ergibt

$$U_e = (R_e + R_b)\, i_e + R_b i_k,$$

$$U_k = R_b i_e + (R_k + R_b)\, i_k.$$

Man sieht sofort die *Symmetrie* im Kopplungsterm $R_b i_k$, $R_b i_e$ in beiden Gleichungen mit dem gleichen Koeffizienten R_b.

Nun ist jedoch ein Transistor kein passiver Quadrupol. Seine Rückkopplungseffekte haben wir bereits untersucht. Wir sehen nun, daß in der Darstellung der

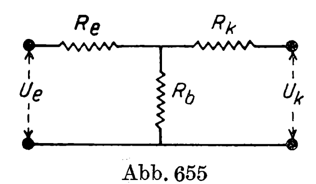


Abb. 655

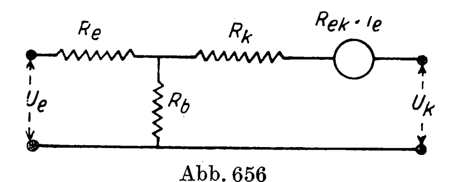


Abb. 656

Koeffizienten $R_{11}\ldots$ der Wert von R_{12} (z. B. 300 Ω) nicht gleich R_{21} (z. B. 100000 Ω) ist – und sogar erheblich abweicht. Wir erhalten ein genaueres Bild, wenn wir den entsprechenden Term in die zweite Gleichung einsetzen.

Die entsprechende Schaltung ist ein T-Glied mit einer zum Strom i_e proportionalen *inneren elektromotorischen Kraft* (Abb. 656).

Mit $R_{ek} i_e$ bezeichnen wir diese innere elektromotorische Kraft, deren Lage aus Abb. 656 ersichtlich ist. Wir finden also

$$U_e = (R_e + R_b)\, i_e + R_b i_k\,,$$

$$U_k = (R_b + R_{ek})\, i_e + (R_k + R_b)\, i_k.$$

Diese Darstellung ist also völlig identisch, wobei

$$R_e + R_b \equiv R_{11}; \quad R_b \equiv R_{12};$$

$$R_b + R_{ek} \equiv R_{21}; \quad R_k + R_b \equiv R_{22}.$$

Setzen wir die Werte unseres numerischen Beispiels für den Transistor ein, so folgt

$$R_b = R_{12} = 300\ \Omega \approx R_e = R_{11} - R_{12} = 500\ \Omega;$$

$$R_k = R_{22} - R_{12} \approx 40000\ \Omega; \quad R_{ek} = R_{21} - R_{12} \approx 100000\ \Omega.$$

Diese innere elektromotorische Kraft stellt die Eigenschaft der positiven Löcher des Emitters dar, einen Elektronenfluß des Kollektors im gleichen Verhältnis zu ihrer Anzahl zu liefern.

Multivibrator mit einem einzigen Transistor

Ebenso wie mit einer als Dynatron geschalteten Elektronenröhre kann man nun mit einem einzigen Transistor (Abb. 657) einen Multivibrator herstellen, indem man einen Widerstand in Reihe mit dem Emitter, einen Widerstand in Reihe mit

dem Kollektor und eine Rückkopplungskapazität zwischen beiden Spitzen eingeschaltet. Die Selbstanregung unterstützt man gegebenenfalls noch durch einen Rückkopplungswiderstand R in dem Basiskreis. Diese Anordnung ist möglich, da Emitter und Kollektor in Phase bleiben, wenn die Röhre verstärkt. Bei einer Schaltung mit Trioden, die durch Widerstände und eine Kapazität gekoppelt werden, sind zwei hintereinandergeschaltete Röhren erforderlich, um die gleichen Verhältnisse hervorzurufen; daraus folgt der klassische Multivibrator, bei dem die Anode der zweiten Röhre an das Gitter der ersten gekoppelt ist.

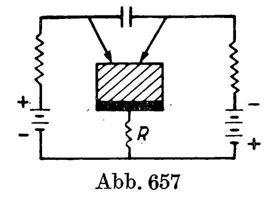


Abb. 657

Bemerkungen über das Rauschen der Transistoren

Das Grundrauschen der Transistoren berechnet man durch die Annahme von zwei Rauschgeneratoren B_e in Reihe mit dem Emitter und B_k in Reihe mit dem Kollektor (siehe Abb. 658). Man kann beide Rauscheffekte voneinander separieren, indem man in der Schaltung Eingangs- und Ausgangsscheinwiderstand verändert. Es stellt sich heraus, daß im Frequenzbereich von 1 Hz bis 1 kHz B_e eine Rauschspannung von etwa 1 μV, B_k dagegen etwa eine solche von 100 μV ergibt. Dabei verändert sich die Rauschenergie gerade umgekehrt zur Frequenz. Was den Rauschursprung anbetrifft, so handelt es sich eher um einen *Schroteffekt* (siehe Seite 620). Weiterhin fand man Zusammenhänge zwischen dem Rauschen B_e und B_k, die rein zufällig, nicht aber unabhängig voneinander variieren (wobei es sehr schwierig ist, die Art ihres Zusammenhanges anzugeben).

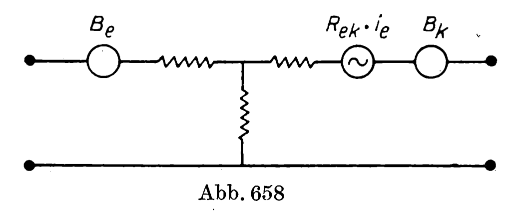


Abb. 658

Tatsächlich ergeben sich keine großen Fehler, wenn man nur das Kollektorrauschen berechnet, da dies das bedeutendere ist.

Es ist klar, daß diese relativ großen Rauscheffekte in starkem Maße von der Struktur der Spitzen, der Kristalle und der Potentialwälle abhängen und in der Zukunft noch starke Verbesserungen in dieser Richtung zu erwarten sind.

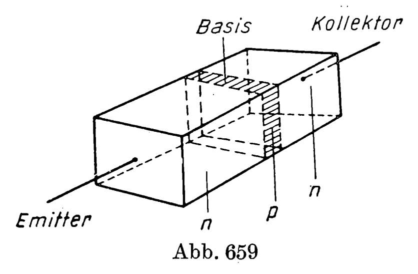


Abb. 659

Flächentransistor

Verändert man während der Einkristallherstellung den Typ der Verunreinigung der Schmelze, so kann man z. B. eine dünne Schicht des Typs p zwischen zwei n-Bereichen erhalten. Die Grenzflächen n–p äußern sich durch einen Potentialwall, der der Anwesenheit einer isolierenden Schicht in der Ebene entspricht, in der sich die Effekte der n- und der p-Schicht gerade aufheben. Sie wirken wie die Spitzen eines Spitzentransistors, gestatten jedoch wegen der großen Fläche in Richtung

der Leitung viel größere Ströme. In Abb. 659 ist ein solcher *Flächentransistor* dargestellt. Zweifellos hat dieser Typ die größere Zukunft, ausgenommen vielleicht (wegen der hohen Eigenkapazitäten) für sehr hohe Frequenzen.

Phototransistor

Konzentriert man einen Lichtstrahl auf die Oberfläche eines Germanium- oder Siliziumkristalls, der mit einer Spitze und einer anderen als Basis dienenden Elektrode ausgerüstet ist, so kann man mühelos Photoleitfähigkeitseffekte feststellen. Eine Anordnung, die die praktische Ausnutzung dieses Effektes gestattet, besteht aus einer dünnen Germaniumschicht, deren Dicke weniger als $^1/_{10}$ mm beträgt (notfalls muß diese Schicht im Zentrum geschwächt werden, Abb. 660). An diese Schicht legt man eine Phosphorbronze-Spitze, die aus einem etwa 0,12 mm starken Draht gezogen ist und als *Kollektor* dient, d.h. eine in bezug auf die Basis negative Speisespannung erhält. Beleuchtet man jetzt die frei gebliebenen Germaniumflächen, so zeigt sich eine starke Abnahme des Widerstandes. Die durch das Licht unter diesen Bedingungen verursachte Stromzunahme nennt man „Photostrom". Dabei ist es sehr wichtig, daß man bemerkenswerte Photoströme nur erhält, wenn das Licht in unmittelbarer Nähe der Spitze auffällt. Will man eine Ausbeute von der Hälfte des maximalen Wertes erreichen, so darf der Lichtfleck um nicht mehr als 0,15 mm von seiner optimalen Lage abweichen.

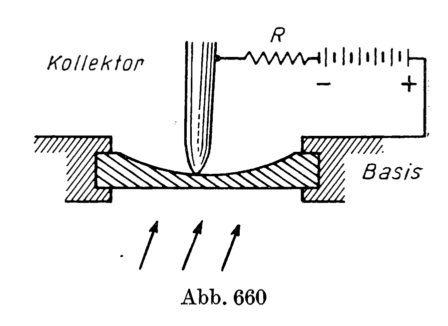


Abb. 660

Legt man z.B. einen Widerstand von 20000 Ω mit dem Kollektor in Reihe, so kann man einen Photostrom von 0,07 mA/lm erreichen. Bei einem Vergleich dieses Wertes mit der normalen Empfindlichkeit einer Photokathode, die etwa 50 μA/lm beträgt, zeigt sich, daß die Empfindlichkeit 1400mal größer ist. Dieser Unterschied ist natürlich recht beträchtlich.

Eine Anzahl Charakteristiken des Phototransistors sind als Funktion des einfallenden Lichtes (Lichtstrom in Lumen) im folgenden angegeben (Abb. 661).

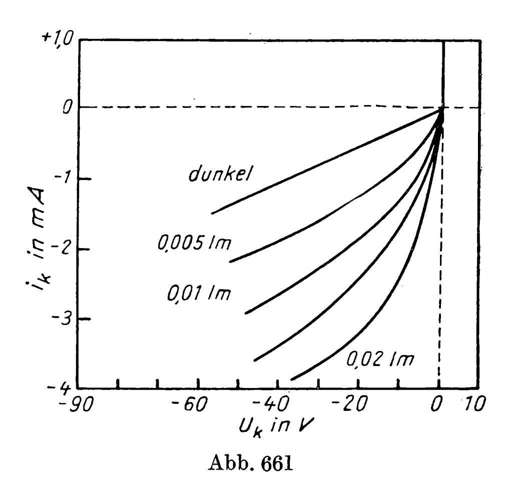


Abb. 661

Selbstverständlich hängt die Ausbeute eines Phototransistors von der Wellenlänge ab. Gibt man diese Ausbeute durch den Quotienten aus Lichtstrom und Anzahl der pro Sekunde einfallenden Quanten an, so erhält man die in Abb. 662 dar-

gestellte Kurve, die bei einer Wellenlänge $\lambda = 1{,}5\ \mu$ ein Maximum besitzt, d. h. im Infraroten. Für $\lambda = 1{,}8\ \mu$ geht die Ausbeute gegen Null.

Diese Resultate liefern die Erklärung für die Wirkungsweise des Phototransistors. Die Wellenlänge $\lambda = 1{,}8\ \mu$ entspricht einem Quant $h\nu = 0{,}72$ eV. Dies ist gerade die minimale, zur Paarbildung (freies Elektron und positives Loch) im Ger-

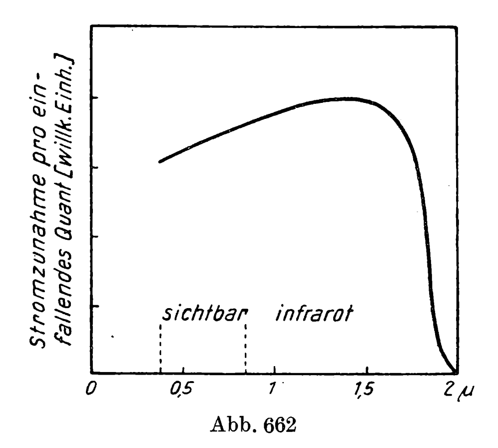


Abb. 662

manium notwendige Energie. Mit Licht einer Wellenlänge kleiner als $1{,}8\ \mu$ erzeugt man also positive Löcher, die den Kollektorstrom, gerade wie bei einem Transistor mit Löcheremission durch die Emitterspitzen, steuern. Die Abnahme der Ausbeute nach kürzeren Wellenlängen hin erklärt man durch die Tatsache, daß Licht kürzerer Wellenlängen von der Germaniumoberfläche stärker absorbiert wird und die positiven Löcher dem Kollektor gegenüber, von dem sie weiter entfernt sind, weniger wirksam sein werden.

Wir haben uns hier auf diese kurzen Bemerkungen beschränkt, da eine vollständige Theorie die Einführung von Begriffen notwendig machen würde, die in der Festkörperphysik eine Rolle spielen.

DIE EINHEITEN

Kohärente und inkohärente Maßsysteme

Bei der Behandlung der Elektrostatik haben wir das *System der elektrostatischen CGS-Einheiten* definiert und benutzt. Später wurde bei der Betrachtung des Magnetismus ein neues System eingeführt, das der *elektromagnetischen CGS-Einheiten*. Dieses letztere System wurde zur Definition und zur Messung von Größen einer im allgemeinen neuen Art (magnetisches Feld usw.) benutzt. In der Elektrodynamik waren wir jedoch gezwungen, die Wirkung magnetischer Felder auf elektrische Ströme und im umgekehrten Fall das Auftreten einer elektromotorischen Induktionskraft zu betrachten. Da in der Elektrodynamik magnetische (oder elektrische) Phänomene von elektrischen (oder magnetischen) Größen abhängen, ist die Einführung von Relationen zwischen den beiden erwähnten Systemen erforderlich. Weiterhin haben wir bei verschiedenen Gelegenheiten auf das *praktische Maßsystem* (Volt, Ampere, Coulomb, Ohm, Joule sowie Henry und Farad) hingewiesen, und daher mußten wir Relationen zwischen diesem und den beiden CGS-Systemen ebenfalls angeben. Schließlich definierten wir noch *Leistungen*, elektrische, magnetische und elektrodynamische *Energien* und rechneten mit diesen. Da man die elektrischen und magnetischen Felder durch die *Kräfte* definiert hat, müssen alle drei Systeme mit den mechanischen Einheiten in Beziehung stehen. Diese Beziehung wird für die elektrostatischen und elektromagnetischen CGS-Einheiten über das erg und für das praktische System über das Joule gefunden.

Gausssches Maßsystem

Wir wollen nun noch einmal die Frage der Einheiten im Zusammenhang betrachten.

Der erste naheliegende Gedanke ist eine *Unterscheidung der CGS-Einheiten*. Alle elektrischen Größen werden in elektrostatischen, alle magnetischen Größen in elektromagnetischen CGS-Einheiten angegeben. Man sieht jedoch sofort, daß dann die Darstellung der elektrodynamischen Formeln nur mit *Hilfe von Koeffizienten* möglich ist. Wir haben daher für das in der Entfernung r in der Richtung α von dem im Element dl fließenden Strom i erzeugte magnetische Feld den Wert

$$\frac{i\,dl \sin\alpha}{r^2}$$

angegeben.

Dabei muß jedoch i in elektromagnetischen CGS-Einheiten gemessen werden. Wollen wir in diesem Fall i in elektrostatischen Einheiten angeben, so muß das magnetische Feld in Oersted mit dem Wert

$$\frac{i\,dl}{c}\,\frac{\sin\alpha}{r^2}$$

angegeben werden, wobei $c = 3 \cdot 10^{10}$ das Verhältnis der elektromagnetischen zur elektrostatischen Ladungseinheit ist.

Der Faktor c bzw. $\frac{1}{c}$ wird also in allen in diesem System dargestellten elektrodynamischen Ausdrücken (dem für das Vektorpotential, für die elektromotorische Kraft eines Dynamos usw.) auftreten.

Das im folgenden zu definierende *Gausssche System* ist besonders bequem bei der Behandlung der Maxwellschen Gleichungen und denen der elektromagnetischen Ausbreitung.

Man kann tatsächlich zeigen, daß c numerisch gleich der Ausbreitungsgeschwindigkeit ebener elektromagnetischer Wellen im Vakuum ist und daß in einer ebenen Welle $E = H$. Dies bedeutet, daß ein sich im Raum gleichförmig ausbreitendes magnetisches *Induktionsfeld* von 1 Gauß von einem sich senkrecht dazu mit der gleichen Geschwindigkeit ausbreitenden elektrischen Feld begleitet ist, dessen Wert 300 V/cm (d.h. gerade 1 elektrostatische CGS-Einheit) beträgt.

Dagegen ist die Gleichung $E = H$ nur *numerisch* zu verstehen. Es ist selbstverständlich, daß E und H keine Größen mit gleichen physikalischen Dimensionen darstellen.

Das Gausssche System führt dazu, die erwähnten Koeffizienten (z.B. c) in einigen Formeln (z.B. der Laplaceschen Formel) nicht einzusetzen, in denen sie eigentlich auftreten müßten. Solche Systeme werden *inkohärent* genannt.

Kohärente Systeme. Die beiden CGS-Systeme

Das elektromagnetische CGS-System ist im Gegensatz dazu *kohärent*, denn
– es definiert zuerst die magnetischen Einheiten;
– dann durch die Laplacesche Gleichung ohne Koeffizienten die elektromagnetische CGS-Einheit des *elektrischen Stroms* (und die Ladungseinheit), sodann die Einheit des elektrischen Potentials durch die Tatsache, daß die dieser Veränderung unterliegende Ladungseinheit ein erg liefert, und daran anschließend alle elektrostatischen Einheiten.

Alle elektrischen Einheiten sind also durch eine einheitliche Methode definiert.

Entsprechend ist das elektrostatische CGS-System ebenfalls kohärent:
– man baut die Elektrostatik auf;
– die erste Formel, auf die wir in der Elektrodynamik stoßen, definiert die elektrostatische Einheit des magnetischen Feldes. Dieses Feld leistet bei Verschiebung der magnetischen Masseneinheit um 1 cm gerade 1 erg und definiert dadurch die elektrostatische Einheit der magnetischen Masse.

Wir geben wegen der geringen Verwendung die Werte der elektrischen Größen in elektromagnetischen Einheiten nicht an. Man muß sich merken, daß

$$\frac{\text{elektromagnetische Ladungseinheit}}{\text{elektrostatische Ladungseinheit}} = c.$$

Daraus folgt dann

$$\frac{\text{Wert einer Elektrizitätsmenge in elektromagn. Einh.}}{\text{Wert der \textit{gleichen} Elektrizitätsmenge in elektrostat. Einh.}} = \frac{1}{c}$$

und

$$\frac{\text{elektromagn. Einh. des elektrischen Potentials}}{\text{elektrostatische Einh. des elektrischen Potentials}} = \frac{1}{c},$$

(da sowohl in elektrostatischen als auch in elektromagnetischen Einheiten $Ui = 1$ erg/sec) usw.

Bemerkungen

1. In dem System der elektrostatischen CGS-Einheiten ist die Dielektrizitätskonstante des Vakuums gerade 1. Daraus folgt notwendig, daß die magnetische Permeabilität des Vakuums in diesem System von 1 verschieden sein muß. Geht man von der Elektrostatik zum Magnetismus und dann zur Elektrodynamik über, so findet man schließlich die Kraft, die zwischen zwei im Vakuum in einer Entfernung von 1 cm angebrachten magnetischen Einheitspolen (in elektrostatischen Einheiten) wirkt. Diese Kraft ist nicht gleich 1 dyn und beträgt gerade $\frac{1}{\mu_0}$. Das COULOMBsche Gesetz stellt sich also in der Form

$$\frac{1}{\mu_0} \frac{m m'}{r^2}$$

dar.

Die weitere Entwicklung des Magnetismus zeigt, daß dieser Wert μ_0 gleich der magnetischen Permeabilität des Vakuums ist.

Für die Masse m wählen wir nun die elektromagnetische Einheitsmasse und ebenso für die Masse m'. Wir finden in diesem Fall eine Kraft von 1 dyn bei einem Abstand von 1 cm. Daraus folgt also, daß μ_0 *gleich dem Quadrat der elektromagnetischen Einheit der magnetischen Masse ist, gemessen in elektrostatischen Einheiten.*

Der numerische Wert von μ_0 ist leicht zu berechnen:

Dem magnetischen *Feld H* eines Stromelementes

$$H = \frac{i\,dl \sin\alpha}{r^2}$$

entspricht die Induktion

$$B = \mu_0 H = \frac{\mu_0 i\,dl \sin\alpha}{r^2}.$$

Setzt man in diesem Ausdruck $i = 1$ elektrostatische Einheit, so ergibt sich für die elektrostatische Einheit des magnetischen Feldes $\frac{1}{3 \cdot 10^{10}}$ Oersted.

Verschiebt sich ein Magnetpol der Stärke einer elektrostatischen Einheit in diesem Feld um 1 cm, so entspricht dies einer Leistung von 1 erg, d.h., eine elektrostatische Einheit der Polstärke hat also den Wert von $3 \cdot 10^{10}$ elektromagnetischen Einheiten, und umgekehrt beträgt 1 elektromagnetische Einheit $\frac{1}{3 \cdot 10^{10}}$ elektrostatische Einheiten. Betrachtet man das COULOMBsche Gesetz, nach dem

eine elektromagnetische Einheit des Magnetpols eine gleiche in 1 cm Entfernung befindliche mit der Kraft 1 dyn abstößt, so erhält man in elektrostatischen Einheiten

$$\mu_0 = \frac{1}{9} \cdot 10^{-20} = \frac{1}{c^2} \quad \text{oder auch} \quad c = \frac{1}{\sqrt{(\varepsilon_0 \mu_0)_{\text{el.stat.}}}}.$$

2. Entsprechend wird im elektromagnetischen CGS-System die Dielektrizitätskonstante ε_0 des Vakuums nicht gleich 1 sein, d.h.

$$K = \frac{1}{\varepsilon_0} \frac{q q'}{r^2}.$$

Wählen wir für q und q' die elektrostatische Einheit der elektrischen Ladung, so hat K bei einer Entfernung von 1 cm den Wert 1 dyn. Für ε_0 finden wir also in diesem Fall das Quadrat der elektrostatischen Ladungseinheit, gemessen in elektromagnetischen Einheiten: Es ist also

$$\varepsilon_0 = \frac{1}{9} 10^{-20} = \frac{1}{c^2} \quad \text{oder auch} \quad c = \frac{1}{\sqrt{(\varepsilon_0 \mu_0)_{\text{el.magn.}}}}.$$

Man sieht also die Symmetrie zwischen beiden Systemen.

Schlußfolgerung

Es ist also sowohl im elektrostatischen als auch im elektromagnetischen CGS-System möglich, durch schrittweises Vorgehen von Definitionsgleichung zu Definitionsgleichung zu kohärenten Systemen zu gelangen. Dabei werden in allen den Formeln die numerischen Koeffizienten gleich 1 gesetzt, in denen eine neue Einheit auftritt, wodurch ihr Wert definiert ist. Nun gibt es jedoch mehr Gleichungen als Einheiten, und nach Definition aller Einheiten bleiben noch die physikalischen Gesetze durch Formeln zu beschreiben, wobei wieder Koeffizienten auftreten, μ_0 im elektrostatischen, ε_0 im elektromagnetischen System.

Diese Art des Vorgehens führt jedoch für ε_0 in elektromagnetischen und μ_0 in elektrostatischen Einheiten zu ungewöhnlichen Größenordnungen. Der Gedanke, ε_0 im elektrostatischen oder μ_0 im elektromagnetischen System als Einheit zu wählen, ist nicht weniger ungewöhnlich, sobald man davon ausgeht, daß *diese Größen die Grundlage der physikalischen Dimensionen darstellen sollen.*

Wir wollen nun durch die Annahme, daß diese Größen nicht vorhanden seien, die Sinnlosigkeit nachweisen. Die elektrische Ladung besäße wegen des Coulombschen Gesetzes

$$K = \frac{q q'}{r^2} \quad (\text{mit } \varepsilon_0 = 1)$$

die Dimension Masse$^{1/2}$ Länge$^{3/2}$ Zeit^{-1}.

Nun besitzt μ_0 jedoch die Dimension von $\frac{1}{c^2}$, d.h. Länge^{-2} Zeit^2 in elektrostatischen Einheiten. *Umgekehrt* ist es, wenn man zum elektromagnetischen System übergeht, die Dimensionen hängen in jedem Fall von dem gewählten Maß-

system ab. Die logische Konsequenz lenkt die Aufmerksamkeit auf den Begriff der physikalischen Dimension der Größen.

Günstiger ist es, den umgekehrten Weg zu gehen und z. B. Q, die elektrische Ladung, als Fundamentalgröße anzusehen, die zu Länge, Masse und Zeit hinzutritt, um alle anderen magnetischen und elektrischen Größen definieren zu können. ε_0 und μ_0 werden dann von Null verschiedene invariante Dimensionen besitzen, welches auch die gewählten Einheiten seien.

Das praktische (MKS-)System

Wegen der oben angegebenen Nachteile der kohärenten CGS-Systeme tritt die Frage auf, ob eine Verwendung der sogenannten praktischen Einheiten Vorteile bietet. Nach den bisherigen Überlegungen wäre dies der Fall, wenn sich aus den praktischen Einheiten ein *kohärentes* System aufbauen ließe.

Man kann zeigen, daß dies unter folgenden Bedingungen möglich ist:

Die praktischen Einheiten: Volt, Ampere, Coulomb, Joule, Watt, Ohm, Farad, Henry müssen beibehalten werden;

Gauß und Maxwell werden durch neue, noch zu definierende Einheiten ersetzt;

Ein auf die mechanischen Größen Meter, Kilogramm – Masse, Sekunde bezogenes System muß eingeführt werden.

Dieses neue, das sogenannte praktische MKS-System bietet viele Vorteile, und es ist zu erwarten, daß es bald in der gesamten Welt benutzt wird. (Weiter hinten wird man jedoch vielleicht noch bessere Vorschläge finden.) Seine Grundeinheiten sollen im folgenden betrachtet werden.

Als erstes soll die *Einheit der Kraft* in diesem System behandelt werden. Diese Einheit, das *Newton* oder *Dyn*, ist diejenige Kraft, die einer Masse von 1 kg eine Beschleunigung von 1 m/sec^2 verleiht. Diese Einheit entspricht 10^5 dyn und ist etwa $\frac{1}{10}$ $\left(\text{genauer } \frac{1}{9{,}81}\right)$ eines Kilogramm (Kraft). Die Einführung dieser neuen Einheit, die in einer noch sehr möglichen, jedoch weniger üblichen Größenordnung liegt, ist der einzige Nachteil dieses Maßsystems. (Das Newton ist gleich einem Millisthène, einer Einheit aus dem fast völlig in Vergessenheit geratenen MTS-System.)

Als weitere mechanische Einheit erscheint die Einheit des Druckes, das Pascal, das einem Newton pro m^2 entspricht.

Bei Zugrundelegung dieser Einheiten ergibt sich als Einheit der Arbeit das Joule. Da die gleiche Einheit auch für die elektrische Arbeit definiert ist, bildet das *Joule* die Verbindung zwischen mechanischen und elektrischen Größen. Wir wollen nun die *Einheit der magnetischen Feldstärke* definieren, die sich aus der Gleichung

$$\frac{i\,dl \sin\alpha}{r^2}$$

ergibt.

Es ist nun erforderlich, $i = 1$ A und $r = dl = 1$ m zu setzen. Da 10 A bei $dl = 1$ cm und $r = 1$ cm bereits eine Feldstärke von 1 Oersted ergeben, wählt man

als neue Einheit des Feldes 1 *Millioersted*, die Feldstärke, die 1 A bei $r = dl = 1$ m entspricht.

Die Einheit der *magnetischen Induktion* wird dagegen aus völlig anderen Betrachtungen resultieren. Im Bereich der Elektrodynamik wird zuerst der Induktionsfluß durch

$$e = -\frac{\partial \Phi}{\partial t}$$

definiert.

Eine weitere Grundeinheit ist das *Weber:* Tritt ein Induktionsfluß von 1 Weber pro Sekunde mit einer gleichförmigen Geschwindigkeit in einem Stromkreis auf oder wird dort verbraucht, so liegt zwischen den Klemmen dieses Stromkreises eine konstante elektromotorische Kraft von 1 Volt.

Die entsprechende Einheit der *magnetischen Induktion* ist 1 *Weber pro* m². Auf dieser Grundlage kann man leicht die anderen magnetischen Einheiten einführen.

Das Induktionspotential P wird in Weber pro m angegeben, das magnetische Moment in Weber · m pro Raumwinkel (Steradian) gemessen und die magnetische Masse in Weber pro Raumwinkel (definiert z.B. durch Gleichsetzung des Induktionsflusses durch eine geschlossene Fläche mit $4\pi m$).

All dies erscheint sehr kohärent. Jedoch gelangen wir durch diese Überlegungen zu der bedeutenden Feststellung, daß *Induktion und magnetisches Feld* nicht mehr als Größen gleicher Natur erscheinen.

Durch die Berechnung des von einem Strom aufgebauten magnetischen Feldes wurden wir auf das Millioersted geführt. Das LAPLACEsche Gesetz ergibt die Kraft, die auf den Zweig l eines von einem Strom i durchflossenen und sich in einem senkrecht zu seiner Ausdehnung verlaufenden Magnetfeld befindenden Leiter wirkt, zu $H\,l\,i$. Diese Kraft beträgt bei 1 Gauß Induktion und 10 A bei einer Länge $l = 1$ cm gerade 1 dyn. Wir sehen also, daß 1 Millioersted und 1 A bei $l = 1$ m niemals eine Kraft von 1 Newton erzeugen. Mit anderen Worten: Ist zur Definition des Feldes die Gleichung $H = \frac{i\,dl \sin\alpha}{r^2}$ gegeben, so kann die Formel $K = H\,l\,i$ nicht für diesen Zweck verwendet werden. Dieses Paradoxon verschwindet jedoch, wenn man $K = B\,i\,l$ ansetzt und die *magnetische Induktion* als Ursache der elektromagnetischen Kräfte ansieht. Fassen wir noch einmal zusammen: Eine Veränderung des Flusses um 1 Gauß pro m² sec verursacht eine elektromotorische Kraft von 10^{-4} V, 1 Weber pro m² liefert pro 1 m² 1 Volt, also entspricht 1 Weber pro m² gerade 10^4 Gauß. Die Größe $B\,l\,i$ ergibt, wenn man in CGS-Einheiten für $B = 10^4$ Gauß, $l = 100$ cm und $i = 1$ A $= {}^1/_{10}$ elektromagnetische Einheiten einsetzt, 10^5 dyn $= 1$ Newton. Es handelt sich also tatsächlich um ein kohärentes System. Gehen wir jedoch von der Elektrodynamik zum Magnetismus über, so wird das „Feld" von magnetischen Massen und magnetischen Momenten wieder als von Kräften aufgebaut angesehen. Tatsächlich handelt es sich also bei allen diesen Feldern um *Induktionen*, und *das magnetische Feld wird zu einem unnötigen Begriff*, wenn man es nicht als Maß für die Fähigkeit des Stroms, magnetische Induktionen zu erzeugen, ansehen will.

$$H = \frac{i\,dl \sin\alpha}{r^2}$$

ist das magnetische Feld eines Stromelementes idl und stellt also die von diesem Element in einem Medium mit der Permeabilität 1 hervorgerufene Induktion dar. Dabei ist zu beachten, daß in dem praktischen Maßsystem die Permeabilität des Vakuums $\mu_0 \neq 1$ ist. Diese Permeabilität soll im folgenden berechnet werden.

10 A, die in einem Leiterelement der Länge von 1 cm fließen, ergeben in einem Medium mit einer der des Vakuums gleichen Permeabilität in 1 cm Entfernung eine Induktion von 1 Gauß und ein Feld von 1 Oersted.

Ein Strom von 1 A gibt in einem Leiterelement von $l = 1$ m in 1 m Entfernung ein Feld von 1 Millioersted, also eine Induktion von 1 Milligauß, d. h. 10^{-7} Weber/m².

Schreibt man diese Induktion in der Form $\mu_0 \frac{idl}{r^2}$ mit $\frac{idl}{r^2} = 1$, so sieht man, daß $\mu_0 = 10^{-7}$.

Dies ist also die Permeabilität des Vakuums im MKS-System, die eine Dimension besitzt, nach der wir suchen.

Das Henry. Wir wollen nun die Gleichung einer Selbstinduktion betrachten:

$$L = \frac{4\pi\mu n^2 F}{l}.$$

Man sieht sofort, daß das Henry eine Einheit des praktischen Maßsystems ist: 1 Henry hat den Wert von 1 Weber pro Ampere, da $\frac{Ldi}{dt}$ für $L = 1$ H und $\frac{di}{dt} = 1$ A/sec gerade 1 V beträgt und weil eine Veränderung des Flusses um 1 Weber pro sec nach Definition ebenfalls 1 V ergibt.

Man kann auch sagen, daß 1 H = 1 Ω/sec, da 1 Weber = 1 V/sec. Dies ist durch 1 A zu dividieren, um wieder 1 H zu erhalten, und 1 V/A ist gerade 1 Ω.

Nun multiplizieren wir L mit i:

$$Li = \left(\frac{4\pi n i}{l}\right) \mu (nF).$$

μ ist also gleich dem Quotienten aus Induktionsfluß (Li) und Feldfluß $\left(nF \frac{4\pi n i}{l}\right)$, *d.h., es wird in Weber pro Millioersted und Quadratmeter gemessen.*

Kommen wir noch einmal auf das magnetische Feld zurück: Es dient einzig zur Angabe der *Amperewindungen pro Meter* und, wenn man den Faktor 4π verwendet, um auf die Einheit des Feldes (das Millioersted) zu kommen. Wir werden im folgenden noch auf den Faktor 4π zurückkommen und sehen, daß *eine nochmalige Darlegung des klassischen Magnetismus ohne den Begriff des Magnetfeldes notwendig ist.*

Die Gleichung

$$B = H + 4\pi J$$

gebe uns z.B. eine Beziehung zwischen dem „Feld" der Magnetisierungsstärke J in einem magnetischen Medium und der Induktion. Diese Gleichung gilt nur, wenn H und B in gleichen Einheiten (oder in den numerisch gleichen Einheiten – Oersted und Gauß) gemessen werden. Offensichtlich ist es nötig,

$$B = B_0 + 4\pi J$$

zu setzen, wobei B_0 die Induktion ist, die durch die gleichen magnetischen Massen und die gleichen Ströme im Vakuum aufgebaut würde. Man kann folglich die Magnetostatik darstellen, indem man den Begriff des „Feldes" völlig vernachlässigt und nur von Induktionen spricht. Geht man zur Elektrodynamik über, so braucht man nur Amperewindungen und Gauß oder Weber pro m^2 zu benutzen.

Betrachtet man einen magnetischen Kreis mit Eisenkern, auf dem Gleichstromwicklungen angebracht sind und der außerdem durch einen Permanentmagneten polarisiert wird, so kann die Induktion im Eisen als kombinierte Wirkung dieser beiden Ursachen angesehen werden. Der Begriff des Feldes im Eisen ist nur eine gewohnheitsmäßige Bezeichnung, die jedoch keinen praktischen Wert besitzt. Berechnet man tatsächlich das durch die Gleichstrom-Amperewindungen aufgebaute Feld, so sind einige Nebenrechnungen erforderlich, um das Feld zu erhalten, das von der polarisierenden Wirkung des äußeren Magneten herrührt.

Vereinzelt stößt man in der Literatur auf das *Gilbert*, das die weniger gebräuchliche Einheit des *magnetischen Potentials* darstellt: $\frac{1}{4\pi}$ Amperewindungen entsprechen 1 *Dezigilbert* und bauen in einem magnetischen Kreis von 1 cm Länge ein Feld von $^1/_{10}$ Oersted und in einem Kreis von 1 m Länge ein solches von 1 Millioersted auf. 1 Gilbert ist also eine Einheit des elektromagnetischen CGS-Systems und 1 Dezigilbert eine Einheit des praktischen (MKS-)Systems.

Das Farad. Über diese Einheit ist nichts Besonderes zu sagen, sie entspricht im praktischen Maßsystem dem Coulomb und dem Volt oder dem Coulomb und dem Joule.

Schließlich muß noch die Dielektrizitätskonstante des Vakuums in diesem Maßsystem bestimmt werden. Die Beziehung

$$c = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_0 \, \mu_0}}$$

bleibt, da das System kohärent ist, gültig, und man erhält mit $c = 3 \cdot 10^8$ m/sec und $\mu_0 = 10^{-7}$ für $\varepsilon_0 = \frac{1}{(9 \cdot 10^9)}$.

Die sogenannten rationalisierten Systeme

Rationalisierung wird eine Operation genannt, die in einigen Fällen von Nutzen ist und die durch geeignete Wahl bestimmter Einheiten das Auftreten des Faktors 4π in einigen Gleichungen verhindert, es in anderen dagegen verursacht. Diese Operation wurde zuerst von HEAVISIDE durchgeführt, der feststellte, daß der Faktor 4π aus geometrischen und niemals aus grundlegenden physikalischen Gründen auftritt. Er und später H. A. LORENTZ wandten diese Rationalisierung auf das GAUSSsche Maßsystem an.

Wir wollen dieses HEAVISIDEsche System hier nicht näher betrachten.

Dagegen wollen wir uns nun der Rationalisierung des *MKS-(GIORGIschen)-Systems* zuwenden, da dieses uns auf eine völlig andere und in gewissem Sinne bessere Erklärung der Gesetze der Elektrizität führt, unabhängig von dem Vorteil der Formelvereinfachung, der wir keinerlei Bedeutung beimessen wollen.

Im GIORGIschen Maßsystem werden beibehalten:

– die mechanischen MKS-Einheiten,

– Volt, Ampere, Coulomb, Farad, Henry, Weber usw.; für die magnetische Permeabilität des Vakuums wird der Wert $\mu_0 = \frac{4\pi}{10^7}$ *angenommen*. Dann ergibt sich die Dielektrizitätskonstante des Vakuums zu

$$\varepsilon_0 = \frac{1}{36\pi} \cdot 10^{-9}.$$

Die Lichtgeschwindigkeit c wird in Meter pro Sekunde wegen

$$\varepsilon_0 \mu_0 = \frac{1}{c^2}$$

angegeben.

Mit diesen gegebenen Größen kann man bereits alle Formeln und alle Einheiten des Systems angeben, wenn man die Gesetze der Elektrizität in der bereits früher betrachteten Form ausdrückt.

Als Beispiel wollen wir die Selbstinduktion einer Spule im Vakuum betrachten. In elektromagnetischen CGS-Einheiten hat diese den Wert

$$L = \frac{4\pi n^2 F}{l}.$$

In Henry ausgedrückt, lautet dies:

$$4\pi \frac{n^2 F}{l} 10^{-9}.$$

Mißt man nun F und l in m (d.h. in einer Einheit des MKS-Systems), so lautet jetzt die Formel für die Selbstinduktion:

$$L_{\text{Henry}} = (4\pi \cdot 10^{-7}) \frac{n^2 F}{l}.$$

Da der Faktor $4\pi\, 10^{-7}$ aber nun gerade die Permeabilität μ_0 des Vakuums ist, können wir schreiben:

$$L_{\text{Henry}} = \mu_0 \frac{n^2 F}{l}.$$

Fließt jetzt in dieser Spule ein Strom von i Ampere, so beträgt der Fluß

$$(Li) = \mu_0 \frac{n^2 F}{l} i.$$

Der Fluß pro Windung ist $\mu_0 \frac{nF}{l} i$ und die Induktion B also gegeben zu

$$B = \mu_0 \frac{n\, i}{l}.$$

Nun ist jedoch $B = \mu_0 H$, also muß $H = \frac{n\,i}{l}$ sein. *Das magnetische Feld wird also durch die Amperewindungen pro Meter gemessen.* Dies ist eine direkte Konsequenz aus der Wahl von μ_0 und den Einheiten des MKS-Systems.

Darstellung der Gesetze der Elektrizität auf der Grundlage des rationalisierten GIORGIschen MKS-Systems

Bei der folgenden Darstellung werden wir uns so kurz wie möglich fassen.

Elektrizität

1. Das *Volt* und das *Ampere* sind durch zwei Bedingungen festgelegt:

a) $1\,\text{V} \cdot 1\,\text{A} \cdot 1\,\text{sec} = 1\,\text{Newton} \cdot 1\,\text{m} = 1\,\text{Joule}$;

b) $\mu_0 = 4\pi\,10^{-7}\,\frac{\text{V} \cdot \text{sec}}{\text{A} \cdot \text{m}}$.

Weiterhin wird das *Ohm* durch das *OHMsche Gesetz* definiert.

2. Um das Potential eines isolierten Leiters um 1 V zu erhöhen, muß ein Stromstoß $\int i\,dt$ (A sec) zugeführt werden. Der Quotient aus diesem Stromstoß und der erfolgten Potentialzunahme wird *Kapazität des Leiters* genannt und in Farad angegeben:

$$1\,\text{Farad} = 1\,\frac{\text{A sec}}{\text{V}},$$

wobei

$$1\,\text{A} \cdot \text{sec} = 1\,\text{Coulomb}$$

mit

$$\int i\,dt = Q.$$

3. Nun ist jedoch das Vorhandensein dieser Ladung auf dem Leiter mit der Ausbildung von Kraftlinien im Raum verbunden. Der Gesamtfluß dieser Linien wird für den gesamten Leiter definiert durch

$$\int i\,dt = \psi = C\,U = Q\,\text{A} \cdot \text{sec}.$$

Betrachtet man einen ebenen Kondensator, so ist bekanntlich C proportional zur Fläche F, und man definiert die *Flußdichte*, die sich als dem Feld E proportional erweist:

$$\frac{\psi}{F} = D = \varepsilon E\,\frac{\text{A} \cdot \text{sec}}{\text{m}^2};$$

ε ist dabei ein Proportionalitätsfaktor, der im Vakuum den Wert

$$\varepsilon_0 = \frac{10^7}{4\pi c^2} = 8{,}885 \cdot 10^{-12}\,\text{F m}$$

hat, wobei $c = 3 \cdot 10^8$ die Lichtgeschwindigkeit in m/sec, da nach der MAXWELLschen Theorie $c^2 = \frac{1}{\varepsilon_0 \mu_0}$.

4. Nach den MAXWELLschen und FARADAYschen Darlegungen beträgt die Ladungsenergie eines Kondensators mit dem Volumen $F \cdot l$

$$\int U_0 Q = \frac{1}{2} Q U = \frac{1}{2} U \int i dt = \frac{1}{2} \psi U \text{ W} \cdot \text{sec}.$$

Daraus folgt eine Energiedichte pro m^3 von

$$\frac{1}{2} \frac{\psi}{F} \frac{U}{l} = \frac{1}{2} D E \frac{\text{W} \cdot \text{sec}}{\text{m}^3} = \frac{1}{2} \varepsilon E^2.$$

Diese Formel kann sehr einfach über die potentielle Energie einer Feder erhalten werden.

Magnetismus

5. Um den Strom in einer widerstandslosen Spule um 1 A zu erhöhen, benötigt man einen Spannungsstoß $\int U dt$ (V · sec). Das Verhältnis dieser beiden Werte nennt man den *Selbstinduktionskoeffizienten* L der Spule.

Er wird in Henry $\left(\frac{\text{V} \cdot \text{sec}}{\text{A}}\right)$ gemessen.

Fließt ein Strom i in der Spule, so gilt die Gleichung

$$\Phi = \int U dt i = L i$$

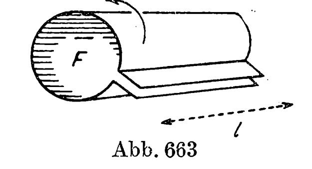


Abb. 663

entweder in Weber oder in V · sec als Definition des gesamten Induktionsflusses der Windungen. Dieser Induktionsfluß des Feldes verursacht im Raum magnetische Wirkungen, die man feststellen kann.

Betrachten wir als Beispiel die spezielle, in Abb. 663 dargestellte Spule mit einer einzigen Windung der Länge l und des Querschnittes F, so ist das Feld im Innern dieser Spule *gleichförmig* und außerhalb Null. Man setzt also

$$\Phi = F B.$$

B ist dabei die Induktion in $\frac{\text{V sec}}{\text{m}^2}$ und $B = \mu H$, wobei $H = \frac{i}{l}$ der pro m fließende Strom ist.

Nach dieser Definition ergibt sich für das Vakuum

$$\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} \frac{\text{V} \cdot \text{sec}}{\text{A} \cdot \text{m}}.$$

Mit den gegebenen Werten von ε_0 und μ_0 erhält man also wieder

$$c^2 = \frac{1}{\varepsilon_0 \mu_0},$$

wie es die MAXWELLsche Theorie für alle Systeme kohärenter Einheiten fordert.

6. Die *im magnetischen Feld gespeicherte Energie* findet man durch Integration des Ausdruckes $i\,U\,dt$, woraus $\frac{1}{2}\Phi i$ in W · sec folgt. Die *Energiedichte* ist dann gegeben zu

$$\frac{1}{2}\frac{\Phi}{F}\frac{i}{l} = \frac{1}{2} B H = \frac{1}{2}\mu H^2 \frac{\text{W} \cdot \text{sec}}{\text{m}^3}.$$

Weiterhin findet man natürlich in dieser langen Spule, die kein äußeres Magnetfeld aufbaut, nach der Definition $H = \frac{i}{l}$:

$$\int H\,dl = i$$

und nicht $4\pi i$.

Eigenschaften der Materie

7. Ist in einem Kondensator oder in einer Spule Materie vorhanden, so verändert sich die Induktion *gegenüber der des Vakuums*, in dem ε und μ gelten, in einem Verhältnis, das durch die Werte von ε_r und μ_r bestimmt ist. Diese Veränderung ist, bei einem elektrostatischen Beispiel, durch die Summe der elektrischen Induktion D_0 im Vakuum und einer weiteren P in der Materie bestimmt:

$$D = D_0 + P = \varepsilon_0 E + P.$$

P entspricht dem elektrischen Moment der Ladungen Q, die sich in einer Entfernung l befinden, und ist gegeben zu

$$\mathfrak{p} = Q\,\mathfrak{l} = \psi\,\mathfrak{l} \quad \text{und} \quad \frac{\mathfrak{p}}{F l} = D - D_0 = P,$$

woraus auch

$$\varepsilon_r = 1 + \chi_r$$

(χ_r = Suszeptibilität) folgt.

Ebenso gilt beim Magnetismus

$$B = B_0 + J = \mu_0 H + J \quad \text{und} \quad \mu_r = 1 + k_r$$

$$\mathfrak{m} = \Phi\,\mathfrak{l} \qquad \text{und} \quad \frac{\mathfrak{m}}{F l} = \frac{\Phi}{F} = B - B_0 = J.$$

Die Bedeutung dieses Systems

Dieses System zeigt deutlich, daß immer die *magnetische Induktion* als Ursache der Kräfte angesehen werden muß (auch im Vakuum). Der Begriff des Magnetfeldes tritt nicht auf und ist durch die Amperewindungen pro Meter ersetzt. Mit seiner Hilfe ist eine neue Darstellung der Elektrizität möglich, bei der die energetischen Beziehungen sehr viel einfacher und natürlicher erscheinen. Schließlich werden alle Verwechslungen zwischen B und H sowie D und E vermieden, da alle Größen in völlig verschiedener Weise definiert werden.

Beispiel

Wir suchen den Quotienten $\frac{E}{H}$ einer sich im Vakuum ausbreitenden ebenen elektromagnetischen Welle zu berechnen. Wie wir bereits gesehen haben, besitzt dieser Quotient im GAUSSschen System den Wert 1. Im rationalisierten GIORGIschen MKS-System ergibt er sich aus der Beziehung $\mu_0 H^2 = \varepsilon_0 E^2$ (Gleichheit zwischen elektrischer und magnetischer Energiedichte in der Welle) und beträgt folglich

$$\sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon_0}} = 376{,}6\ \frac{\mathrm{V}}{\mathrm{A}} = 376{,}6\ \Omega\,.$$

Dieser Wert ist für einen *iterativen Scheinwiderstand* von einer befriedigenden Größenordnung.

Folgerung

Man sieht, daß das rationalisierte GIORGIsche MKS-System von unbestreitbarem Interesse ist. Eine allgemeine Einführung in den Unterricht würde jedoch eine völlige Aufgabe der bisherigen traditionellen Darstellungsweise der Elektrizität erfordern. Es ist möglich, daß dies bereits in naher Zukunft erreicht wird.

Das Dezibel

Das *Dezibel*, abgekürzt db, ist eine sehr spezielle, dimensionslose Einheit, die auf Grund einer gebräuchlichen Anwendung definiert wurde. Betrachten wir einen beliebigen Apparat mit einem Ein- und einem Ausgang, so erhält man, wenn an den Eingang eine bestimmte Leistung gelegt wird, am Ausgang eine dieser entsprechende (geschwächte oder verstärkte) Leistung. Das Verhältnis zwischen Ausgangs- und Eingangsleistung nennt man die *Leistungsverstärkung* G der Apparatur. In gleicher Weise kann man eine Strom- sowie eine Spannungsverstärkung definieren. Nimmt man $10 \cdot \log G$, so hat man ein Maß für diesen Zuwachs in Dezibel. So stellen z.B. 100 db einen Leistungszuwachs von 10^{10} dar, also von 10^5 bei der Strom- und bei der Spannungsamplitude, wenn die Scheinwiderstände am Eingang und am Ausgang gleich sind.

Diese Definition erweist sich bei Übertragungsproblemen und elektrischen Verstärkungen als sehr günstig. In der *Akustik* wendet man das Dezibel zur Messung

der absoluten Niveaus (der Geräusche und der Töne) an, indem man einen Schalldruck von $2 \cdot 10^{-4}$ bar als 0 db ansetzt. Dieser Schalldruck liegt etwas oberhalb der Empfindlichkeitsgrenze des Ohres (bei 2000 Hz, d. h., wo das Ohr am empfindlichsten ist). Als Erläuterung dieser letzten Übereinkunft geben wir einige Beispiele an:

Das Geräusch einer U-Bahn beträgt 75 db;

eine Lautstärke von 130 db verursacht Schmerzempfinden, usw.

In der Elektrizität existiert keine derartige Festlegung, das db gibt stets ein relatives Verhältnis an.

Der Name der Einheit „Bel", die 10 db beträgt, rührt von den amerikanischen Bell Telephone Laboratories her, deren Forschungsergebnisse auf dem Gebiet der Übertragungen oft richtungsweisend waren. Einige andere Einheiten, die in der Technik definiert wurden, jedoch wenig Anwendung finden, sind: das Neper und das Dezineper.

Zur Vermeidung von Mißverständnissen sei noch einmal darauf hingewiesen, daß mit dem Dezibel nur Leistungsverstärkungen angegeben werden. Die Verwendung des Logarithmus für die Messung dieser Leistungsverstärkungen ist eine nebensächliche, jedoch sehr bequeme Festlegung.

SACHREGISTER